Ann Sophie STUHLMANN, Hamburg

Kooperative Beweisprozesse von Mathematiklehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase

Ausgangspunkt für das hier dargestellte Forschungsvorhaben ist die wohlbekannte Problematik des Studieneinstiegs im Mathematiklehramtsstudium. Die Abbrecherquoten in der Studieneinstiegsphase sind im Vergleich zu anderen Studiengängen extrem hoch (Dieter et al, 2008). Insbesondere selbstständige Beweiskonstruktionen, die ab Studienbeginn zentrale Aktivitäten darstellen, sind erfahrungsgemäß mit großen Schwierigkeiten für die Lehramtsstudierenden verbunden (Moore, 1994). Im Mathematikstudium ist die gemeinsame Arbeit an den Beweisaufgaben in selbstorganisierten Kleingruppen üblich und wird meist vom Dozenten oder der Dozentin gefördert. Im hier dargestellten Forschungsvorhaben wird untersucht, wie kooperative Beweisprozesse von den Studierenden gestaltet werden und welches Potenzial die Kleingruppenarbeit für das Erlernen des Beweisens in der Studieneingangsphase mit sich bringt. Dabei wird eine interaktionistische Perspektive auf die studentische Gruppenarbeit eingenommen, nach der Lernen in den Aushandlungsprozessen der Studierenden entsteht. Soziale Bedingungen werden in dieser Perspektive als konstitutiv für den Lernprozess angesehen. Mathematikdidaktische Untersuchungen, die sich mit Beweisprozessen auf Tertiärniveau beschäftigten, fokussierten bisher fast ausschließlich auf kognitive bzw. affektive individuelle Faktoren (z.B. Reiss & Ufer 2009). Die hier dargestellte Studie soll die bisherigen psychologisch orientierten Forschungsansätze um eine interaktionistische Perspektive auf das Beweislernen in der Studieneingangsphase ergänzen. Im Rahmen dieses Beitrags wird die Herstellung von Rahmungsdifferenzen in kooperativen Beweisprozessen von Mathematiklehramtsstudierenden thematisiert. Unter Rahmungsdifferenzen werden Interaktionssituationen gefasst, die durch grundsätzliche verschiedene Deutungsaktivitäten der Beteiligten charakterisiert sind. Anhand zweier kurzer Interaktionssituationen wird das Potenzial dargestellt, das Rahmungsdifferenzen für die thematische Entwicklung der kooperativen Beweisprozesse haben können, und vor dem Hintergrund einer interaktionistischen Lerntheorie reflektiert.

Methodologische Verortung und methodisches Vorgehen

Die Datenerhebung fand im Rahmen von zusätzlichen Unterstützungsangeboten für Mathematiklehramtsstudierende im ersten Studienjahr an der Universität Hamburg statt. Bei diesen Angeboten handelte es sich um freiwillige Veranstaltungen begleitend zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische

Geometrie, in denen die Studierenden selbstständig in Kleingruppen an den wöchentlichen Übungsaufgaben arbeiteten. Durchschnittlich nahmen 15 Studierende an den Veranstaltungen teil. Während der Veranstaltung wurden Audioaufnahmen von den Beweisprozessen und Bildaufnahmen ihrer Notizen angefertigt. Die Datenerhebung erfolgte in möglichst „alltäglichen" Lernsituationen. So wurde weder auf die Gruppenkonstellationen noch auf die Inhalte der Beweisaufgaben Einfluss genommen. Transkripte der Audioaufnahmen stellen die Grundlage für die Auswertung dar und werden interaktionsanalytisch interpretiert. Das methodische Vorgehen der Interaktionsanalyse geht auf Arbeiten von Bauersfeld und Krummheuer zurück und wurde zur Untersuchung von Interaktionen im Mathematikunterricht entwickelt (Krummheuer & Naujok, 1999). Grundlegend für diesen Ansatz ist eine Perspektive auf Mathematikunterricht, die davon ausgeht, dass der fachliche Inhalt in Unterrichtsinteraktionen von allen Beteiligten erzeugt wird. Er wird nicht als etwas Festgelegtes verstanden, was von einer Person an eine andere weitergegeben wird. Vielmehr emergiert er im Wechselprozess von aufeinander bezogenen Äußerungen in der Interaktion.

Rahmungsdifferenzen in kooperativen Beweisprozessen

Rahmungen beschreiben im Anschluss an Goffman (1974) Stabilisierungen von subjektiven Deutungen in Interaktionsprozessen. Sie gehen auf die Konventionalisierung bestimmter Interaktionssituationen zurück und werden aufgrund bestimmter kommunikativer Signale routiniert hergestellt. Unter der Voraussetzung unterschiedlicher Rahmungen von Studierenden einer Kleingruppenarbeit sind Verständigungsprozesse, die einen Fortgang der Interaktion ermöglichen, schwer herzustellen. Aus interaktionistisch-lerntheoretischer Sicht stellt die Hervorbringung solcher Verständigungsprozesse aber gerade die sozialen Bedingungen der Möglichkeit des Lernens dar, da sie kognitive Konstruktionsprozesse der Beteiligten orientieren können (Krummheuer, 1992). Dies soll an zwei Interaktionssituationen aus studentischen Kleingruppenarbeiten dargestellt werden. Der erste Ausschnitt stammt aus einer Kleingruppenarbeit dreier Studierender, die beweisen sollen, dass zwei Vektorräume V und $\tilde{V}$ die gleichen Endomorphismen haben. Die beiden zu betrachtenden Vektorräume haben die gleichen Elemente, aber unterscheiden sich in ihren Verknüpfungen.

1	Alex	jetzt müssen wir nur gucken, müssen wir nur zeigen, dass sie durch f auf dieselben elemente wieder abgebildet werden.
2	Doro	aber mhm (3) werden sie das überhaupt? es muss ja nicht.
3	Alex	doch das müssen sie. zwei endomorphismen sind genau dann gleich, wenn sie jedes element auf dasselbe element abbilden.

4	Doro	aber es muss ja nicht. sozusagen dieses f muss ja nicht genau das gleiche element sein wie hier drinne, sondern du kannst sie ja so über kreuz machen, äh, indem du konjugierst. also, äh, es soll ja nur die menge gleich sein.
5	Erik	ja.
6	Doro	nein es soll aber nicht jedes einzelne.
7	Alex	aber die endomorphismen die endomorphismen sollen gleich sein. die sollen nicht irgendwie es soll nicht zwei verwandte geben, sondern sie sollen gleich sein.

Tab.: Transkript zur Gleichheit von Endomorphismenmengen

In der vorausgehenden Interaktion wird deutlich, dass die Studierenden die Überzeugung teilen, dass eine Mengengleichheit bewiesen werden müsse. Alex leitet hieraus das typische Verfahren zum Beweis von Mengengleichheit ab, nämlich dass zu zeigen sei, dass es zu einem beliebigen Endomorphismus f auf dem Vektorraum V einen Endomorphismus $\tilde{f}$ auf dem Vektorraum $\tilde{V}$ gibt, der mit f übereinstimmt. Doro hingegen folgert, dass der einzelne Endomorphismus nicht betrachtet werden könne bzw. müsse, da nur die Mengen der Endomorphismen gleich sein sollen. Die Rahmungsdifferenz von Alex und Doro besteht in der Perspektive auf die Endomorphismenmengen und manifestiert sich in verschiedenen Beweisansätzen: Alex setzt innerhalb der Endomorphismenmengen bei einem beliebigen Endomorphismus an; Doro hingegen betrachtet die Endomorphismenmengen zusammengefasst von außerhalb. Im zweiten Ausschnitt entwickeln die Studierenden Ideen für den Beweis der Aussage, dass für jeden Endomorphismus φ auf einem endlich dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ genau ein adjungierter Endomorphismus φ^* existiert. Die Studierenden haben in der vorausgehenden Interaktion bereits überlegt, die Endomorphismen und Skalarprodukte mit Matrizen zu beschreiben:

$$v^T \cdot B^T \cdot G \cdot w = \langle \varphi^*(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w), \rangle = v^T \cdot G \cdot A \cdot w$$

1	Marie	müssen wir ja darauf hinaus, dass man vielleicht sagt, okay, wenn a phi beschreibt und b phi stern beschreibt, dass dann irgendein verhältnis zwischen b und a ist, oder? dass man darauf hinaus will? Zum Beispiel, was weiß ich, b ist gleich a transponiert, was wahrscheinlich nich so ist, aber/
2	Tabea	nein, b ist die adjungierte Matrix.
3	Marie	zu a? (..) was hast du eben gesagt, b ist die/ b ist die adjungierte Matrix zu a. ergibt sinn, wenn phi stern zu phi adjungiert ist.
4	Tabea	ja, aber du hattest irgendeinen anderen Punkt.
5	Marie	hatte ich? aber ist das sicher so, dass b zu a adjungiert ist?
6	Tabea	ja, das sollen wir ja zeigen, oder nicht?

Tab.: Transkript zu adjungierten Endomorphismen

Tabea geht davon aus, dass gezeigt werden müsse, dass die Darstellungsmatrix des zu φ adjungierten Endomorphismus gerade die Adjungierte zur Darstellungsmatrix von φ ist. Marie hingegen überlegt sich ausgehend von der Matrizendarstellung in der obigen Gleichung, dass die beiden Darstellungsmatrizen A und B in einem Verhältnis zueinanderständen bzw. dass die eine durch die andere dargestellt werden könne. Die Rahmungsdifferenz manifestiert sich wiederum in den verschiedenen Beweisansätzen. Während Marie ein konstruierendes Verfahren andeutet, kann in Tabeas Äußerungen ein prüfender Beweisansatz gelesen werden. Beide Rahmungsdifferenzen bergen das Potenzial zur Herstellung von Verständigungsprozessen, die bezogen auf Beweiskonstruktionen neue Bedeutungen hervorbringen, die über die Deutungsaktivitäten der Beteiligten hinausgehen. Aus interaktionistisch-lerntheoretischer Sicht stellt die Hervorbringung solcher Verständigungsprozesse die sozialen Bedingungen der Möglichkeit des Lernens dar (Krummheuer, 1992). Die Rahmungsdifferenz im ersten Fall kann einen Aushandlungsprozess zur Erklärung des typischen Verfahrens des Beweises einer Mengengleichheit auslösen. Auch im zweiten Fall hat die Rahmungsdifferenz das Potenzial, die Interaktion auf eine Metaebene zu heben, indem die Unterschiedlichkeit von einem prüfenden und einem konstruierenden Beweisverfahren thematisiert wird. Entscheidend für die Entfaltung des lerntheoretischen Potenzials von Rahmungsdifferenzen sind die entsprechenden Koordinierungs- bzw. Verständigungsprozesse der Beteiligten. Diese sollen in weiteren Analysen dahingehend untersucht werden, ob sie als Grundlage zur Entwicklung von Unterstützungsmaßnahmen für kooperative Beweisprozesse dienen können.

Literatur

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D. & Törner, G. (2008). Zahlen rund um das Mathematikstudium –Teil 3. *Mitteilungen der DMV, 16*(3), 176-182.

Goffman, E. (1974): *Frame analysis. An essay on the organisation of experience. Cambridge:* Harvard University Press.

Krummheuer, G. (1992): *Lernen mit „Format“. Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie.* Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999): *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Opladen: Leske + Budrich.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), 111*(4), 155–177.