Der pH-Wert-Verlauf aus der Sichtweise der Chemie und der Mathematik - Ein fächerverbindender Unterrichtsvorschlag

Roland Bender

KONTEXT

Problem:

- Lernende haben Schwierigkeiten mit den mathematischen Hintergründen der Chemie [1, 2, 3]
- In Chemieschulbüchern werden die mathematischen Hintergründe oftmals nur oberflächlich thematisiert (z. B. [4])
- Im Kernlehrplan NRW Chemie wird Mathematik kaum erwähnt [5]

Exemplarisches Beispiel:

- Säure-Base-Titration und der zugehörige „Funktionsgraph" (s. Abb. rechts) zum pH-Wert-Verlauf
- pH-Wert-Verlauf wird in der Oberstufe experimentell nachgewiesen und ausschließlich chemisch betrachtet [5]
- Erklärung des Verlaufs kann nur unter Zuhilfenahme der Logarithmusfunktion verstanden werden

Nutzen aus Sicht der Mathematik:

- Es handelt sich um ein authentisches Problem, das nicht didaktisch reduziert werden muss und somit realitätsgetreu bleibt
- Relevanz des Logarithmus wird verdeutlicht sowie der Umgang damit gefördert

ZIEL DES FORSCHUNGSVORHABENS

- Konzipierung eines fächerverbindenden Unterrichts, der
  - ein tieferes Verständnis der chem. Inhalte ermöglicht, indem eine ergänzende Betrachtung der mathematischen Hintergründe zur Säure-Base-Titration erfolgt
  - den Mathematikunterricht mit realen Anwendungen aus der Chemie authentischer gestaltet und somit einen motivierenden Zugang zum Logarithmus schafft (z. B. [6])

BEGRIFFE UND DEFINITIONEN AUS DER CHEMIE

Begriff	Definition
Stoffmenge	n
Konzentration	$c := \frac{n}{V_{gesamt}}$
Anfangswerte c_0 und V_0	c, V zum Zeitpunkt $t = 0$
Säure	$0 < pH < 7$ bzw. $7 < pOH < 14$
Base	$7 < pH < 14$ bzw. $0 < pOH < 7$
pH-Wert	$-\log_{10}(c(H^+))$
pOH-Wert	$-\log_{10}(c(OH^-))$
Neutrale Lösung	$pH = 7 = pOH$

- 1 Säure-Teilchen liefert 1 H^+-Teilchen & 1 Base-Teilchen liefert 1 OH^--Teilchen
  $H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$
- D. h. gleiche Mengen an Säure & Base ergänzen sich zu einer neutralen Lösung

Ionenprodukt des Wassers:

- In jeder Lösung gilt:
  $c(H^+) \cdot c(OH^-) = 10^{-14} mol/l$
- D. h.: $pH + pOH = 14$

- **Eigendissoziation:** H_2O teilt sich in $H^+ + OH^-$ und trägt somit selbst gering zum H^+- bzw. OH^--Gehalt bei
- $H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$

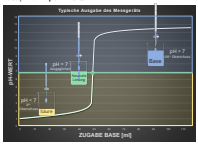
INHALTLICHER HINTERGRUND

Titration einer Säure mit einer Base:

- Quantitative chemische Umsetzung einer **Säure** mit einer **Base** bei Kenntnis der Konzentration der Base

Durchführung:

- Gegeben: Säurelösung mit beliebigem **pH-Wert**
- Tropfenweise Zugabe der Base mit definierter Konzentration
- Ermittlung der H^+- bzw. OH^--Konzentration zur Bestimmung des pH- bzw. **pOH-Werts**



Was ist der Logarithmus?

Definition: Für zwei positive reelle Zahlen a, b mit $a \neq 1$ nennt man diejenige Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten, den Logarithmus von b zur Basis a,
d. h. mit $a^x = b$ ist $x = \log_a(b)$.

Grundvorstellungen zum Logarithmus [7]:

1. Vorstellung des Enthaltenseins
   - Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a gibt an, wie oft (d. h. mit der entwickelten Potenz) der Faktor a in der Zahl b enthalten ist.
2. Vorstellung des Gegenspielers
   - Logarithmen sind – bzgl. der Exponenten – Gegenspieler von Potenzen.
3. Vorstellung des Herabsetzens
   - Der Logarithmus führt eine multiplikative in eine additive Struktur über.

Hauptschwierigkeiten beim Logarithmus [7]:

- Begriff nicht selbsterklärend
- Schreibweise
- Inverse Begriffsbildung

Mathematischer Hintergrund der Titrationskurve anhand eines Beispiels:

- **Z. B. vorgegebene Säure mit pH-Wert 1 in 50 ml Wasser gelöst:** $c(H^+) = 10^{-1}$ $mmol/ml$, d. h. $n(H^+) = 5$ $mmol$
- **Hinzugegebene Base mit pOH-Wert 1:** $c(OH^-) = 10^{-1}$ $mmol/ml$, d. h. pro 10 ml Base kommt 1 $mmol$ OH^- hinzu

n = Zugabe Base [ml]	Zugabe OH⁻ [mmol]	$n(H^+)$ + n OH⁻ [mmol]	$n(H^+)$ − n OH⁻ [mmol]	$c(H^+)$ [mol/l]	pH-Wert [mol/l]	$c(OH^-)$ = $\frac{n}{V_{gesamt}}$ [mol/l]	$c(OH^-)$ [mol/l]	pOH-Wert [mol/l]
0	0	50	5	10^{-1}	1	...	...	...
10	1	60	4	$\frac{4}{60} = 10^{-1,18}$	1,18	...	...	...
20	2	70	3	$\frac{3}{70} = 10^{-1,37}$	1,37	...	...	...
30	3	80	2	$10^{-1,6}$	1,6	...	...	...
40	4	90	1	$10^{-1,95}$	1,95	...	...	...
50	5	100	0?	0?	Error?	0?	0?	Error?
50	5	100	10^{-12}	10^{-7}	7	10^{-12}	10^{-7}	7
60	6	110	...	...	11,76	1	$10^{-2,95}$	2,84
70	7	120	...	...	12,22	2	$10^{-2,78}$	1,78
Usw.	...	...	...	...	...	...	...	...

Eigendissoziation von H_2O kann hier vernachlässigt werden

KONFLIKT:

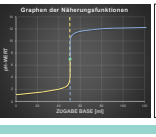
- Säure und Base haben sich gegenseitig neutralisiert
- Also ist eigentlich kein H^+- oder OH^- vorhanden
- **Aber:** Messgerät *zeigt an:* $pH > 7$

ERKLÄRUNG:

- Es verbleibt eine Restmenge an H^+- & OH^--ausschließlich durch die Eigendissoziation von H_2O

Im blauen Bereich herrscht nun **beim** H^+-Überschuss mehr, sodass der pH-Wert nur über die OH^--Konzentration mithilfe des Ionenprodukts bestimmt werden kann

Mittelte das pOH-Werte berechnet: $pH = 14 - pOH$



Näherungsfunktion für den pH-Wert-Verlauf:

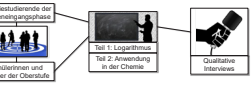
Jeder Menge x an zugegebener Base wird ein pH-Wert zugeordnet.

$$pH\colon \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0;14],$$

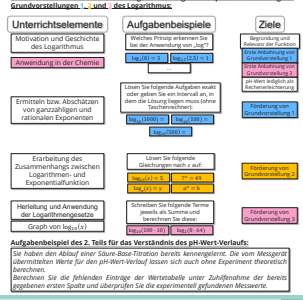
$$x \mapsto \begin{cases} -\log\left(\frac{\left[c_0(Säure)\cdot V_0 - c_0(Lauge)\cdot x\right]}{V_0 + x}\right) & \text{für } 0 \leq x < V_0 \\ \frac{7}{} & \text{für } x = V_0 \\ 14 + \log\left(\frac{\left[c_0(Säure)\cdot V_0 - c_0(Lauge)\cdot x\right]}{V_0 + x}\right) & \text{für } V_0 < x \end{cases}$$

UNTERRICHTSSKIZZE

Organisation des Unterrichts:



Unterrichtsablauf des 1. Teils und ausgewählte Aufgabenbeispiele zur Förderung der Grundvorstellungen 1, 2 und 3 des Logarithmus:



Aufgabenbeispiel des 2. Teils für das Verständnis des pH-Wert-Verlaufs:

Sie haben den Ablauf einer Säure-Base-Titration bereits kennengelernt. Die vom Messgerät übermittelten Werte für den pH-Wert-Verlauf lassen sich auch ohne Experiment theoretisch berechnen.
Berechnen Sie die fehlenden Einträge der Wertetabelle unter Zuhilfenahme der bereits gegebenen ersten Spalte und überprüfen Sie die experimentell gefundenen Messwerte.

LITERATUR

[1] Sheet, D.; Hyster, K. (1991). Mathematik für das Lehramt Chemie. In: CHEMIKDIDAKTIK, S. 118–125.
[2] Schwedes, H. (1992). Mathematik im Chemieunterricht. In: Chemie in der Schule, Jg. 39, H. 1, S. 16–19.
[3] Kraus, I.; & Eurefeld, E. (2010). Chemieaufgaben – Mathematikanwendung als entwicklungsfördernd gestaltet. In: Maxim, C. (Hrsg). Authentität und Lernen – das Fach in der Fachdidaktik. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Band 3. Hildesheim: Verlag Franzbecker, S. 153–163.
[4] Kaufmann, W. (2015). Chemieschule 09. Neuausstattung. Schroedel.
[5] MSW. Ministerium für Schule und Weiterbildung. Kernlehrplan Chemie, erstellt gemäß ab 22.02.2013.
[6] Ziegler, M. (2011). Mathematik im Chemieunterricht. Eine Untersuchung zur Wirksamkeit von Mathematik im Unterricht. Band 5.
[7] Weber, C. (2012). Grundvorstellungen von Logarithmus. – Beurteilt für einen verständlichen Unterricht. In: Allgemeiner Teil. In: Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 79 – 98.

Kontakt

Universität Paderborn
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
Mail: Rbender1@math.upb.de

Projektpartner*in

Thomas Witte
Mathias Hattermann
Sabine Fechner

UNIVERSITÄT PADERBORN

A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. Münster: WTM-Verlag.
Seite 1388