

Daniel ULLRICH, Heidelberg

Wissen und Können im Bereich Funktionaler Zusammenhänge der Sekundarstufe. Ein summatives Referenzmodell für Diagnose- und Fördermaßnahmen am Übergang Schule-Hochschule

Auf der 52. GDM-Tagung wurde ein erster Entwurf eines summativen Referenzmodells für grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe im Bereich der Funktionen vorgelegt, welches als Instrument für die Konzeption von Diagnose- und Fördermaterial dienen soll (vgl. Ullrich, Schönwälder & Hamich, 2018). Die Bemühungen ein solches Modell zu erstellen sind weiter fortgeschritten. Im folgenden Beitrag wird der aktuelle Stand erörtert.

Die sogenannte Schnittstellendiskussion veranlasst zu einer Orientierung an Inhalten, wie sie etwa in Anforderungskatalogen, beispielsweise COSH, zum Vorschein kommt, gleichzeitig sollen die Erkenntnisse fachdidaktischer Forschung berücksichtigt werden als Voraussetzung für differenzierte Diagnose- und Fördermaterialien. Die derzeit aus fachdidaktischer Sicht wesentlichen Anforderungen im Bereich Funktionen sind einerseits durch sogenannte Grundvorstellungen, auch Aspekte, bestimmt (Vollrath, 1989). Darunter etwa „Kovariation“ zurückgehend auf Klein oder „Zuordnung“ als Ausdruck einer mengentheoretischen Grundlegung des Funktionsbegriffs während der sogenannten „Neuen Mathematik“, vgl. Krüger (2000). Andererseits gleichermaßen durch Repräsentationswechsel geprägt, sei es in Form von „treatment“, einem Wechsel innerhalb einer Repräsentation, oder in Form einer „conversion“, als Wechsel zwischen Repräsentationen (Duval 2006). Grundvorstellungen bzw. Repräsentationswechsel sind mittlerweile als wesentliche Merkmale aktueller Fähigkeits- und Kompetenzmodelle zu identifizieren, so etwa bei Nitsch (2015) oder Klinger (2018). Auch das in diesem Beitrag vorgestellte Modell berücksichtigt beide Merkmale, fasst allerdings über die erwähnten Grundvorstellungen und Repräsentationswechsel hinaus (möglichst) alle in der Fachdidaktik identifizierten und diskutierten Aspekte des Funktionsbegriffs und dem Umgang mit ihnen zusammen. Dabei stehen der Formulierung des Modells mehrere Setzungen voran, die sich aus den spezifischen Anforderungen des Einsatzes an der Schnittstelle ergeben: Das Modell versteht sich als eine summative Zusammenfassung der Anforderungen, formative Aspekte der Begriffsbildung zum Beispiel sind nicht erfasst. Auch folgt das Modell der Orientierung an Inhalten, die die Diskussion der Schnittstelle bestimmt, was die folgenden a priori Setzungen begründet:

- Die Inhaltsorientierung veranlasst, die wesentlichen Denkgegenstände des Bereichs zu identifizieren. Im Bereich Funktionale Zusammenhänge sind dies:
 - Variablen mit Fokus auf den Einzelzahl- und Veränderlichenaspekt (Malle, 1993)
 - Funktionen, und zwar in all ihren Repräsentationen (grafische, numerische, algebraische, verbal-situative)
- Der verständige Umgang mit diesen Denkgegenständen drückt sich in vier Ausprägungen des Wissens und Könnens aus. Die Genese der Ausprägungen kann in Pinkernell, Düsi & Vogel (2017) verfolgt werden. Es handelt sich um:
 - Wissen: deklaratives Wissen („Wissen, dass...“) (Anderson, 1996), sowie prototypisches Wissen (Rosch, 1983).
 - Strukturieren: sinnentnehmendes Lesen bereichsspezifischer Ausdrücke (perceptual and discursive apprehension, Duval, 1995; substitutitional equivalence, Musgrave, 2015).
 - Transformieren: Umformung bereichsspezifischer Ausdrücke (treatment Duval, 2006; tranformational equivalence, Musgrave, 2015) .
 - Interpretieren: kohärenter Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationen bzw. außermathematischen Kontextualisierungen desselben mathematischen Objekts (conversion, Duval, 2006)

Die Elemente des Inhaltsbereichs und die Ausprägungen des verständigen Umgangs spannen als zwei Dimensionen eine Matrix auf, innerhalb derer die Anforderungen im Bereich Funktionaler Zusammenhänge konkretisiert werden. Aus dem derzeitigen Zwischenstand sollen einige Aspekte des Beherrschens und Verstehens im Folgenden dargelegt werden:

- *Prototypen angeben und erkennen*

Sowohl Wissen als auch Strukturieren zugeordnet beinhaltet der Aspekt zum einen das Faktenwissen über Klassen von Funktionen. Zum anderen die Verwendung des Faktenwissens zur Identifizierung markante[r] Repräsentanten einer Funktionsklasse“ (Weigand, 2004).

- *Zuordnung erkennen*

Dieser Aspekt dem Strukturieren zugeordnet leitet sich von der Grundvorstellung „Zuordnung“ ab. Es wird erkannt, dass eine Größe einer anderen zugeordnet wird (vgl. Vollrath, 1989) und damit jedem „x [...] genau ein $f(x)$ zugeordnet [wird]“ (Malle 2000). Dieser Aspekt berücksichtigt eine mengentheoretische und eher diskrete Sichtweise auf Funktionen.

- *Änderungsverhalten einer Funktion erkennen*

Eingeordnet unter Strukturieren wird bei diesem Aspekt eine eher kontinuierliche bzw. kinematische Sichtweise auf Funktionen hervorgehoben. Das Änderungsverhalten tritt in den Fokus, „Wird x verändert, so ändert sich $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt“ (Malle, 2000). Es wird erfasst, „wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“ (Vollrath, 1989)

- *Innerhalb einer Repräsentation transformieren*

Eingeordnet in Transformieren wird bei diesem Aspekt strukturverändernd innerhalb einer Repräsentation umgeformt, d.h. Start- und Zielzustand sind äquivalent im Sinne der Termäquivalenz. Unter diesen Aspekt fallen beispielsweise das Faktorisieren des Funktionsterms eines Polynoms oder die Änderung der Achsenskalierung des Koordinatensystems bei der Betrachtung eines Funktionsgraphen.

- *Zwischen verschiedenen innermathematischen Repräsentationen wechseln*

Eingeordnet in Interpretieren im Sinne einer „conversion“ nach Duval (2006), bezieht sich dieser Aspekt auf kohärente Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationen einer Funktion. Die semantische Kongruenz, d.h. die mathematische Bedeutung zwischen Ausgangs- und Zielrepräsentation soll dabei erhalten bleiben (vgl. Adu-Gyamfi, Stiff & Bossé, 2012)

- *Zwischen außermathematischen und innermathematischen Repräsentationen wechseln*

Eingeordnet in Interpretieren zeigt dieser Aspekt eine Ähnlichkeit zum vorhergehenden. Es handelt sich ebenfalls um eine „conversion“, allerdings findet der kohärente Wechsel bei diesem Aspekt zwischen innermathematischen Repräsentationen und außermathematischen Kontextualisierungen der Funktion statt. Außermathematische Kontextualisierungen sind verbal-situative Beschreibungen von Funktionen, sei es in Textform, verbal oder gezeichnet.

Ausblick

Das erhaltene Modell ist als vorläufig zu betrachten, da die Literatursuche noch nicht abgeschlossen ist. Aktuell sind nur einzelne Aspekte in das Modell eingeflossen. Nach Abschluss der Recherche und Bildung der Kategorien soll eine Inhaltsvalidierung durch eine Expertenbefragung erfolgen. Inwieweit die Referenzmodelle als Instrumente zur Bewertung und Analyse

von Diagnose- und Fördermaterialien geeignet sein werden, soll abschließend durch eine Strukturierende Qualitative Inhaltsanalyse geklärt werden.

Literatur

- Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and mathematics*, 112(3), 159-170.
- Anderson, J. R. (1996). *Kognitive Psychologie* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103-131.
- Klinger, M. (2018). Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Krüger, K. (2000). Erziehung zum funktionalen Denken: zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos-Verl.
- Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103, 8-11.
- Musgrave, S., Neil Hatfield, & Patrick Thompson. (2015). Teachers' meanings for the substitution principle. *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (S. 801-808). Pittsburgh: Mathematical Association of America.
- Nitsch, R. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Pinkernell, G., Düsi, C., & Vogel, M. (2017). Aspects of proficiency in elementary algebra. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 9). Dublin.
- Rosch, E. (1983). Prototype Classification and Logical Classification: The Two Systems. *New trends in conceptual representation: challenges to Piaget's theory?* (S. 73-86). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.
- Ullrich D., Schönwälder D. & Hamich M. (2018). Summative Referenzmodelle für ausgewählte Bereiche grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1823-1826). Münster: WTM-Verlag.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3-37.
- Weigand, H-G. (2004). Funktionales Denken. *Der Mathematikunterricht*, 50(6), 4-10.