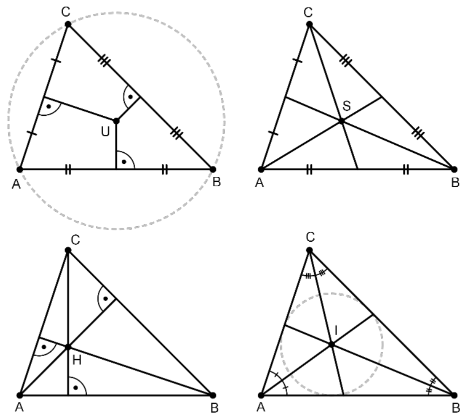
Stephan BERENDONK, Essen

Die Euler-Gerade als Serendipitätsfund

Der folgende Beitrag inszeniert einen Teil von Leonhard Eulers Artikel „Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficilimorum", zu Deutsch: Leichte Lösung gewisser sehr schwieriger geometrischer Aufgaben. Euler bespricht in seinem Artikel die folgende Aufgabe:

Aufgabe: Rekonstruiere die Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC, sofern möglich, aus den vier klassischen merkwürdigen Punkten des Dreiecks, dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und Umkreismittelpunkt U, dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und Schwerpunkt S, dem Schnittpunkt der Höhen H und dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und Inkreismittelpunkt I.



Die Aufgabe fordert also, dass man die Seiten a, b und c des Dreiecks als Funktionen der sechs Abstände US, UH, UI, SH, SI und HI, die durch die vier merkwürdigen Punkte gegeben sind, bestimmt. Eulers Lösung ist typisch algebraisch, denn er manövriert zunächst genau in die entgegengesetzte Richtung, d.h. er versucht die sechs Abstände mit Hilfe der Seitenlängen a, b und c auszudrücken. Nachdem er dies bewerkstelligt hat, zeigt er, wie man die sechs Gleichungen nach a, b und c auflösen kann. Er löst die Gleichungen jedoch nicht direkt nach a, b und c auf, sondern zunächst nach den elementarsymmetrischen Polynomen $p := a + b + c$, $q := ab + ac + bc$ und $r := abc$. Die gesuchten Seitenlängen a, b und c ergeben sich dann aus p, q und r durch Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Um also zunächst die Abstände zwischen den merkwürdigen Punkten als Funktionen der Seitenlängen a, b und c zu bestimmen, legt Euler, wenn man so will, das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem, sodass A den Ursprung des Systems bildet und B auf der pos. x-Achse liegt. Sodann bestimmt er die Koordinaten von U, S, H und I in Abhängigkeit von a, b und c, um schließlich mit Hilfe des Pythagoras die gesuchten Abstände zu bestimmen. Bei der Bestimmung der Koordinaten erweist sich für Euler neben dem Kosinussatz ($Kosinus$)

die Heronsche Formel ($Heron$) für den Flächeninhalt des Dreiecks als äußerst nützlich, da sie ebendiesen Flächeninhalt einzig mit Hilfe der Seitenlängen a, b und c des Dreiecks auszudrücken weiß.

Heronsche Formel:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Bestimmung der Koordinaten von *U*:

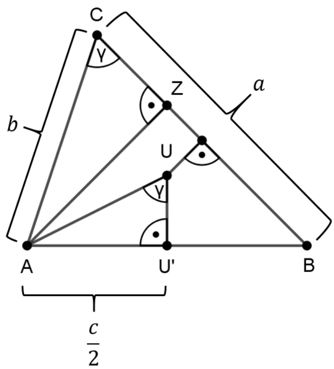
Sei U' der Lotfußpunkt des Lotes von U auf AB und Z der Lotfußpunkt des Lotes von A auf BC. Aus der Tatsache, dass U Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist und der Tatsache, dass ein Mittelpunktswinkel doppelt so groß ist, wie die zugehörigen Umfangswinkel, folgt, dass $\angle AUU' = \angle ACZ$. Daher sind die Dreiecke AUU' und AZC ähnlich zueinander, woraus wegen

$$F = \frac{a \cdot AZ}{2}$$

folgt: $$\frac{UU'}{AU'} = \frac{CZ}{AZ} = \frac{b \cdot \cos(\gamma)}{2F/a}$$

Also: $$UU' = \frac{c}{2} \cdot \frac{ab\cos(\gamma)}{2F} = \frac{c}{8F} \cdot 2ab\cos(\gamma)$$

$$\overset{Kosinus}{\triangleq} \frac{c}{8F} \cdot (a^2 + b^2 - c^2)$$



Die Koordinaten von U lauten wie folgt:

$$U = (\frac{c}{2}, \frac{c}{8F} \cdot (a^2 + b^2 - c^2))$$

Bestimmung der Koordinaten von *S*:

Sei S' der Lotfußpunkt des Lotes von S auf AB. Sei H' der Lotfußpunkt des Lotes von C auf AB. Sei M die Mitte von BC. Sei N das Spiegelbild von A nach Spiegelung an M und N' der Lotfußpunkt des Lotes von N auf AB. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AS'S$ und $AN'N$ und der Teilungseigenschaft des Schwerpunkts S in Bezug auf die Seitenhalbierenden erhält man:

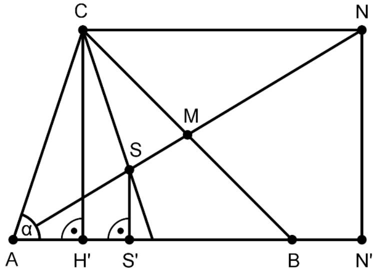
$$\frac{AS'}{AN'} = \frac{AS}{AN} = \frac{AS}{2 \cdot AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AS}{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Also gilt: $$AS' = \frac{1}{3} \cdot AN' = \frac{1}{3} \cdot (AH' + c) = \frac{1}{3} \cdot (b\cos(\alpha) + c)$$

$$= \frac{1}{6c} \cdot (2bc\cos(\alpha) + 2c^2)$$

$$\overset{Kosinus}{\cong} \frac{1}{6c} \cdot (b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2)$$

$$= \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}$$



Zudem gilt: $SS' = \frac{1}{3} \cdot CH' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2F}{c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{F}{c}$

Die Koordinaten von S lauten somit wie folgt:

$$S = \left(\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}, \frac{2}{3} \cdot \frac{F}{c}\right)$$

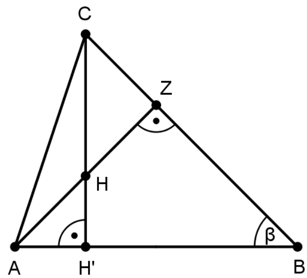
Bestimmung der Koordinaten von H:

Sei noch stets Z der Lotfußpunkt des Lotes von A auf BC und H‘ der Lotfußpunkt des Lotes von C auf AB. Dann gilt zum einen:

$$AH' = b\cos(\alpha) = \frac{2bc\cos(\alpha)}{2c} \overset{Kosinus}{\cong} \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

Wegen $\angle H'AH = \angle BAZ$ sind die rechtwinkligen Dreiecke $AH'H$ und AZB ähnlich zueinander.

Daher gilt: $\frac{AZ}{BZ} = \frac{AH'}{HH'}$



Also: $$HH' = AH' \cdot \frac{BZ}{AZ} = AH' \cdot \frac{c\cos(\beta)}{\frac{2F}{a}}$$

$$= AH' \cdot \frac{2ac\cos(\beta)}{4F}$$

$$\overset{Kosinus}{\cong} \frac{AH'}{4F} \cdot (a^2 + c^2 - b^2)$$

$$= \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cF}$$

Die Koordinaten von H lauten somit wie folgt:

$$H = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cF}\right)$$

Bestimmung der Abstände:

Es fehlen noch die Koordinaten von I. Mit den bisher bestimmten Koordinaten lassen sich unter Verwendung des Pythagoras jedoch schon drei der sechs angestrebten Abstände bestimmen. Man gewinnt US, SH und UH nämlich mit Hilfe der folgenden Formeln:

$$US = \sqrt{(AS' - AU')^2 + (S'S - U'U)^2},$$
$$SH = \sqrt{(AH' - AS')^2 + (H'H - S'S)^2},$$
$$UH = \sqrt{(AH' - AU')^2 + (H'H - U'U)^2}.$$

Dazu bestimmt Euler zunächst die von den Formeln erbetenen Differenzen:

$$AS' - AU' = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} - \frac{3c^2}{6c} = \boxed{\frac{b^2-a^2}{6c}}$$

$$S'S - U'U = \frac{2F}{3c} - \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8F} = \frac{16F^2-3c^2(a^2+b^2-c^2)}{24Fc} \overset{Heron}{\hat{=}} \ldots = \boxed{\frac{2c^4-a^4-b^4+2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{24Fc}}$$

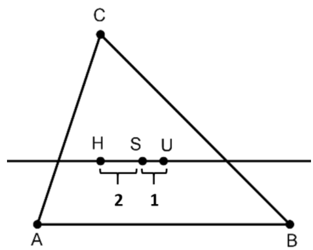
$$AH' - AS' = \frac{3b^2+3c^2-3a^2}{6c} - \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} = \frac{2b^2-2a^2}{6c} = \mathbf{2} \cdot \boxed{\frac{b^2-a^2}{6c}}$$

$$H'H - S'S = \frac{3(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{24Fc} - \frac{16F^2}{24Fc} \overset{Heron}{\hat{=}} \ldots = \mathbf{2} \cdot \boxed{\frac{2c^4-a^4-b^4+2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{24Fc}}$$

$$AH' - AU' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} - \frac{c^2}{2c} = \frac{b^2-a^2}{2c} = \mathbf{3} \cdot \boxed{\frac{b^2-a^2}{6c}}$$

$$H'H - U'U = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8Fc} - \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{8Fc} = \cdots = \mathbf{3} \cdot \boxed{\frac{2c^4-a^4-b^4+2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{24Fc}}$$

Eine merkwürdige Gerade:



Auffällig ist, dass Euler, abgesehen von Vorfaktoren, stets bei denselben Ergebnissen landet! Die Rechnungen weisen ihn auf eine interessante Tatsache hin: In jedem Dreieck ist der Abstand zwischen Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt genau doppelt so groß wie der Abstand zwischen Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt. Zudem ist der Abstand zwischen Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt dreimal so groß wie der Abstand zwischen Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt. Die Punkte U, S und H bilden somit ein Dreieck deren Seitenlängen sich wie $1:2:3$ verhalten. Das widerspricht jedoch der Dreiecksungleichung. Euler ist damit auf eine merkwürdige Gerade im Dreieck gestoßen, eine Gerade, die die Punkte U, S und H enthält.

Aus entdeckungstheoretischer Sicht ist bemerkenswert, dass Eulers geometrischer Fund offenbar nicht zunächst auf empirischer Beobachtung am gezeichneten Dreieck, sondern direkt auf einer algebraisch-symbolischen Beobachtung beruht. Hervorzuheben ist ferner der unvorhergesehene, wenngleich von Wissen statt Glück getragene, Charakter der Entdeckung. Euler war schließlich gar nicht auf der Suche nach merkwürdigen Geraden.