Regine WALLRAF, Aachen

Förderung fachkommunikativer Kompetenzen angehender Mathematiklehrkräfte – am Beispiel metaphorischer Sprache rund um den Grenzwertbegriff

1. Fachkommunikative Kompetenz

Da mathematische Objekte nicht unmittelbar durch Messinstrumente in der Umwelt erfassbar sind, und handlungsgebundene sowie ikonische Repräsentationen Grenzen aufweisen, nimmt die Darstellung in Wort und Symbol im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle beim Aufbau konzeptionellen Verständnisses ein. Lehrende sollten daher über ein gewisses Maß an *fachkommunikativen Kompetenzen* verfügen. Hierzu zählen Kniffa/Roelcke (2016, S. 19) Wissen und Fähigkeiten in vier ineinander verschachtelten Kompetenzbereichen: dem *strukturellen*, dem *pragmatischen*, dem *kognitiven* und dem *ethischen*. Die Vielschichtigkeit fachkommunikativer Kompetenz und ein in didaktischen Veranstaltungen der RWTH Aachen häufig beobachtetes mangelnde Sprachbewusstsein bei Studierenden des Lehramts Mathematik geben Anlass, Kompetenzen in den genannten Bereichen stärker zu fördern. Hierzu wird ein Lernheft entwickelt und erprobt. Dort wird u.a. mit direktem Bezug auf den *strukturellen* und *ethischen* Kompetenzbereich angestrebt, dass die Studierenden „Charakteristika der mathematischen Fachsprache untersuchen und diese als Lerngegenstand sowie potentielle Lernhürden erläutern." (vgl. auch Wallraf 2018, S. 1899-1902). Da metaphorischer Sprachgebrauch Fehlannahmen bei Lernenden verstärken oder möglicherweise hervorrufen kann, ist hier Achtsamkeit im sprachlichen Handeln von Lehrkräften gefragt. Dies soll im Folgenden am Beispiel des Grenzwertbegriffs näher erläutert werden.

2. Metaphern als Lerngegenstand und -hürde

Durch den Austausch über fachliche Inhalte hat sich in der Mathematik ein spezifischer Sprachgebrauch herausgebildet. Damit verliert Fachsprache als Lerngegenstand und potentielle Lernhürde kaum an Aktualität (vgl. z.B. Wessel et al. 2018, S. 4). Hier scheint gemäß der logisch-begrifflichen Präzisierungsbemühungen eine verschleierte Sprache keinen Platz zu haben. Aber gerade in der Mathematik entfalten kognitive Metaphern und deren sprachliche Realisierung ihr Potential als mächtige Instrumente menschlicher Erkenntnis, um abstrakte Gebiete durch Verknüpfung mit Erfahrungsbereichen zugänglich zu machen (vgl. Núñez 2008). Dies geschieht auf kognitiver Ebene durch die Übertragung eines *Quellbereichs* X auf einen *Zielbereich* Y, um das Konzept aus X mittels Konzepten aus Y zu beschreiben (vgl. Jäkel 2003, S. 23). Nach der von Lakoff/Johnson (2000) postulierten „Embodied-These" lässt sich damit die Mathematik, wie wir sie kennen, im Kern als ein Produkt physischer Erfahrungen und deren metaphorischer Verarbeitung auffassen: „[…] many cognitive mechanisms that are not specifically mathematical are used to characterize mathematical ideas. These include such ordinary cognitive mechanisms as those used for basic spatial relations, groupings, small quantities, motion, distributions of things in space, changes, bodily orientations […] iterated actions, and so on." (Núñez 2008, S. 343). So unverzichtbar metaphorische Projektionen in einem gewissen Maß für mathematische Begriffsbildungsprozesse auch sein mögen, bilden sie eine Quelle für Missverständnisse. Denn Metaphern bleiben niemals bei der strengen Wahrheit; sie liefern durch die Fokussierung eines bestimmten Aspekts immer nur eine filtrierte Darstellung (vgl. Jäkel 2003, S. 41). Eine der größten Gefahren für mathematische Lernprozesse liegt im Wörtlichnehmen metaphorischer Ausdrücke sowie alltagssprachlicher Assoziationen (vgl. Malle 2009, S. 13; Pimm 1987, S. 98).

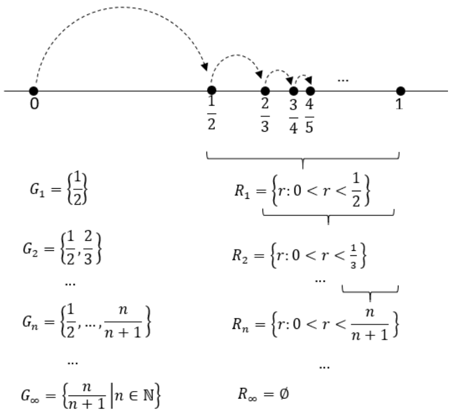
3. Beispiel Grenzwertbegriff

Prototypisch für dieses fachsprachliche Problemfeld sind metaphorische Projektionen und deren sprachliche Realisierung rund um den Grenzwertbegriff. Diese ergeben sich, wenn man eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ „vorwärts" und sukzessiv vom ersten Folgenglied an in der Form $a_1, a_2, a_3, \ldots$ betrachtet. Denn spätestens bei einer Visualisierung auf der Zahlengeraden wird ersichtlich, dass man das Verhalten der Folgenglieder häufig als eine gesetzmäßige räumlich-zeitliche Bewegung deuten kann. Im Fall von Konvergenz unterliegt hier die Metapher KONVERGENZ IST ANNÄHERUNG (vgl. Lakoff/Núñez 2000, S. 187). Unter dieser Perspektive konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn sich die Folgenwerte „dem Wert a annähern für n gegen Unendlich". Dass diese Charakterisierung von Konvergenz vage und metaphorisch ist, ist recht offensichtlich: Es bewegt sich nichts und die Sprechweise „für n gegen Unendlich" macht wörtlich genommen wenig Sinn. Letztere wird nur dadurch möglich und legitim, dass wir auf gedanklicher Ebene *unendliche* Prozesse metaphorisch auf „greifbare" *endliche* Abläufe projizieren (vgl. Lakoff/Núñez 2000, S. 158). D.h. insbesondere, dass unendlichen Prozessen ein Anfang, Zwischenstadien und ein metaphorisches Ende im „Stadium ∞" zugeordnet werden. Im prototypischen Fall (z.B. für $a_n = \frac{n}{n+1}$) unterliegen bei Konvergenz dann die folgenden metaphorischen Prozessvorstellungen (vgl. ebd., S. 189):

- Die Annäherungsbewegung wird durch die (Glieder-)Menge $G_i = \{a_1, .., a_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ beschrieben. Diese umfasst die bis zum

Folgenglied a_i, $i \in \mathbb{N}$ generierten Folgenglieder. Folglich beinhaltet G_∞ die Menge aller Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Die verbleibende Distanz zwischen a_i, $i \in \mathbb{N}$ und dem Grenzwert a beträgt $|a_i - a|$ und ist durch die (Rest-)Menge $R_i = \{r: 0 < r < |a_i - a|\}$ für $i \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}$ charakterisiert. Da der Abstand zwischen a_i und dem Grenzwert a mit wachsendem $i \in \mathbb{N}$ geringer wird, folgt $R_{i+1} \subset R_i$ und $R_\infty = \emptyset$.



Welche Gefahren mit dieser metaphorischen Vorstellung und damit einhergehenden Ausdrucksweisen für den Lernprozess verbunden sind, ist unter Kenntnis der formalen Definition des Grenzwertbegriffs offensichtlich und bereits vielfach diskutiert worden (s. auch Ableitinger/Heitzer 2013; Benders 1991; Cornu 1991). U.a. suggeriert sie stark die Vorstellung des Unendlichen als „eine sehr große Zahl“. Unter dieser Annahme würden sich recht kuriose Resultate ergeben (s. auch Oehrl 1988).

Dennoch sind metaphorische Vorstellungen und die damit verbundene Sprachverwendung im Mathematikunterricht im Rahmen eines anschaulich-intuitiven Zugangs kaum zu umgehen. Denn in der dahinterliegenden Denkrichtung sind unmetaphorische sprachliche Ersetzungen kaum möglich. Zudem ist anzumerken, dass auch in Expertenkreisen, in denen zwar statische Vorstellungen dominieren, z.B. mit den (Pfeil-)Schreibweisen $a_n \to a$, $n \to \infty$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ metaphorische Ausdrücke durchaus gängig und konventionalisiert sind (s. auch Marghetis/Núñez 2013). Auf der einen Seite kann es daher nicht das Ziel sein, die der mathematischen Sprache innewohnende Metaphorik zu meiden. Auf der anderen Seite sollte aber mit einer Überstrapazierung auf sprachlicher Ebene zurückhaltend umgegangen werden. Da metaphorische Sprache keine Eins-zu-Eins Wiedergabe des darzustellenden mathematischen Sachverhalts ist, mögen sich hier schnell Freiräume im sprachlichen Handeln eröffnen. So ist z.B. die unten dargestellte Schreibweise bei Studierenden recht beliebt. Diese wird in fachlichen Kreisen sicherlich richtig interpretiert und kommt nach Ausbildung adäquater Vorstellungen zum Konvergenzbegriff möglicherweise wieder in Frage. In Lernprozessen begünstigt das „eingesetzte Unendlich“ aber möglicherweise die oben geschilderte Fehlannahme. Ähnlich verhält es sich mit der Formulierung „Grenzwert berechnen“.

$$\lim_{n \to \infty} 3 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{\infty} = 3 - 0 = 3$$

4. Literatur

Ableitinger, C. /Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten. In: *ml 180*, S. 2-10.

Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In: *MNU, 44/4*, S. 238-243.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Hrsg.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, S. 153-166.

Jäkel, O. (2003). *Wie Metaphern Wissen schaffen*. Hamburg: Kovač.

Kniffka, G./Roelcke, T. (2016). *Fachsprachenvermittlung im Unterricht*. Paderborn: Schönigh.

Lakoff, G./Núñez, R. (2000). *Where mathematics come from. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Malle, G. (2009). Mathematiker reden in Metaphern. In: ml 156, S. 10-15.

Marghetis, T./Núñez, R. (2013). The Motion Behind the Symbol: A Vital Role for Dynamism in the Conceptualization of Limits and Continuity in Expert Mathematics. In: *Topics in Cognitive Science, 5*, S. 299-316.

Núñez, R. (2008). Conceptual Metaphor, Human Cognition, and the Nature of Mathematics. In Raymond, G./Gibbs, J.r (Hrsg.): *The Cambridge handbook of Metaphor and Thought.* New York: The Cambridge University Press, S. 339-362.

Oehrl, W. (1988). Rechnen mit Unendlich. In: *ml 31*, S. 26.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communications in mathematics classroom.* London: Routledge.

Wallraf, R. (2018). Eindeutig mehrdeutig – Tücken der Mehrdeutigkeit sprachlicher Zeichen im MU am Beispiel des Minuszeichens. In: *BzMu*, S. 1899-1902.

Wessel, L./ Büchter, A./ Prediger, S./ (2018). Weil Sprache zählt. Sprachsensibel Mathematikunterricht planen, durchführen und auswerten. *ml* 206, S. 2-7.