Hans WALSER, Basel

Umkehrung

Wie das Problem entstand

Eine klassische Aufgabe im Abiturtraining geht so (vgl. etwa Weber und Zillmer 2002, S. 66, Aufg. DA 32): Gegeben sind ein Punkt und eine Parabel. Gesucht sind die Tangenten von diesem Punkt an die Parabel sowie der eingeschlossene Winkel.

Nun kann man die Frage umkehren: Wir geben nicht den Punkt, sondern den Schnittwinkel vor und suchen nach den passenden Punkten.

Zunächst lösen wir die Schulaufgabe. Es gibt zwei Herangehensweisen:

Erster Lösungsweg: Wir nehmen alle Geraden durch den Punkt und wählen dann diejenigen aus, welche die Parabel berühren. Dieser Lösungsweg benötigt nur Kenntnisse der quadratischen Gleichung (10. Schuljahr)

Zweiter Lösungsweg: Wir nehmen alle Tangenten an die Parabel und wählen diejenigen aus, welche durch den Punkt verlaufen. Dieser Lösungsweg benötigt Differentialrechnung (11. Schuljahr).

Umkehrung

Von welchen Punkten aus sehen wir die Parabel unter einem vorgegebenen Winkel?

Ähnliche Fragen

Von welchen Punkten aus sehen wir eine Strecke unter einem vorgegebenen Winkel? Die Lösung ist das Ortsbogenpaar, im Sonderfall des rechten Winkels der Thaleskreis.

Rechte Winkel als Sehwinkel

Von welchen Punkten aus sehen wir einen Kegelschnitt unter einem rechten Winkel? (Thaleskurve)

Die Thaleskurve der Parabel ist die Leitlinie der Parabel (Abb. 1). Der Beweis ist eine schöne Übung in Parabelgeometrie.

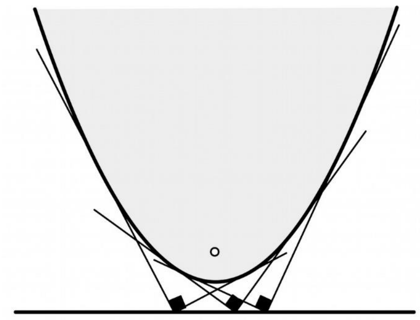

Abb. 1: Parabel und Leitlinie als Thaleskurve

Für die Ellipse erhalten wir einen Kreis (Abb. 2). Die Thaleskurve einer Ellipse ist also ein Kreis. Der Nachweis ist recht happig.

Die Ecken der „Umrechtecke" einer Ellipse liegen auf einem Kreis.

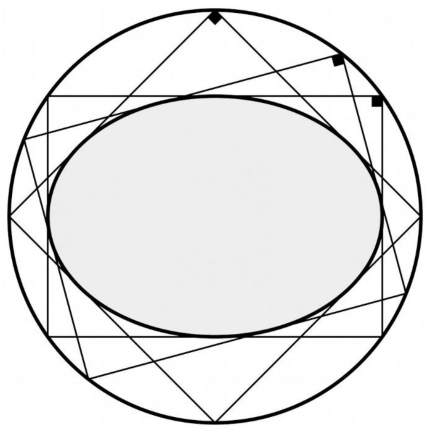

Abb. 2: Ellipse und Thaleskreis

Die Thaleskurve der Hyperbel existiert nur für $a > b$ und ist ebenfalls ein Kreis.

Beliebige Winkel als Sehwinkel

Gesucht sind die Punkte, von denen aus ein gegebener Kegelschnitt unter einem vorgegebenen Winkel gesehen wird.

Für die Parabel liegen die gesuchten Punkte auf einem Hyperbelast (unterer Ast in Abb. 3).

Auf dem zweiten Hyperbelast (oberer Ast in Abb. 3) liegen die Punkte, von denen aus die Parabel unter dem Ergänzungswinkel auf 180° gesehen wird. Einer der beiden Brennpunkte der Hyperbel ist auch Brennpunkt der Parabel.

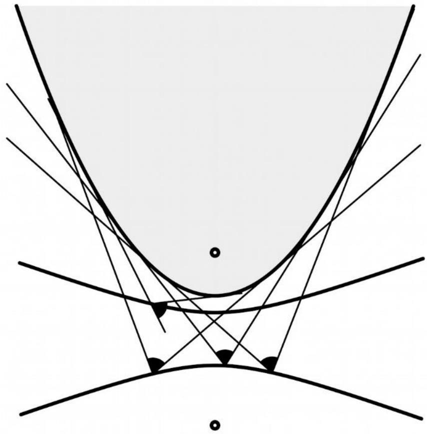

Abb. 3: Parabel und Hyperbelast

Die Abbildung 4 zeigt die Hyperbelschar für Sehwinkel in Schritten von 10° von 10° bis 90°. Die Kurven sind eine Art Niveaulinien für diese Sehwinkel. Die Hyperbeln haben einen Brennpunkt gemeinsam, dies ist auch der Brennpunkt der Parabel.

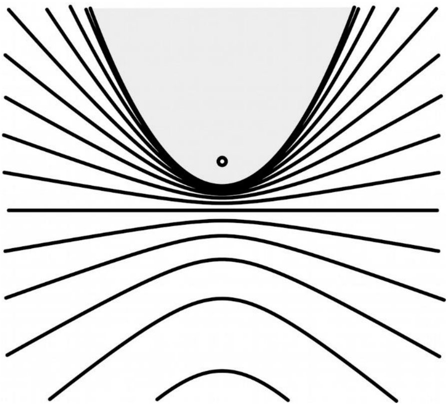

Abb. 4: Hyperbelschar

Dank

Der Autor dankt Kolleginnen und Kollegen des Liechtensteinischen Gymnasiums Vaduz für Anregungen und Hinweise.

Literatur

Weber, Karlheinz und Zillmer, Wolfgang (2002): *Mathematik Gymnasiale Oberstufe*. Grundkurs Aufgabenbuch. Analysis, Analytische Geometrie und Lineare Algebra. Stochastik. Berlin – Frankfurt M: Duden Paetec Schulbuchverlag. ISBN 3-89818-110-3.