

## **Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben**

Mathematische Übungsaufgaben können als eine wesentliche Lerngelegenheit im Mathematikstudium zu einer Entscheidung zum Studienabbruch beitragen. Sie bieten sich deswegen als ein Ansatzpunkt für mögliche Lehrinnovationen an. Bevor jedoch Veränderungen zielgerichtet angebahnt werden können, muss die Ausgangslage in Bezug auf die universitären Lehr-Lern-Bedingungen beschrieben werden. In einem ersten Schritt sollen dazu an einem Standort Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben aus objektiver Sicht mit den aus einer Innenperspektive der aufgabenstellenden Dozierenden ermittelten Lernzielen verglichen werden.

### **Theoretischer Hintergrund**

Die seit jeher hohen Studienabbruchzahlen in den ersten Semestern mathematischer Studiengänge liefern Hinweise auf Störungen im Ablauf individueller Lernprozesse (Rach, 2014). Nach Theorien der Person-Umwelt-Passung sind diese Unstimmigkeiten durch unzureichende Passung zwischen Personenmerkmalen und umweltseitigen Anforderungen bedingt (Nagy, 2006). Übungsaufgaben bilden als eine wesentliche Lerngelegenheit des Mathematikstudiums eine solche umweltseitige Anforderung. Die Funktionen, die Übungsaufgaben zukommen, sind dabei vielfältig: Einerseits dienen sie der Nachbereitung der Vorlesungsinhalte sowie dem Einüben von Verfahren und Beweisstrategien (Göller, 2016). Andererseits können durch Aufgaben Verbindungen zwischen Begriffen hergestellt, sowie Problemlöseprozesse angeregt werden. Im Kontext der universitären Lehr-Lern-Bedingungen bergen Übungsaufgaben darüber hinaus Potenzial zur kognitiven Aktivierung sowie zur Lernendenorientierung, welche in der Struktur hochschulmathematischer Vorlesungen ansonsten meist zugunsten der inhaltlichen Orientierung zurücktritt (Rach & Heinze, 2017; Rach et al., 2013). Auch im Hinblick auf die Bereiche Methodenwissen, Wissen über Strategien und Begriffserwerb, welche nach Rach (2014) zum Beweisen benötigt werden, nehmen Übungsaufgaben als primäre Lerngelegenheiten eine bedeutende Rolle ein.

Wenn also die (Weiter-)Entwicklung der Übungsaufgabe als Lerngelegenheiten angezielt wird, stellt sich vorbereitend einerseits die Frage, welche konkreten Gestaltungsmerkmale mathematische Übungsaufgaben aufweisen und ob sich zur Beschreibung typische Klassen von Aufgaben identifizieren lassen (1). Andererseits ist als Teil des Ist-Zustands aus der Innenperspektive von Interesse, welche Lernziele die Dozierenden mit ihren Aufgaben verfolgen und inwiefern diese sich in den Aufgaben spiegeln (2).

## Methoden

Als Datenquelle zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden Übungsaufgaben aus vier Lehrveranstaltungen an der CAU Kiel aus dem Wintersemester 2017/18 sowie dem Sommersemester 2018 verwendet und mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) analysiert. Es wurden dabei vorrangig Lehrveranstaltungen in die Untersuchung miteinbezogen, die sich an Studienanfängerinnen und Studienanfänger richten, da eine hohe Person-Umwelt-Passung insbesondere beim Übergang zwischen Bildungsinstitutionen bedeutsam ist (Nagy, 2006). Insgesamt ergab sich eine Stichprobe von  $N = 277$  Aufgaben, welche mithilfe der formalen Strukturierung (Mayring, 2010) klassifiziert wurden. Das angelegte Kategoriensystem wurde dabei aus den bestehenden Systemen der COACTIV- (Jordan et al., 2006) und TIMS-Video-Studie (Neubrand, 2002) sowie den *Typen mathematischen Arbeitens* nach Rach et al. (2014) abgeleitet.

Zusätzlich wurden leitfadengestützte Interviews mit den aufgabenstellenden Dozierenden geführt, um Angaben über die Lernziele von Übungsaufgaben zu erhalten. Ausgewertet wurden die Interviews mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010), wobei das Kategoriensystem induktiv aus dem Datenmaterial entwickelt wurde.

## Ergebnisse

Das entwickelte System zur Aufgabenklassifikation ist in Tabelle 1 dargestellt. Da im vorliegenden Material die Kategorien B, E, G, H und I wenig Varianz aufweisen (mindestens 80 % niedrigste Codierung), erscheint eine Klassifikation der Aufgaben vorrangig hinsichtlich der Kategorien A, C und D sinnvoll. Zunächst ist festzustellen, dass 30 % der Aufgaben dem Arbeitstyp des schematischen Anwendens zuzuordnen sind und 70 % dem Beweisen. Außermathematische Anwendungsaufgaben waren in der analysierten Stichprobe nicht vorzufinden.

Bei einer Klassifikation hinsichtlich der Kategorien A, C und D konnten im Wesentlichen fünf Aufgabentypen identifiziert werden: *Rechenaufgaben* (27 %, Code A1-C1/2), *Beweise mittels Rechnung* (24 %, Code A3-C1/2), *Beweise mittels Definitionen* (10 %, Code A3-C0-D1/2) und *Beweise mittels Sätzen* (37 %, Code A3-C3/4), wobei sich die letzte Gruppe noch einmal in die Subtypen *ohne Definitionen* (21 %) und *mit Definitionen* (16 %) gliedern lässt. Die *Rechenaufgaben* bilden mit den Aufgaben des Typs *Beweis mittels Rechnung* einen Anteil von 51 % und können zur Klasse der *rechenlastigen Aufgaben* zusammengefasst werden. Der erste Eindruck, dass ein Großteil der Aufgaben argumentative Anforderungen darstellt, wird somit an dieser

Stelle relativiert, da die Hälfte aller Aufgaben fast ausschließlich durch die Anwendung von Rechenverfahren lösbar ist.

<i>Kategorie</i>	<i>Code</i>
A – Typ mathematischen Arbeitens	1 – schematisches Anwenden, 2 – außermathematisches Anwenden, 3 – Beweisen
B – Lösungsidee	0 – nicht angegeben, 1 – angegeben
C – Mathematische Sätze	0 – keine Anwendung notwendig, 1 – ausschließlich Rechenvorschriften, 2 – vorrangig Rechenvorschriften, zusätzlich ein Satz, 3 – ein Satz, 4 – mehrere Sätze anzuwenden
D – Definitionen	0 – keine Anwendung notwendig, 1 – eine Definition, 2 – mehrere Definitionen anzuwenden
E – Angaben zum geforderten Lösungswege	0 – keine Angaben, Lösungsweg frei wählbar, 1 – spezifischer Lösungsweg vorgegeben
F – Bearbeitungsumfang	1 – niedrig, einschrittig, 2 – mittel, zweischrittig/ in zwei Teilaufgaben zerlegbar, 3 – hoch, mehr als zweischrittig/ in mehr als zwei Teilaufgaben zerlegbar
G – notwendiger Grad an Exploration	0 – keine Exploration, schlichte Berechnung/ bekannte Behauptung, 1 – mittlere, Entscheidung zwischen zwei Behauptungen, 2 – umfangreiche, Behauptung gänzlich unbekannt
H – Hilfen	0 – nicht vorhanden, 1 – allgemein-strategisch, 2 – inhaltsorientiert strategisch, 3 – inhaltlich
I – Interpretation/ Einordnung des Ergebnisses	0 – nicht gefordert, 1 – gefordert

**Tab. 1:** Entwickeltes Kategoriensystem zur Aufgabenklassifikation.

Als Lernziele mathematischer Übungsaufgaben wurden von den verantwortlichen Dozierenden einstimmig das *Kennen* und *Anwenden-Können* mathematischer Begriffe, Werkzeuge und (Rechen-)Verfahren sowie die Fähigkeit des *Argumentierens* beziehungsweise *Beweisens* angeführt. Zudem intendierten alle Befragten eine übergeordnete Fähigkeit, „logisch zu denken“, welche auch das Herstellen von Zusammenhängen umfasse.

Ein Abgleich der angeführten Lernziele mit den Merkmalen der analysierten Aufgabenstichprobe liefert folgende Ergebnisse: (I) Das *Kennen* und *Anwenden-Können* von mathematischen Werkzeugen und Verfahren korrespondiert mit einem großen Anteil *rechenlastiger Aufgaben*. (II) Die Lerngelegenheiten für Begriffe sind nur in einem Zehntel aller Aufgaben, den *Beweisen mittels Definitionen*, dominant. (III) Die Fähigkeiten des *Argumentierens* und *Beweisens* werden von den Dozierenden nicht in Teilkompetenzen

zerlegt. Im Einklang damit adressieren Beweisaufgaben in der Stichprobe auch nicht explizit einzelne Teilkompetenzen des Beweisens. (IV) Das Herstellen von Zusammenhängen könnte insbesondere durch Elemente der Exploration und Ergebnisinterpretation angesprochen werden. Entsprechende Anforderungen waren in der Stichprobe jedoch rar.

## Fazit

Zusammenfassend ergibt sich ein recht homogenes Bild der Aufgabenanforderungen im Korpus, welches den von den Dozierenden genannten vielfältigen Funktionen und Zielen von Übungsaufgaben gegenübersteht. Insbesondere im Bereich des Begriffserwerbs sowie bei der gezielten Schulung einzelner Beweiskompetenzen scheint das Potenzial von Aufgaben noch gestärkt werden zu können. Diese Ansatzpunkte können als Grundlage für eine Lehrinnovation im Paradigma des research-based design genutzt werden.

## Literatur

- Göller, K. (2016). Zu lernstrategischen Bedeutung von Übungsaufgaben im Mathematikstudium. In Institut für Mathematik und Informatik der PH Heidelberg (Hrsg.): *BzMU 2016, Band 1* (S. 317-320). Münster: WTM.
- Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., ..., Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabekategorisierung im COACTIV-Projekt*. Berlin: MPI.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11., aktualisierte und überarbeitete Auflage). Weinheim: Beltz.
- Nagy, G. (2006). *Berufliche Interessen, kognitive und fachgebundene Kompetenzen: Ihre Bedeutung für Studienfachwahl und die Bewährung im Studium*. Dissertation, Freie Universität Berlin. <https://refubium.fu-berlin.de/handle/fub188/10012?show=full> (07.12.2018)
- Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Manual zum Klassifikationssystem für Aufgaben*. Hildesheim: Franzbecker.
- Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Münster: Waxmann.
- Rach, S. & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: which influence do school-related variables have? *IJSME*, 15, 1343–1363.
- Rach, S., Heinze, A. & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester es Mathematikstudiums? *JMD*, 35, 205–228.
- Rach, S., Siebert, U. & Heinze, A. (2013). Lehrqualität in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik: Konzeptualisierung und erste Ergebnisse. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.): *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Wiesbaden: Springer Spektrum.