

Blended Learning in der Studieneingangsphase Mathematik mit digitalen Aufgaben zu Themen der Linearen Algebra

1. Hintergrund

Studierende in stark mathematikhaltigen Studiengängen sehen sich an der Universität mit einer gegenüber ihren schulischen Vorerfahrungen veränderten Aufgabekultur konfrontiert. Die beobachtbare „Diskontinuität“ zwischen Schule und Hochschule auf der Ebene der Inhalte, der Ziele und der Argumentationen (Bauer & Partheil, 2009) drückt sich u. a. in anderen Betrachtungs- und Darstellungsweisen aus. Aus der hochschulüblichen abstrakten Art der Begriffsbildung und der deduktiven Beweisführung sowie dem höheren Grad der Formalisierung ergeben sich ganz neue Anforderungen bei der Bearbeitung der wöchentlichen Übungsaufgaben. Mathematische Erfahrungen mit Kalkülen und Verfahren, die Studierende in der Regel aus der gymnasialen Oberstufe mitbringen, tragen bei der Bearbeitung der Aufgaben nicht weit genug. Insbesondere erwachsen Hürden aus fehlenden inhaltlichen Vorstellungen und dem Verschwimmen einer formalen und einer inhaltlich-interpretierenden Ebene (Beutelspacher et al., 2011).

Zusätzliche digital bereitgestellte Aufgaben können das reguläre Übungsangebot für die Lernenden gewinnbringend ergänzen, indem sie Möglichkeiten schaffen, prozedurale Aspekte stärker mit begrifflichen Aspekten zu verknüpfen und mit variierten Aufgaben Sicherheit zu gewinnen. In der Studieneingangsphase Mathematik vermissen Studierende vor allem Autonomie und Kompetenzerleben (Liebendörfer & Hochmuth, 2013). Digitale Aufgaben können potentiell (je nach Einsatzszenario in der Lehre) selbstgesteuert, in eigenem Tempo mit beliebig vielen Wiederholungen durchgearbeitet werden und liefern dabei direkt Rückmeldungen. Lernerfolge über mehrere Bearbeitungen hinweg oder positive Rückmeldungen auch zu länger zurückliegenden Themen ermöglichen eine Form des Kompetenzerlebens angesichts des schon Gelernten und stärken die Selbsteinschätzung.

2. Verortung im Projekt „Bildungsgerechtigkeit im Fokus“

Die hier beschriebenen Entwicklungsforschungsarbeiten werden im Teilprojekt „Blended Learning“ des Projekts „Bildungsgerechtigkeit im Fokus“ (2016-2020) der Universität Duisburg-Essen geleistet, das Rahmenbedingungen schaffen soll, um Studienabbrüche verhindern und die heterogenen Potenziale der Studierenden fördern zu können. Ein Ziel des genannten Teilprojekts besteht in der Kompetenzmodellierung in einem Bereich der Linearen Algebra, die am Standort Essen von Lehramts- und Fachstudierenden

ab dem ersten Semester gehört wird. Durch ein bereichsspezifisches, theoretisch begründetes und empirisch abgesichertes Kompetenzmodell soll eine Orientierung für Lernende und Lehrende geschaffen werden.

Teilziele auf dem Weg zur Kompetenzmodellierung sind die Implementierung geeigneter Aufgaben im E-Assessmentsystem JACK (Kurt-Karaoglu & Hintze, 2014), die in thematisch passenden Modulen gebündelt werden, sowie die Entwicklung und Erprobung von Einsatzszenarien in der Lehre. Parallel dazu findet die Abstimmung und Beratung mit dem JACK-Entwicklerteam zu Aufgabenformaten, Eingabemöglichkeiten und Auswertungsregeln statt. Im Projektverlauf hat sich die Integration des Angebots in die traditionelle Veranstaltungsstruktur als Herausforderung erwiesen. Über die vergangenen Semester wurden entsprechende Erfahrungen im Bereich der Kooperation gesammelt und verschiedene Einsatzszenarien erprobt.

3. Aufgabenkonstruktion

Für die geplante Kompetenzmodellierung wurde aufgrund ihrer weiten Verbreitung die Lineare Algebra ausgewählt. Einschlägige Inhalte sind curricular in den Fach- und Lehramtsstudiengängen der Fakultät für Mathematik sowie in den mathematischen Veranstaltungen der Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften und der Informatik verankert. In einem ersten Schritt wurden drei thematische Bausteine aus dem gemeinsamen fachlichen Kern der Vorlesungen ausgewählt: *Grundlagen der Vektorraumtheorie* (Vektorräume, lineare Unabhängigkeit, Basis), *lineare Gleichungssysteme* (Lösbarkeit, elementare Umformungen) sowie *Eigenwerte* (Eigenvektoren, Eigenräume). Insgesamt wurden rund 120 Aufgaben entwickelt.

Vorab wurden wesentliche Begriffe, Zusammenhänge (Sätze) und Verfahren identifiziert, um prozedurale, d. h. auf die Durchführung mathematischer Verfahren bezogene und begriffliche, d. h. auf die Verwendung mathematischer Zusammenhänge hin ausgerichtete Wissens Elemente (Neubrand et al., 2002) in den Aufgaben ausgewogen zu berücksichtigen. In den digitalen Aufgaben werden mit „Fill-In“ (Ergebnisse werden eingegeben) und „Single Choice List“ (aus vorgegebenen Antwortmöglichkeiten wird genau eine ausgewählt) zwei unterschiedliche Aufgabenformate verwendet.

Für Fill-In-Aufgaben, bei denen Lösungen durch ein Computer-Algebra-System auf Richtigkeit überprüft werden, spricht zum einen, dass bei entsprechend durchdachter Aufgabenstellung (so gut wie) keine Aussicht auf Erfolg durch Raten besteht. Zum anderen ist das Anwenden eines Ausschlussverfahrens anders als bei Choice-Aufgaben nicht möglich. Insgesamt entsprechen Fill-In-Aufgaben damit eher der mathematischen Aufgabenkultur der *konstruktiven Lösungssuche* als Choice-Aufgaben.

In der Umkehraufgabe in Abb. 1 sollen die Lernenden konstruktiv tätig werden; sie hat unendlich viele Lösungen. Die Lernenden sollen im Sinne intelligenten Übens beim Zugewinn an Flexibilität unterstützt werden.

Vervollständigen Sie das unten angegebene LGS so, dass das entstehende lineare Gleichungssystem die angegebene Lösungsmenge \mathcal{L} hat.

t ist der freie Parameter in der Lösungsmenge.

$x_1 +$ $x_2 =$

$x_1 +$ $x_2 =$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Abb. 1: Fill-In-Aufgabe zu LGS

Die Aufgabe in Abb. 2 verbindet prozessbezogene mit begrifflichen Aspekten. Die Lernenden vertiefen ihr Wissen über die Verknüpfung von linearen Abbildungen, nutzen Eigenschaften von linearen Abbildungen und werden dazu angehalten, über die Vollständigkeit ihrer angegebenen Menge zu reflektieren und diese vor sich zu begründen.

Sei $F : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, für die gilt $F^2 = F$.

Geben Sie die Menge E_F aller möglichen Eigenwerte von F an.

$E_F =$.

Abb. 2: Fill-In-Aufgabe zu Eigenwerten

In Abb. 3 wird ein Beispiel für den sinnvollen Einsatz von Choice-Aufgaben im Bereich begrifflicher Anforderungen dargestellt. Es sollen Zusammenhänge zwischen den Dimensionen bestimmter Untervektorräume eines beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraums beurteilt werden. Etwaige Gegenbeispiele lassen sich schon mit den aus der Schule vertrauten Untervektorräume des \mathbb{R}^3 finden. Derartige Single-Choice-Aufgaben bilden eine typische Anforderung bei begrifflich geprägten Übungsaufgaben ab; zumeist muss zunächst entschieden werden, ob eine gegebene Aussage wahr oder falsch ist, d. h., ob sie im Folgenden zu beweisen oder mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen ist.

Seien U und W Untervektorräume eines endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums V .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	wahr	falsch
$\dim(U \cap W) = \dim(U) - \dim(W)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\dim(U + W) \leq \dim(U) + \dim(W)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abb. 3: Single Choice List-Aufgabe zur Vektorraumtheorie

Würde hier ein Multiple-Choice-Format verwendet werden, bei dem von den vorgegebenen Aussagen genau die wahren ausgewählt werden müssen, wäre dies nur scheinbar gleichwertig. Ein fehlendes Kreuz könnte sowohl daraus entstehen, dass eine Aussage als falsch eingeschätzt wird, als auch daraus, dass die Aussage nicht abschließend bearbeitet wird, weil sie z. B. nicht eingeschätzt werden kann oder gar nicht verstanden wird. Beim realisierten Single-Choice-Format lassen sich diese Fälle jedoch unterscheiden, so dass das Antwortverhalten ergiebiger im Sinne der Kompetenzmodellierung ist.

4. Einsatzszenarien in der Lehre und Ausblick

Die digitalen Aufgaben können zu Übungs- oder Testzwecken verwendet werden. Dabei können sie bestimmte Aufgabentypen von Übungsblättern ersetzen oder als Ergänzung für individualisiertes Lernen eingesetzt werden. Verschiedene Einsatzszenarien werden durch unterschiedliche Formen der Feedbackgestaltung (Grad der Elaboriertheit und Inhalt des Feedbacks) und über Lösungshinweise aufgabenseitig unterstützt. Die Aufgaben werden bisher teilweise als ergänzendes Angebot eingesetzt, teilweise aber auch enger in das Veranstaltungskonzept eingebunden. Die Studierenden sehen die Aufgaben nach eigenen Angaben als Einstieg in das jeweilige Wochenthema. Sie nutzen die Aufgaben als Check-In, um ihre Fähigkeiten vor der Bearbeitung des Übungszettels selbst zu prüfen. Für das kommende Semester ist darüber hinaus ein „0.ter digitaler Übungszettel“ geplant, durch den die Studierenden der Linearen Algebra 2 eine Rückmeldung zu ihren Vorkenntnissen aus der vorangegangenen Linearen Algebra 1 erhalten.

Danksagung

Das Projekt „Bildungsgerechtigkeit im Fokus“ wird durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung im Qualitätspaket Lehre gefördert (FKZ 01PL16075).

Literatur

- Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung. *Mathematische Semesterberichte* 56, S.85-103.
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken – Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Kurt-Karaoglu, F. & Hintze, P. (2014). E-Assessment von Mathematikaufgaben mit JACK. In J. Tasic (Hrsg.), *Lehren, Lernen und Beraten auf Augenhöhe*, S.135-142.
- Liebondörfer, M. & Hochmuth, R. (2013). *Interest in Mathematics and the first Steps at University*. Proceedings of CERME 8, Ankara.
- Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O. & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft* 30 (2), S.100-119.