Peter ULLRICH, Koblenz

Integralrechnung für stückweise monotone Funktionen, oder: Dank Leibniz zu den Bildungsstandards?

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife postulieren die Benutzung eines „propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral“ (2012, 2.2, S. 18). Dabei erweist sich gerade bei der Integralrechnung die Vermeidung formaler Grenzwertbetrachtungen als schwierig:

Auch wenn der Begriff der stetigen Funktion gar nicht in den Bildungsstandards vorkommt, setzt man üblicherweise (etwa Greefrath et al., 2016, 5.1.2) die zu integrierenden Funktionen als stetig voraus. Dann aber muss im mathematischen Detail ein veritabler Aufwand getrieben werden: Bereits der zur Algorithmisierung der Integralrechnung als unverzichtbar angesehene Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benötigt die Aussage, dass sich zwei Stammfunktionen auf einem Intervall nur um eine Konstante unterscheiden, deren Nachweis auf Fragen der formalen Definition der reellen Zahlen führt.

Stattdessen sollen im Folgenden **stückweise monotone Funktionen** $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ als Integranden betrachtet werden, also solche, für die es eine endliche Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ des Definitionsintervalls $[a, b]$ gibt, so dass die Einschränkung von f auf das Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ monoton ist für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Dieser Funktionstyp ist anschaulich gut zu beschreiben und einfach exakt zu definieren, umfasst die im Schulunterricht verwendeten Basisfunktionen sowie zahlreiche andere Funktionen und ist anschlussfähig in dem Sinne, dass er auch in einem Studium des Faches Mathematik auftritt.

Eine Integrationstheorie für monotone Funktionen wurde bereits 1676 von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) in Ansätzen entwickelt, allerdings in einem Manuskript, welches erst 1993 vollständig auf Latein und 2016 in deutscher Übersetzung veröffentlicht wurde (Leibniz 2016) und bislang keinen Einfluss auf die Entwicklung der Integralrechnung nehmen konnte.

Schreibt man die Ideen von Leibniz fort, so ergibt sich eine Integrationstheorie für stückweise monotone Funktionen, die zum einen wohlvertraute Hilfsmittel und Ergebnisse zur Verfügung stellt wie die Integralbestimmung für die Basisfunktionen, die partielle Integration und die Substitutionsregel. Zum anderen benötigt dieser Zugang nur eine einzige Grenzwertbetrachtung, welche zudem ohne formale „Epsilontik“ abläuft; die dann noch erforderlichen Überlegungen sind alle nicht-infinitesimal.

Da das Integral additiv ist bezüglich endlicher Zerlegung des Integrationsintervalls, kann man sich im Folgenden auf monotone Funktionen an Stelle stückweise monotoner beschränken. Zudem kann man annehmen, dass es sich um monoton **wachsende** Funktionen handelt.

1. Wohlvertrautes zur Integralrechnung für monotone Funktionen

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ für einen monoton wachsenden Integranden $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in [a,b]$ mit $\alpha < \beta$ kann man betrachten unter der Flächeninhaltsgrundvorstellung, unter der Vorstellung als rekonstruierter Bestand bzw. unter der Mittelwertgrundvorstellung (vgl. etwa Greefrath et al. 2016, 5.3). In jedem Fall aber ist die Abschätzung

$$f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)$$

offensichtlich. Aus dieser folgt

$$\left| y\cdot(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \le \big(f(\beta)-f(\alpha)\big)\cdot(\beta-\alpha)$$

für jedes $y \in [f(\alpha), f(\beta)]$.

Indem man das Intervall $[a,b]$ durch endlich viele Punkte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ unterteilt und die letztgenannte Abschätzung auf jedes der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ anwendet, ergibt sich aufgrund der Additivität des Integrals der

Satz 1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ durch endlich viele Punkte und $y_i \in [f(x_{i-1}), f(x_i)]$ für $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann gilt:*

$$\left| \left(\sum_{i=1}^m y_i\cdot(x_i - x_{i-1})\right) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \le \big(f(b)-f(a)\big)\cdot \max_{1\le i\le m}(x_i - x_{i-1}).$$

Dieses Resultat war Leibniz bereits 1676 bekannt (2016, Satz VI) und wird heute noch in Analysis-Vorlesungen herangezogen, um nachzuweisen, dass monotone Funktionen Riemann-integrierbar sind.

2. Charakterisierung von Integralfunktionen

Man betrachte jetzt nicht mehr feste Integrationsgrenzen α, β, sondern interessiere sich für **Integralfunktionen** der monoton wachsenden Funktion f, also Funktionen $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

für alle $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha < \beta$. Aufgrund zu Anfang von Abschnitt 1 genannten Abschätzung gilt für solch eine Funktion

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \in [f(\alpha), f(\beta)]$$

für alle $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha < \beta$. Dies reicht bereits aus, um Integralfunktionen zu charakterisieren!

Satz 2. *Genau dann ist* $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Integralfunktion der monoton wachsenden Funktion* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, *wenn für alle* $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha < \beta$ *gilt*

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \in [f(\alpha), f(\beta)].$$

Beweis. Zu zeigen ist nur noch, dass jede Funktion mit der obigen Eigenschaft eine Integralfunktion von f ist. Durch Verkleinern des zu Grunde liegenden Intervalls reicht es dazu aus zu zeigen

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Falls dies nicht gälte, wäre

$$\varepsilon := \left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| > 0.$$

Man wähle dann eine endliche Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ von $[a, b]$ derart, dass gilt:

$$\big(f(b) - f(a)\big) \cdot \max_{1 \le i \le m} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Für $i \in \{1, \dots, m\}$ beliebig liefert die Voraussetzung über F, dass gilt

$$y_i := \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \in [f(x_{i-1}), f(x_i)].$$

Dabei ist

$$F(b) - F(a) = F(x_m) - F(x_0) = \sum_{i=1}^m F(x_i) - F(x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^m y_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Aufgrund von Satz 1 ergibt sich somit

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \big(f(b) - f(a)\big) \cdot \max_{1 \leq i \leq m} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

im Widerspruch zur Definition von ε! □

Das Symbol ε dient wohlgemerkt nur dazu, um den Unterschied zwischen $F(b) - F(a)$ und $\int_a^b f(x)dx$ zu bezeichnen. Der Beweis verläuft ganz im Geiste eines Exhaustionsverfahrens, wie es seit der Antike bekannt ist.

3. Anwendungen

Hat man Satz 2 zur Verfügung, so ist für die gängigen Integralbestimmungen kein infinitesimales Argument mehr erforderlich (wegen Details vgl. Ullrich 2019):

Für den Nachweis, welche Integralfunktion das Monom $x \longmapsto x^n$ besitzt, reicht es aus, die Formel $\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} = (\beta - \alpha) \cdot (\beta^n + \cdots + \alpha^n)$ zu kennen. (Auch die Summenformel für die n-ten Potenzen der ersten natürlichen Zahlen ist nicht erforderlich.) Entsprechend lassen sich unter Verwendung der Standardabschätzungen $x < \exp x - 1 \leq x \exp x$ bzw. $\sin x \leq x \leq \tan x$ die Integralfunktionen zu Exponential- bzw. Sinus- und Cosinus-Funktion nachrechnen. Und die Regel der partiellen Integration und die Substitutionsregel lassen sich entlang der wohlbekannten Beweise herleiten, unter Fortlassen der infinitesimalen Argumente.

Sogar den bislang gar nicht verwendeten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man herleiten: Ist $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Integralfunktion der monoton wachsenden Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in [a, b]$ fest, so ist $F(x) \geq F(x_0) + f(x_0) \cdot (x - x_0)$ für alle $x \in [a, b]$ und somit $f(x_0)$ die Steigung einer Stützgeraden an den Graphen von F im Punkte $\big(x_0, F(x_0)\big)$.

Literaturverzeichnis

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (2012). http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (06.01.2019)

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Leibniz, G.W. (2016). *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae. Herausgegeben und mit einem Nachwort versehen v. Eberhard Knobloch. Aus dem Lateinischen übersetzt v. Otto Hamborg*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Ullrich, P. (2019). *Integralrechnung ohne formales Grenzwertkonzept*. Erscheint Wiesbaden: Springer essentials.