Marvin TITZ, Aachen

Bitte diskret behandeln: Nicht-kontinuierliche Aspekte der angewandten Mathematik

Der geringe Stellenwert der diskreten Mathematik im deutschen Mathematikunterricht wurde in den letzten Jahren an vielen Stellen thematisiert. Dabei wird diskrete Mathematik als Sammelbegriff für verschiedenste Berechnungen auf endlichen (oder abzählbar unendlichen) Mengen verwendet. Als typische Beispiele, die mit Schülern umsetzbar sind, werden meist Aufgaben aus der Kombinatorik oder der Graphentheorie verwendet.

Weniger beachtet werden die Übergänge zwischen kontinuierlichen und diskreten Problemstellungen sowie der Vergleich von diskreten und kontinuierlichen Modellen. Insbesondere aus der angewandten Mathematik auf Forschungsebene, in der numerische Berechnungen von zentraler Bedeutung sind, können viele realitätsbezogene Unterrichtsideen gewonnen werden. Oft ist in realen Anwendungen ein Wechsel zwischen den kontinuierlichen und diskreten Modellen ebenso notwendig wie eine Berücksichtigung von Diskretisierungsaspekten bei der Modellbildung. Vor diesem Hintergrund kann die fachdidaktische Diskussion um forschungsnahe Fragestellungen aus der Praxis erweitert werden:

- Welche Arten der Diskretisierung gibt es? (zeitlich/räumlich)
- Welches Diskretisierungsnetz ist sinnvoll?
- Warum liegen Daten kontinuierlich oder diskret vor?
- Welche Unterschiede sind bei (der Bearbeitung von) kontinuierlichen und diskreten Modellen zu beachten?

In diesem Beitrag soll das Verhältnis von diskreter und kontinuierlicher Mathematik sowie der Zwischenschritt der Diskretisierung aufgezeigt werden. Bevor zwei ausgewählte Beispiele aus der Praxis vorgestellt werden, soll der Blick in Richtung des derzeitigen Mathematikunterrichts gerichtet werden.

Stellenwert diskreter Berechnungen im Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht weit verbreitet, ist die Einführung des Ableitungsbegriffs über den Differenzenquotienten, welche nicht nur aufgrund der Ausbildung sinnvoller Grundvorstellungen an dieser Stelle keinesfalls in Frage gestellt werden soll. Allerdings kann im weiteren Unterrichtsverlauf bei SchülerInnen der Eindruck entstehen, dass der Differenzenquotient nur ein historisches Hilfsmittel ist, welches ohne aktuelle Bedeutung ist. Gestützt wird diese Annahme u. a. durch eine Beobachtung von Von Hofe (1998,

S. 262-263). Er hielt fest, dass bereits in einem Analysis-Grundkurs des 12. Jahrgangs erhebliche Defizite bei den Begriffen Differenzenquotient und Differentialquotient sichtbar werden, wenngleich die Bestimmung diverser Ableitungsfunktionen kein Problem darstellt.

Im Rahmen numerischer Berechnungen ist jedoch oft das Gegenteil der Fall: Kontinuierliche mathematische Modelle werden diskretisiert, um sie für Computerberechnungen zugänglich zu machen. So werden Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ oft durch Differenzenquotienten $\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$ ersetzt (vgl. Sonar, 2001, S. 23).

Diskrete Modelle haben häufig den Vorteil effizienterer Berechnungsmöglichkeiten. Viele kontinuierliche Problemstellungen verfügen über eine derartige Komplexität, dass sie ohne Rückgriff auf vereinfachte, diskrete Modelle praktisch unlösbar sind. Diskrete Näherungen reduzieren allerdings die Genauigkeit im Ergebnis durch zusätzliche Diskretisierungsfehler.

Im Sinne eines realistischen Bildes der Bedeutung von Differenzen- und Differentialqoutient plädiere ich für eine Thematisierung des Differenzenquotienten in Kontexten, die (mit Schulmathematik) analytisch nicht lösbar sind. So bieten sich Modelle mit Funktionen an, deren Ableitung für SchülerInnen nicht bekannt sind, wohl aber mit Hilfe des Differenzenquotieten über Tabellenkalkulationsprogramme oder numerische Taschenrechner bestimmt werden können.

Stets mit bedacht werden sollte, dass numerische Berechnungen auf dem Computer aufgrund technischer Gegebenheiten immer nur diskret durchgeführt werden können. Durch den verstärkten Einsatz von CAS, die auf Schulniveau symbolisches Rechnen ermöglichen, kann der Eindruck entstehen, dass symbolische Umformungen bedeutsamer sind als numerische Berechnungen. Dass die meisten Probleme der angewandten Mathematik numerisch und damit diskret gelöst werden, sollte SchülerInnen nicht vorenthalten werden.

Kontinuierliche Analysis als Hilfsmittel bei diskreten Problemen

Durch immer hochauflösendere Bild- und Video-Systeme genügt die Auflösung älterer Dateien nicht mehr den heutigen Standards. Während alte Videoaufnahmen auf VHS-Kassetten eine Auflösung von 768x576px haben, sind heutige UHD-Fernseher in der Lage 3800x2160px darzustellen. Damit alte Aufnahmen angemessen angezeigt werden können, sind Interpolationen notwendig.

Ausgangspunkt ist ein einzelnes Bild. Die Helligkeitswerte jedes einzelnen Pixels werden in einer Matrix abgespeichert. Ziel ist eine höhere Auflösung des Bildes. Diese diskreten Ausgangswerte sollen interpoliert werden, sodass eine kontinuierliche Darstellung in Form einer Vektorgrafik erstellt werden kann. Bei der Darstellung als Vektorgrafik werden anstelle von Bildpunkten Bildlinien z.B. in Form von Strecken, Kreisen oder Splines gespeichert. Eine technische Möglichkeit hierzu ist die Funktion „Bitmap nachzeichnen…" des kostenfreien Programms Inkscape (siehe Abb.). An diesem Beispiel sind Ungenauigkeiten zu sehen, die bei der Überführung von diskreten Daten in ein kontinuierliches Modell entstehen. Um das vergrößerte Bild anschließend wieder auf einem Bildschirm darzustellen, muss die kontinuierliche Darstellung wieder in Helligkeitswerte für die konkreten Pixel des Bildschirms übersetzt werden, sodass diskretisiert wird.

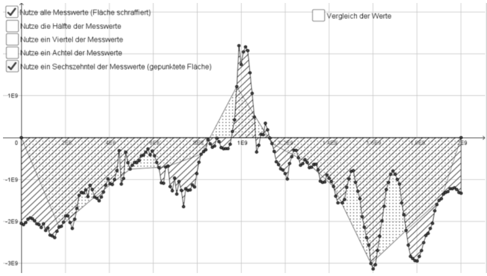
Diskretisierungsfehler bei Stromzählern und Beschleunigungssensoren

Eine zeitliche Diskretisierung ist in der Praxis oft unumgänglich, da Messdaten immer nur zu einzelnen Zeitpunkten aufgenommen werden können. Eine zentrale Herausforderung ist die Bestimmung des Messintervalls.

Ein Beispiel aus der aktuellen Forschung ist die Festlegung der zeitlichen Auflösung von Messwerten im Kontext von intelligenten Stromzählern. Ziel ist eine zeitnahe Rückmeldung des Energieverbrauchs sowie eine Anzeige der tatsächlichen Nutzungszeit. Stromversoger sollen anhand der Daten Tarife entwickeln, die eine Steuerung des Energieverbrauchs ermöglichen, um einen Beitrag zur Energiewende zu leisten. Einerseits sollen belastbare Daten entstehen, die eine genaue Abrechnung ermöglichen. Andererseits sollen nur so wenige Messungen wie möglich durchgeführt werden, um die anfallenden Daten zu reduzieren, die über das Mobilfunknetz an die Stromanbieter übermittelt werden müssen. Schließlich entstehen bereits bei einer Messung alle 15 Minuten ca. 35.000 Messpunkte pro Stromzähler im Jahr, die gespeichert, übermittelt und vor Manipulation gesichert werden müssen.

Um die zeitliche Auflösung von Messwerten mit SchülerInnen zu thematisieren, schlage ich die Auswertung eigener Messreihen vor: Mittels der App Phyphox können die Rohdaten des Beschleunigungssensors während einer Bewegung mit einer einstellbaren zeitlichen Auflösung gemessen, exportiert und in GeoGebra importiert werden. Die Integration der Beschleunigung a über die Zeit t liefert die Geschwindigkeit v ($v(t) = \int a(t)dt$), sodass die

Flächenbilanz der Messwerte dem Geschwindigkeitsunterschied des Handys zwischen Anfang und Ende der Messung entspricht. Zu welchem Ergebnis kommt man, wenn lediglich die Hälfte (ein Viertel, ein Sechszehntel) der Messwerte zu Verfügung stehen? Gibt es Bewegungsformen, die eine höhere oder niedrigere Auflösung benötigen? Diese Fragen können praktisch erkundet werden. Diese Fragestellungen stammen übrigens direkt aus der Praxis: Digitale Messgeräte ermitteln i.d.R. ebenfalls die Beschleunigung und nicht die Geschwindigkeit, da nur erstere unmittelbar auf Sensoren wirkende Kräfte verursacht. So ergibt sich die Notwendigkeit der numerischen Integration direkt aus dem Sachzusammenhang, da keine Funktionsvorschrift zur Verfügung steht, deren Stammfunktion berechnet werden kann.



	A	B
1	0	0
2	0	-2050000000
3	10100000	-2080000000
4	20200000	-2030000000
5	30300000	-1950000000
6	40400000	-1920000000
7	50500000	-1940000000
8	60600000	-1990000000
9	70800000	-2060000000
10	80900000	-2080000000
11	91000000	-2150000000
12	101000000	-2060000000
13	111000000	-2220000000
14	121000000	-2160000000
15	131000000	-2330000000
16	141000000	-2350000000
17	152000000	-2390000000
18	162000000	-2240000000
19	172000000	-2140000000

Zur Einordnung

Nicht nur im Fall der Diskretisierung können aus der angewandten Mathematik Impulse gewonnen werden, die sich zur Umsetzung in schulnahen Kontexten eignen. Eine Auseinandersetzung mit hochschulmathematischen Fragestellungen kann nicht nur in Form von außer-curricularen Angeboten zur Vervollständigung des Mathematikbildes beitragen. Die Ausführungen dieses Beitrags sind Teil eines Dissertationsprojekts zu den zentralen Ideen der numerischen Mathematik. Neben Diskretisierung werden dort Genauigkeit, Iteration und Effizienz zu den zentralen Ideen der Numerik gezählt.

Literatur

Bruder, R. & Weigand, H.-G. (2005). Problemlösen, Verstehen, Anwenden … aber bitte diskret! *Mathematik lehren* (129), 4–9.

Müller, K. J. (2010). Gewinnung von Verhaltensprofilen am intelligenten Stromzähler. *Datenschutz und Datensicherheit (6),* 359–364.

Sonar, T. (2001). *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Titz, M. (2018). Numerik – Angewandte Mathematik mit Schulrelevanz? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, 1799–1802.

Vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. *Journal für Mathematik-Didaktik 19 (4)*, 257–291.