Lara VANFLOREP, Wuppertal

„Es darf immer nur eine Perle in einem Feld sein. Deswegen muss man das so langstrecken." – Deutungsprozesse im Umgang mit Montessoris ‚Schachbrett'

Der Schüler Lukas (9 Jahre, Montessori Grundschule) berechnet die Aufgabe 125·3 am Großen Multiplikationsbrett (zur genauen Nutzungsweise s. Deutsche Montessori-Vereinigung e.V., 2012, S. 69ff.). Er beginnt mit der Teilaufgabe 3·5 und legt das Ergebnis 15 als eine 5er-Perlenstange in das Einerfeld und eine 1er-Perle in das Zehnerfeld. Durch die nächste Teilaufgabe 3·2 gerät er ins Stocken. Er möchte eine 6er-Perlenstange in das Zehnerfeld legen, dort liegt aber bereits die 1er-Perle als Übertrag aus der vorherigen Teilaufgabe. Statt die Summe beider Perlenstangen zu berechnen, verschiebt Lukas die 6er-Perlenstange in das benachbarte Hunderterfeld (s. Abbildung 1). Dadurch erhält er am Ende seiner Rechnung das Ergebnis 3615 statt 375. Er begründet sein Vorgehen mit der gelernten Regel, dass am Ende der Multiplikation jeweils nur eine Perlenstange auf einem Feld liegen darf.

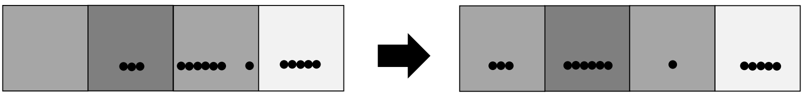

Abbildung 1: Lukas verschiebt die Perlenstangen, um das Ergebnis zu ermitteln.

Dieser Ausschnitt zeigt zunächst einmal, dass die Auseinandersetzung mit einem didaktischen Anschauungsmittel - hier dem Großen Multiplikationsbrett – für Kinder anspruchsvoll ist. Für eine adäquate Nutzung genügt es nicht, unverstandene Regeln des Umgangs mit dem Anschauungsmittel anzuwenden. Vielmehr sind strukturelle Deutungen und Umdeutungen des Materials und der Handlung an diesem notwendig.

Im vorliegenden Forschungsprojekt wird gerade diese Deutungsanforderung untersucht.

Epistemologische Besonderheit mathematischer Begriffe

Mathematische Begriffe sind abstrakt und nicht direkt wahrnehmbar. Das bedeutet, dass sie sich nicht direkt auf Dinge der Welt beziehen, wie es in anderen Bezugsdisziplinen der Fall sein kann. Mathematische Begriffe hingegen beschreiben Beziehungen, welche nicht durch ein Werkzeug betrachtet und angeschaut werden können. Aus diesem Grund müssen sie durch Zeichen, Symbole, Anschauungsmittel o.ä. zugänglich gemacht werden, damit über sie nachgedacht sowie gesprochen werden kann und damit letztlich auch ein Verstehen der Begriffe möglich ist (vgl. Steinbring, 1998, S. 162). In der Mathematik werden also Repräsentationen als vermittelndes Medium zwischen dem abstrakten Begriff und dem Denken des Kindes benötigt (vgl. Otte, 1983, S. 190).

Schon Montessori hebt in ihren Arbeiten die Abstraktheit mathematischer Begriffe hervor. Die mathematischen Gegenstände seien nicht in der Umgebung verteilt wie die Bäume, die Blumen und die Tiere. Somit fehle die Gelegenheit, im Kindesalter spontan den „mathematischen Geist" zu entwickeln (vgl. Montessori, 1972, S. 166). Aus diesem Grund ist es notwendig, diese „Abstraktionen zu materialisieren". Die Abstraktionen seien zwar nicht an sich unzugänglich für das Kind, aber sie benötigen eine materielle Brücke (in Form von Anschauungsmittel), damit sie von den Kindern verstanden und durchdrungen werden zu können. (vgl. Montessori, 2012, S. 253)

Für den abstrakten Begriff der Multiplikation mehrstelliger Zahlen bedeutet es also, durch das Große Multiplikationsbrett eine Brücke zu schaffen, damit den Kindern zunächst ein Zugang zu dem Begriff aber auch ein Verstehen von diesem möglich wird.

Modale Wissensrepräsentation – Veranschaulichung von Beziehungen

Repräsentationen können auf unterschiedlichen Arten einen Zugang zu mathematischen Begriffen eröffnen (vgl. dazu ausführlich Bruner, 1974 und Prediger & Wessel, 2011).

Das Große Multiplikationsbrett repräsentiert sowohl auf ikonischer als auch auf enaktiver Ebene verschiedene grundlegende begriffliche Aspekte der Multiplikation mehrstelliger Zahlen. Hierfür werden farbige Felder in diagonaler Anordnung, bunte Perlenstäbchen sowie Ziffernplättchen genutzt, die auf bestimmte Art und Weise gelegt und verschoben werden. Jede Handlung am Material und die Eigenschaften des Materials sind insofern als ein Symbol zu verstehen, als dass sie grundlegende strukturelle Beziehungen der Multiplikation mehrstelliger Zahlen darstellen. Sie stehen nicht nur für sich, sondern nehmen eine bestimmte Funktion abhängig von der ausgeführten Handlung am Material ein. Liegt beispielweise ein Ziffernplättchen neben dem blauen Feld des rechten Rands, so steht es für den Zehner des Multiplikators. Liegt es neben dem roten Feld des rechten Rands, so repräsentiert dasselbe Plättchen den Hunderter des Multiplikators.

Ein konkretes Objekt (Ziffernplättchen, Perlenstange) im Großen Multiplikationsbrett erhält somit seine Bedeutung erst durch die Beziehung zu anderen Objekten und durch seine Position im Gesamtsystem und muss daher immer wieder systembezogen umgedeutet werden.

Mentale Wissensrepräsentation – Deutung von Beziehungen

Für das Verstehen mathematischer Begriffe ist also bedeutsam, dass das lernende Kind diese Beziehungen aktiv in die Handlung und das Material hineindeutet und mit Bedeutung versieht, weil sie nicht direkt ablesbar sind und nicht selbstverständlich genutzt werden können.

Vor diesem Hintergrund untersucht das vorliegende Projekt, inwiefern Kinder mit dieser Deutungsanforderung umgehen. Sehen sie die strukturellen Beziehungen im Material und den Handlungen, die sie daran durchführen? Nutzen sie strukturelle Beziehungen zur Ergebnisgenerierung und ihren Erklärungen?

Die Analysen der videografierten und transkribierten Interviews der Pilotierung lassen erste Charakteristika dieser Deutungsprozesse von Material und Handlung erkennen. Sie vollziehen sich in einem Spannungsfeld zwischen prozeduraler und konzeptueller Wissensrepräsentation.

Das Ausgangsbeispiel von Lukas zeigt, dass sein Vorgehen eher der prozeduralen Wissensrepräsentation zu verorten ist. Er sieht die 1er-Perle und die 6er-Perlenstange als zwei unabhängige Objekte, die nicht in einem systembezogenen Zusammenhang stehen und nicht miteinander in Beziehung gebracht werden, obwohl sie beide Zehner-Zwischenergebnisse darstellen. Stattdessen wendet er eine Art Prozedur des „Langstreckens“ an, die auf einer vermutlich unreflektierten Regel beruht, die er im Unterricht gelernt hat, aber an dieser Stelle nicht herangezogen werden kann. Am Ende der Multiplikation soll stellengerecht addiert werden, d.h. dass in jedem Feld jeweils nur noch eine Perlenstange liegen soll, damit das Endergebnis schnell abgelesen werden kann. Diese Regel scheint insofern unverstanden, als dass nicht stellengerecht addiert, also Perlenstangen zusammengefasst werden, sondern eine Perlenstange in den nächstgrößeren Stellenwert verschoben wird. Charakteristika dieses Deutungstyps können regelgeleitete Prozeduren sein, die kein strukturelles Verstehen voraussetzen, sowie das Bezugnehmen auf unmittelbar sichtbare Oberflächenmerkmale des Anschauungsmittels. Die offensichtlich sichtbaren Eigenschaften des Anschauungsmittel werden als isolierte Objekte betrachtet und nicht systemisch miteinander in Beziehung gesetzt, sondern unabhängig von ihrer Position im Gesamtsystem gedeutet.

Die Schülerin Sarah (3. Sj., Montessori Grundschule) hingegen tauscht die beiden Perlenstangen (1er und 6er) auf dem blauen Feld in eine 7er-Perlenstange um. Sie begründet ihr Vorgehen damit, dass die beiden einzelnen Perlenstangen für Zehner stehen und deshalb zusammengefasst werden können. Dabei bezieht sie sich auf die beiden Teilaufgaben $3 \cdot 5$ und $3 \cdot 2$. Die 1er-Perlenstange deutet Sarah als Zehnerübertrag der Teilaufgabe $3 \cdot 5$ und die

6er-Perlenstange als Zehner der Teilaufgabe $3 \cdot 2$. Sie erklärt, dass an dieser Stelle nicht $3 \cdot 2$, sondern $3 \cdot 20=60$ gerechnet wird. Sarah unterscheidet hier somit zwischen den Merkmalen der Objekte an der Oberfläche (auf der Ziffernebene) und den Beziehungen der Objekte im Gesamtsystem. Sie setzt folglich sowohl die Perlenstangen miteinander in Beziehung als auch mit dem farbigen Feld, auf dem sie liegen, da sie diese auf Grundlage ihrer Position im Multiplikationsbrett deutet. Sie erklärt, dass die Perlenstangen beide in dem Feld liegen müssen, da beide als Zehner zu verstehen sind und dehalb zusammengerechnet werden müssen. Dieser Deutungsprozess ist eher der konzeptuellen Wissensrepräsentation zuzuordnen. Charakteristika können also nicht nur das Erkennen von strukturellen Beziehungen in Material und Handlung an diesem sein, sondern insbesondere auch das systemische Deuten von Objekten in Abhängigkeit ihrer Position im Gesamtsystem sowie das Nutzen von diesen Beziehungen zur Ergebnisgenerierung.

Die Erhebungen der Hauptstudie zeigen jedoch, dass eine weitaus größere Deutungsvielfalt vorliegt, als die der beiden beschriebenen Pole (prozedural – konzeptuell). Im Forschungsprojekt wird dieses Spannungsfeld weiter ausgeschärft und die Deutungsprozesse der Kinder in den Auseinandersetzungen mit dem Großen Multiplikationsbrett in ihrer Vielfalt charakterisiert.

Literatur

Bruner, J. S. (1974). Entwurf einer Unterrichttheorie. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Deutsche Montessori-Vereinigung e.V. (2012). Montessori Material. Mathematik in Kinderhaus und Schule. Nienhuis Montessori B.V. Zelhem. S.69-74

Montessori, M. (1972). Das kreative Kind. Der absorbierende Geist. Freiburg, Verlag Herder

Montessori, M. (2012). Psychogeometrie. Das Studium der Geometrie basierend auf der Psychologie des Kindes. Freiburg, Verlag Herder

Otte, M. (1983). Texte und Mittel. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Heft 4, 183-194.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen - Deuten – Darstellungen vernetzen: Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), Mathematiklernen unter der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung. (S. 163-184). Münster: Waxmann.

Steinbring, H. (1998). Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98 (5), 161-167.