Annica BAIKER & Daniela GÖTZE, Dortmund

Distributive Zusammenhänge inhaltlich erklären können – Einblicke in eine sprachsensible Förderung von Grundschulkindern

Distributive Zusammenhänge

In den Grundschullehrplänen der einzelnen Bundesländer ist es Konsens, dass die Kinder am Ende ihrer Grundschulzeit die Aufgaben des kleinen Einmaleins nicht nur automatisiert haben sollen. Sie sollten auch die Multiplikation *mit Verständnis* ausführen. Nachweislich zeigen aber nur wenige Kinder ein solches Verständnis (Downton & Sullivan, 2017; Kuhnke, 2013; Moser Opitz, 2013). Die Konsequenzen sind oftmals zählende Multiplizierer, die in der Vorstellung der fortgesetzten Addition oder des Aufsagens von Einmaleinsreihen verhaften bleiben (Gaidoschik, 2014; Moser Opitz, 2013). Die Multiplikation auszuführen ist aber eben nicht nur das drillartig eintrainierte Abrufen von Einmaleinsfakten. Multiplikation zu verstehen bedeutet vielmehr, die Multiplikation als Koordination von Gruppen gleicher Größe zu verstehen (Downton & Sullivan, 2017), aber auch Beziehungen zwischen multiplikativen Aufgaben zu kennen (Gaidoschik, 2014). Die so genannten Ableitungsstrategien (ebd.) basieren auf der Einsicht additiver oder auch subtraktiver Zerlegungen des Multiplikators oder Multiplikanden und dem Verständnis, dass und wie Aufgaben bei gleichen Multiplikatoren oder Multiplikanden distributiv zusammengefasst werden können. Dieses Wissen im kleinen Einmaleins bildet eine zentrale Grundlage für halbschriftliche Rechenstrategien mit zwei oder mehrstelligen Faktoren (Kinzer & Stanford, 2014), aber auch für ein Verständnis für allgemeine Termumformungen (Downton & Sullivan, 2017; Schüler-Meyer, 2017). Fehlkonzepte bei den binomischen Formeln basieren nachweislich überwiegend auf einem fehlenden Verständnis des Distributivgesetzes (Carpenter et al., 2003). So stehen Fehlkonzepte bei der (algebraischen) Termumformung nachweislich häufig im engen Zusammenhang zu Fehlkonzepten im Distributivgesetz, so dass die möglichst frühzeitige Förderung eines inhaltlichen Verständnisses für das Distributivgesetz bereits in der Grundschule ansetzen sollte.

Design

Das in diesem Beitrag kurz umrissene fachdidaktische Entwicklungsforschungsprojekt (Prediger et al., 2012) – mit aktuell zwei abgeschlossenen Zyklen – verfolgt daher das Forschungsinteresse, Fehlkonzepte zum Distributivgesetz in der Grundschule herauszustellen aber auch ein Förderkonzept zu entwickeln, das zu einem konzeptuellen Verständnis des Distributivgesetzes in der Grundschule führt. Auf der Designebene wurde daher sprach- und fachintegriertes Fördermaterial für multiplikative Vorstellungen sowie für das Distributivgesetz entwickelt. Zentrale Grundlagen hierfür lieferten Forschungsbefunde aus vorherigen Projekten (Götze, 2019). Auf sprachlicher Ebene wurden vor allem Sprachmittel zur differentiellen Unterscheidung von Multiplikator („Anzahl der Gruppen“) und Multiplikand („Größe der Gruppe“) im Diskurs mit den Kindern etabliert. So wurden Terme wie z.B. $5 \cdot 3$ als „drei Fünfergruppen“ gedeutet. Fachintegriert wurden verschiedene Darstellungen (enaktive, ikonische, symbolische und sprachliche) miteinander vernetzt (Prediger & Wessel, 2013). Insgesamt wurden 24 Kinder der dritten Klasse jeweils in Paaren gefördert.

Einblick in Zyklus 1

An dieser Stelle soll zunächst ein Einblick in die Ergebnisse aus Zyklus 1 gegeben werden. Zentrale Forschungsfrage des ersten Zyklus war: Welche nicht tragfähigen Vorstellungen zum Distributivgesetz sind bei Grundschulkindern zu beobachten? Die Analysen zeigten, dass die Kinder überwiegend auf – teilweise fehlerhafte – Oberflächenmerkmalen fokussierten, wenn sie erklären sollten, wann und wie Terme zusammengefasst werden können. Dabei haben sich folgende nicht tragfähige Vorstellungen gezeigt (Tabelle 1):

Nicht tragfähige Vorstellung	*Paraphrasiertes Beispiel*
Beliebige Terme können beliebig (additiv) zusammengefasst werden (DG gar nicht anwendbar)	$4 \cdot 1$ und $8 \cdot 2$ können zusammengefasst werden, weil 8 und 4 addiert und 1 und 2 zusammen 12 ergeben
Die Faktoren können beliebig zusammengefasst werden (DG grundsätzlich anwendbar)	Bei $3 \cdot 2$ und $3 \cdot 8$ bleibt die 3, dann wird 2 zur 3 addiert, somit ergibt das $5 \cdot 8$
Beide Faktoren beider Terme werden additiv zusammengefasst (DG grundsätzlich anwendbar)	$3 \cdot 2$ und $3 \cdot 8$ ergeben $6 \cdot 10$, denn 3 und 3 sind 6 und 2 und 8 sind 10.
Terme können nur zusammengefasst werden, wenn sich die nicht gleichen Faktoren zu 10 ergänzen	$9 \cdot 1$ und $9 \cdot 4$ können nicht zusammengefasst werden, weil 4 und 1 nicht 10 ergeben

Tab. 1: Nicht tragfähige Vorstellungen von Grundschulkindern zum Distributivgesetz

Zusätzlich konnte bei einigen Lernenden festgestellt werden, dass sie zwar passend zusammenfassen, jedoch keine inhaltliche Vorstellung aufbauen konnten, warum die beiden gleichen Faktoren nicht addiert werden. Sie gehen beispielsweise regelgeleitet vor („Weil man hier nicht plus rechnen darf") oder können keine Erklärung finden, wie beispielsweise Adriano, der erklärt, warum $7 \cdot 5$ und $3 \cdot 5$ zusammen $10 \cdot 5$ und nicht $10 \cdot 10$ ergeben:

A Weil da sind dann keine 10 mal 10, dann brauchen wir eine 5, die 5 (zeigt auf die 5 in $3 \cdot 5$) muss dann glaube ich (..), nee die versteckt sich.

Er fasst hier zwar passend zusammen und weiß, dass es falsch wäre, beide Faktoren zu addieren. Er kann dieses Vorgehen aber nicht inhaltlich erklären. Aus diesem Zyklus wurde daher die Konsequenz gezogen, dass der Fokus in der Förderung noch mehr auf das Zusammenfassen von Mengen und *vor allem der Versprachlichung* dessen gelegt werden muss.

Einblick in Zyklus 2

In Zyklus 2 stand daher die Versprachlichung distributiver Zusammenhänge im Fokus. Zentrale Forschungsfrage war: Inwiefern können Vorstellungen zum Distributivgesetz in der Grundschule sprachsensibel gefördert werden?

Die Datenanalyse hat gezeigt, dass ein Verständnis für das Zusammenfassen aber auch Zerlegen von Termen davon abzuhängen scheint, ob und inwiefern die Kinder möglichst flexibel versprachlichen können, dass sie entweder *gleich viele Gruppen* aber auch *Gruppen gleicher Größe* zusammenfassen. Dieses Denken in Gruppen gleicher Anzahl oder Gruppen gleicher Größe macht die Kinder anscheinend zu flexiblen Multiplizieren (Götze, 2019) und fördert damit zeitgleich ein tiefes Verständnis für das Distributivgesetz.

Dies zeigen die folgenden kurzen Einblicke in die Vorstellungen von zwei Lernenden, die im Zuge der Förderung gelernt haben, in multiplikativen Gruppen zu denken.

So beschreibt Ahmad den Zusammenhang zwischen $8 \cdot 4$ und $8 \cdot 7$ wie folgt:

Ah Das sind ja gleiche, die beiden (*zeigt jeweils auf die 8 in beiden Termen*) sind ja in der gleichen Reihe, da (*zeigt auf den Term 8 · 7*) sind nur drei 7, nein drei 8er-Gruppen mehr.

Es wird nicht klar, inwiefern er auf die Reihe als Einmaleinsreihe (Achterreihe) oder auf die Verbildlichung im Punktebild (Reihe als Zeile im Rechteckbild) verweist. Er versprachlicht jedoch passend den Zusammenhang zwischen den beiden Termen, wobei er die Kommutativität ausnutzt. Es deutet sich also an, dass er beginnt, die Sprache der Gruppen zu seiner Denksprache zu machen. Wie wichtig diese Denksprache zum Vorstellungsaufbau zu sein scheint, zeigt auch das Beispiel von Mehmed, der begründet, warum er $9 \cdot 1$ und $9 \cdot 4$ zusammenfassen kann:

M Weil diese Zahlen (*zeigt jeweils auf die 9 in beiden Termen*), es sind ja, wären hier Punktebilder (*zeigt auf den Tisch*), wären das gleich viele Gruppen.

Er benötigt hier nicht die konkreten Punktebilder, sondern kann die Beziehung der Terme durch die geförderten Sprachmittel zum Ausdruck bringen.

Fazit und Ausblick

Der empirische Einblick deutet an, dass die Sprache der und damit das Denken in multiplikativen Gruppen für ein Verständnis des Distributivgesetzes eine hohe Relevanz hat. Erste Analysen der Daten aus dem zweiten Zyklus haben jedoch auch gezeigt, dass ohne ein Multiplikationsverständnis als Vervielfachung gleich großer Gruppen auch distributive Zusammenhänge nicht verstanden werden können. Deshalb soll ein dritter Zyklus mehr Klarheit liefern. Dazu soll in mehreren zweiten Schuljahren die Multiplikation bedeutungsbezogen (Prediger & Wessel, 2013) mit der Sprache der Gruppierung eingeführt werden, um dann zu untersuchen, inwiefern sich die Hypothese der Bedeutsamkeit der bedeutungsbezogenen Sprache der Multiplikation beim Verständnis von distributiven Zusammenhängen bestätigen lässt.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, L. P. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth NH: Heinemann.

Downton, A. & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 303–328.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten*. Seelze: Kallmeyer-Klett.

Götze, D. (2019). *The importance of a meaning-related language for understanding multiplication* (Accepted paper). Utrecht: CERME 2019.

Kinzer, C. & Stanford, T. (2014). The Distributive Property: The Core of Multiplication. *Teaching Children Mathematics, 20*(5), 302–309.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr.* Berlin: Springer Spektrum.

Schüler-Meyer, A. (2017). Students' development of structure sense for the distributive law. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 17–32.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien*. Bern: Haupt.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German language learners' constructions of meanings for fractions – Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal, 25*(3), 435–456.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht*, 65(8), 452–457.