Emese VARGYAS, Mainz

Erkundungen um den Satz des Ptolemäus

Motivation

Der Satz des Ptolemäus ist ein Satz der Elementargeometrie, der folgenden Zusammenhang zwischen den Diagonalen und Seiten eines Sehnenvierecks beschreibt: In einem Sehnenviereck mit Seitenlängen a, b, c, d und Diagonalenlängen e und f gilt stets $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$ (Abb. 1).

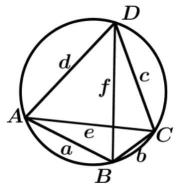

Abb. 1

Abbildung 2 zeigt den wohlbekannten Beweis des Satzes nach Ptolemäus (siehe Talliaferro S. 16), welcher die Aussagen des Umfangswinkelsatzes und die Streckenverhältnistreue bei ähnlichen Dreiecken verwendet:

Dabei sei E ein Punkt auf der Diagonalen BD so, dass $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AED und ABC beziehungsweise DAC und EAB folgt $b \cdot d = e \cdot |DE|$ sowie $a \cdot c = e \cdot |EB|$. Da $|DE| + |EB| = f$ folgt, dass $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.

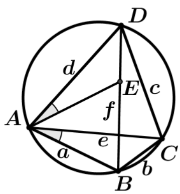

Abb. 2

Bei diesem Beweis ist die Wahl des Punktes E ausschlaggebend. Die dadurch entstandene und in der Schule oft als „Hilfslinie" genannte Strecke AE verkompliziert auf den ersten Blick die ursprüngliche Abbildung, erweist sich aber als entscheidend für die darauf folgende Beweisführung. Zeigt man diesen Beweis den Schülern und Schülerinnen im Geometrieunterricht, wird man mit verzweifelt fragenden Blicken konfrontiert: „Warum gerade so? Wie kann man wissen, wo diese Linie(n) zu ziehen ist (sind)? Wie kommt man auf eine solche raffinierte Idee? Gibt es eine Methode für das Auffinden der richtigen Hilfslinie(n)?" Ehrliche Lehrkräfte geben zu, dass bei der Identifizierung der richtigen Hilfslinie beziehungsweise richtigen Hilfskonstruktion neben Erfahrung auch die Intuition eine wichtige Rolle spielt; eine Methode, die sicher zu einem Beweis führt, gibt es leider nicht. Andere Lehrpersonen dagegen, insbesondere diejenigen die am Anfang ihrer Berufslaufbahn stehen, versuchen den Beweis in allen Einzelheiten noch einmal zu erklären oder verweisen darauf, dass durch *diese* geeignete Wahl des Punktes E am Ende sich alles vereinfacht und so schön zusammensetzt. Obwohl viele Schüler und Schülerinnen den Beweis des Satzes des Ptolemäus problemlos nachvollziehen und anschließend den Satz als Werkzeug bei weiteren

Aufgaben einsetzen können, bleibt bei einigen ein unwohles Gefühl zurück: Das nächste Problem, wo man wieder einen Trick verwenden muss, kommt bestimmt. Diese „Besorgnis“, die auch manchen Fachleuten nicht fremd ist, nehmen einige Schüler und Schülerinnen als Herausforderung an, andere dagegen werden davon gelähmt.

Im Folgenden widmen wir uns der Frage, was könnten Lehrkräfte tun, damit die Schüler und Schülerinnen den vorliegenden Satz und seinen Beweis nicht nur akzeptieren, sondern auch bereit sind sich damit als Gegenstand ihrer Untersuchungen auseinanderzusetzen. Eine Möglichkeit wäre, den Satz als Übungsaufgabe für die Anwendung des Kosinussatzes (siehe Lee, Sillitto) zu stellen. Im Rahmen einer Facharbeit, deren Thema „Inversion am Kreis“, „Komplexe Zahlen“ oder „Fußpunktdreieck“ (dazu siehe Coxeter & Greitzer) ist, ließe sich der Satz auch behandeln. Unser aktuelles Anliegen ist, den Satz des Ptolemäus als „Flächensatz“ aufzufassen und entsprechende Beweise dazu zu finden. Dieser Ansatz ist doppelt motiviert: Einerseits möchten wir an das anknüpfen, was im Rahmen der Flächenlehre vorher im Geometrieunterricht behandelt wurde (z. B. Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit, Satzgruppe des Pythagoras). Andererseits ist der Satz von Ptolemäus in der Übersetzung von Taliaferro (siehe Taliaferro S. 16) ursprünglich als Flächensatz formuliert, wenn auch der Beweis (siehe Abb. 2) die Euklidische Proportionenlehre dafür verwendet. Merkwürdigerweise wird dieser Aspekt des Satzes bei den meisten in der Literatur vorhandenen Beweisen unterschlagen. Dort stehen die Seiten- und Diagonalenlängen im Vordergrund, eine Verbindung zu entsprechenden Flächeninhalten wird aber nicht vollzogen. Des Weiteren stellen wir uns die Frage, um welche Flächeninhalte es beim Satz des Ptolemäus geht und versuchen eine Antwort darauf zu geben (siehe auch Vargyas & Weiss-Pidstrygach).

Um welche Flächen geht es beim Satz des Ptolemäus?

Um diese Frage zu beantworten, schauen wir uns die heutzutage übliche Formulierung des Satzes an: In einem Sehnenviereck mit Seitenlängen *a, b, c, d* und Diagonalenlängen e und f gilt stets $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$. Interpretiert man in dieser Gleichung vorkommende Produkte geometrisch als Flächeninhalte entsprechender Rechtecke, so lautet die Umformulierung des Satzes:

In einem Sehnenviereck ist die Summe der Rechtecke über den gegenüberliegenden Seiten des Vierecks gleich dem Rechteck über den Diagonalen (siehe Abb. 3). Wie man Abbildung 3 entnehmen kann, sind die Rechtecke über den Seiten schnell gefunden, das Rechteck über den Diagonalen ist aber nicht so einfach (*sinnvoll* bezüglich eines Flächenbeweises) zu konstruieren.

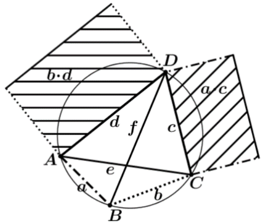

Abb. 3

Für die weiteren Untersuchungen führen wir folgenden Hilfssatz ein: Konstruiert man auf die Seiten AD und DC eines Sehnenvierecks $ABCD$ die Rechtecke $ADEF$ und $DCPQ$ so, dass $|AB| = |CP|$ und $|BC| = |DE|$, dann ist $|AC| = |EQ|$ und $BD \perp EQ$ (siehe Abb. 4).

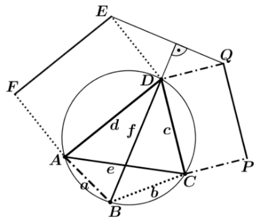

Abb. 4

Abbildung 5 zeigt einen Beweis zum Satz des Ptolemäus mittels Flächeninhalte. Die Zeichnung lässt verschiedene Lösungswege zu. Die verehrte Leserschaft ist eingeladen, diese dem nebenstehenden Bild zu entnehmen.

Eine weitere interessante Fragestellung wäre, um welche Art von Flächengleichheit es an dieser Stelle geht: Zerlegungs- bzw. Ergänzungsgleichheit?

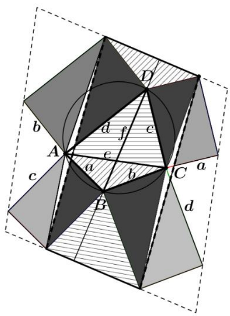

Abb. 5

Der zweite Beweis mittels Flächeninhalte ist in Anlehnung an den Beweis des Satzes des Pythagoras nach Euklid (siehe Thaer S. 32) entstanden. Das Bild links zeigt den Beweis des Satzes des Pythagoras nach Euklid (Buch I, Satz § 47), das rechte Bild das Analogon des Satzes des Ptolemäus. Wie man auf Abbildung 6b erkennen kann, dieser Beweis ist keineswegs einfach. Dabei treten zwei Probleme auf: Einerseits sind die Dreiecke ABC und ADC nicht rechtwinklig, auf der anderen Seite geht es hier nicht mehr um die Flächengleichheit gewisser Quadrate, sondern um die Flächengleichheit entsprechender Rechtecke. Der Beweis ist nicht für den normalen Unterricht gedacht, vielmehr für mathematisch wissbegierige Lernende, die auf die

Sätze der Elementargeometrie nicht nur als einzelne Bausteine schauen, sondern auch an den Zusammenhängen dazwischen (Gemeinsamkeiten und Unterschieden) interessiert sind. Für den ausführlichen Beweis siehe https://www.didaktik.mathematik.uni-mainz.de/vargyas

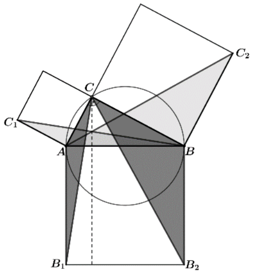

Abb. 6a

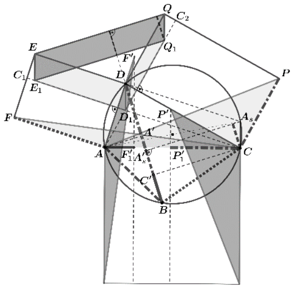

Abb. 6b

Der folgende Beweis im Sinne von Flächengleichheiten ist als „Zufallsprodukt“ aus der Beschäftigung mit dem vorherigen Beweis entstanden. Dabei ist die Kongruenz der Parallelogramme ABQ_3Q_2 und CBP_3P_2 entscheidend. Dieser Beweis führt anschließend zu einer Verallgemeinerung des Satzes des Ptolemäus bei der anstatt Rechtecke Parallelogramme mit gleich großen Winkeln betrachtet werden.

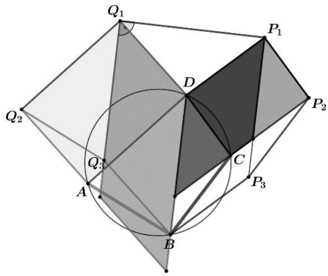

Abb. 7

Literatur

Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America.

Lee, H. J. (2001). A trigonometric proof of Ptolemy’s theorem. *The Mathematical Gazette, 85,* 479–480.

Sillitto, A. G. (1996). Ptolemy’s theorem. *The Mathematical Gazette, 50,* 388.

Taliaferro, R. C. (Trans.), (1980). *The Almagest, By Ptolemy*, Chicago: Encyclopaedia Britannica.

Thaer, C. (1969). *Euklid: Die Elemente*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Vargyas, E., Weiss-Pidstrygach, Y. (2015). Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz? Entdeckendes Lernen in der Lehramtsausbildung. *Mathematica Didactica, 38,* 274-301.