Frederike WELSING, Wuppertal

Begriffsbildungsprozesse beim Argumentieren im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften

Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen wird konstituiert durch *allgemeingültige* Beziehungen und Zusammenhänge. Dies macht es notwendig, das Verallgemeinern und Argumentieren als wesentliche Aktivitäten des Mathematiktreibens in der Grundschule zu untersuchen.

Argumentieren als Lernziel und Lernvoraussetzung

Argumentieren ist als prozessbezogene Kompetenz (KMK 2005, S. 8) ein zentrales Lernziel im Mathematikunterricht. Kinder sollen dabei in eine Argumentationskultur eingeführt werden, die die mathematikspezifischen Charakteristika berücksichtigt. Argumentieren ist aber nicht nur *Lernziel*, sondern auch eine zentrale *Lernvoraussetzung* beim Mathematiklernen.

Miller (1986) unterscheidet zwei (für die Grundschule relevante) Arten von Wissen: *fundamentales* und *relatives Wissen*. Unter *fundamentalem Wissen* wird der Erwerb grundlegender theoretischer Prämissen eines Wissenssystem verstanden (S. 140). Im Mathematikunterricht entspricht dies dem Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe. Lernen geschieht dabei durch Reorganisation von vorhandenem Wissen, indem es durch unterschiedliche Perspektiven angereichert und umstrukturiert wird. Kinder können diese Perspektiven (noch) nicht selbstständig einnehmen und benötigen daher den sozialen Diskurs in Form von Argumentationen. Argumentieren ist demnach eine Ermöglichungsbedingung *fundamentalen mathematischen Wissens*. Da *relatives Wissen* nur auf Basis *fundamentalen Wissens* erworben werden kann (ebd., S. 138ff.), ist Argumentieren implizit auch Ermöglichungsbedingung von anwendungsbezogenem Wissen.

Zur Notwendigkeit von Veranschaulichungen beim Argumentieren

Argumentationen sind grundlegend für den mathematischen Wissenserwerb. Mathematisches Wissen ist von besonderer Natur: Es ist nicht unmittelbar empirisch fassbar, sondern abstrakt und benötigt eine *geeignete Veranschaulichung*, um dem Denken zugänglich gemacht zu werden (Otte 1983, S. 190). Diese darf aber nicht mit dem mathematischen Inhalt gleichgesetzt werden (Duval 2000). Vielmehr ist es notwendig, die Veranschaulichung vor dem entsprechenden mathematischen Hintergrund zu deuten. Veranschaulichungen zur Repräsentation mathematischen Wissens sind somit zur Gestaltung mathematischer Lernprozesse notwendig und können auch dazu dienen

Argumentationen zu initiieren, anzureichern oder als Argumentationsmittel den Prozess sprachlich oder epistemologisch zu unterstützen.

Begriffsbildung im Kontext der Paritäten

Vor diesem Hintergrund steht die Deutung und Nutzung von Veranschaulichungen innerhalb kindlicher Argumentationsprozesse im Fokus des vorliegenden Forschungsprojekts (zum Forschungsdesign vgl. Welsing 2018). Es wird den Fragen nachgegangen, welche *epistemologische Bedeutung Anschauungsmittel im Argumentationsprozess* einnehmen. Wie Kinder *(allgemeingültige) arithmetische Strukturen in Veranschaulichungen* hineindeuten und wie sich die *begrifflichen Deutungen* hierdurch entwickeln. Auf Grundlage bisheriger Forschungsergebnisse sowie durch Analysen des im Forschungsprojekt erhobenen Datenmaterials wurde ein theoretisches Konstrukt entwickelt, das zur Datenauswertung und zur Beantwortung der Forschungsfragen genutzt wird (vgl. Abb.1). Zur Analyse der epistemologischen Bedeutung des Anschauungsmittels wird das epistemologische Dreieck (Steinbring 2005) herangezogen. Die Ausdifferenzierung der Deutungen der Strukturen in Punktmustern basiert auf der Spanne der visuellen Strukturierungsfähigkeit (Söbbeke 2005). Die Begrifflichen Facetten auf einer Auseinandersetzung mit dem mathematischen Begriff der Paritäten.

Epistemologische Bedeutung des Anschauungsmittels im Argumentationsprozess			
Referenzkontext		**Zeichen / Symbol**	
Arithmetische Ausprägung	*Geometrische Ausprägung*	*Arithmetische Ausprägung*	*Geometrische Ausprägung*

Deutungen der Strukturen in Punktmustern		
konkret dingliche Deutungen	**partielle Strukturen**	**umfangreiche Strukturen**
- Punktmuster als konkrete Zahldarstellung - Faktenwissen - phänomenologische Erscheinungsmerkmale	- Nutzung elementarer Strukturen innerhalb einer Zahl/Darstellung - elementare Beziehung(en) zwischen Zahlen/Darstellungen	- komplexe Strukturen - (begründete) allgemeingültige Aussagen

Begriffliche Deutung – Facetten des mathematischen Begriffs (Beispiel: Paritäten)			
ordinale Anordnung	**Differenz**	**Teilbarkeit mit und ohne Rest**	**Zerlegung der Ursprungszahl in Teilkomponenten**
- der Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen - Zahlenfolge der Zahlen gleicher Eigenschaften	- zwischen Zahlen gleicher oder verschiedener Eigenschaft	- ohne Ermittlung des Ergebnisses - operative Ermittlung des Ergebnisses	unter Ausnutzung: - der Summenregel - der Differenzregel - der Produktregel - der Teilbarkeitsregel

Abbildung 1

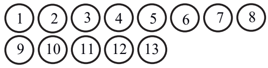
Gerade oder ungerade? - zwei Beispiele zu epistemologischen Merkmalen von Argumentationen unter Nutzung von Anschauungsmitteln

Die bisherigen Auswertungen der videografierten und transkribierten Interviews lassen erste Charakteristika innerhalb kindlicher Argumentationsprozesse erkennen, die im Folgenden an zwei Beispielen illustriert werden.

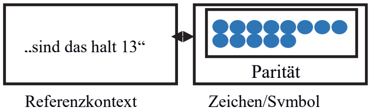
Jona ermittelt die Punktanzahl 13 durch die Additionsaufgabe 5+5+3

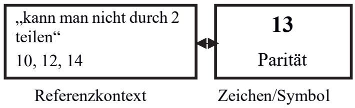
Jona: *Also sind das halt 13 und das ist eine ungerade Zahl, die kann man nicht durch 2 teilen, denn 10, 12, und dann ist die 13 weg und dann kommt die 14 und so weiter, ja und deswegen ist das hier eine ungerade Zahl*

P6



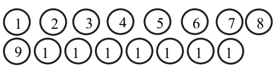
Jona deutet die Veranschaulichung „P6“ hinsichtlich der Parität. Das fraglich gemachte *Zeichen* ist eine geometrische Anordnung als Punktmuster und somit *geometrischer Ausprägung*. Er deutet das Zeichen dabei als Zahldarstellung und ermittelt, dass die „13“ dargestellt ist. Sein Referenzkontext ist somit *arithmetischer Ausprägung*. An dieser Stelle der Argumentation lässt sich ein Wechsel der epistemologischen Bedeutung des Anschauungsmittels beobachten: Die Bedeutung der Veranschaulichung gerät in den Hintergrund und es wird ein neues Zeichen – nun mit *arithmetischer Ausprägung* – gedeutet: die Parität der Zahl „13“. Er begründet, dass „13“ ungerade ist, vor dem Hintergrund eines arithmetischen Referenzkontextes: eine ungerade Zahl ist nicht durch 2 teilbar. Dies stützt Jona im Weiteren durch elementare arithmetische Beziehungen zwischen Zahlen, nämlich durch die Folge „10, 12, 14“. Da die „13“ nicht in der Reihe vorkommt, wird diese als ungerade gedeutet. Es zeigt sich, dass er zur Deutung des *arithmetisch geprägten Zeichens* einen *arithmetisch geprägten Referenzkontext* nutzt. Innerhalb dieser Deutung nutzt er die *ordinale Anordnung gerader Zahlen innerhalb der Zahlenfolge der natürlichen Zahlen*.



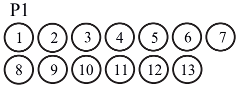


Helena: *[nimmt P4] Das ist wieder wie das da [zeigt auf P1], da [zeigt auf die Lücke unter P4.8] ist wieder einer zu wenig [schiebt P4 unter P1].*

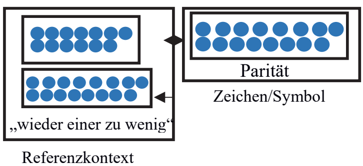
P4



P1



Helena deutet die Veranschaulichung „P4“ als *Zeichen geometrischer Ausprägung* hinsichtlich der Parität. Hierfür nutzt sie ein vorher gedeutetes Punktmuster: „P1“. Dieses hat sie zuvor als *Zeichen mit geometrischer Ausprägung* als ungerade gedeutet. „P1“ erhält nun eine neue epistemologische Bedeutung im Argumentationsprozess. Es wird vom fraglichen *Zeichen* zum neuen *Referenzkontext*, mit dem Helena das *geometrisch geprägte Zeichen* „P4“ deutet. Dabei stellt sie eine elementare Beziehung



zwischen den Darstellungen her. Diese bezieht sich auf ein gemeinsames *geometrisch-phänomenologisches Merkmal* „wieder einer zu wenig". Sie beachtet nicht, dass sich wesentliche Strukturmerkmale der beiden Punktmuster unterscheiden. Das in der Argumentation fraglich gemachte *Zeichen* und der *Referenzkontext* sind *geometrischer Ausprägung*. Interessant ist, dass ein vorher fraglich gemachtes Zeichen nun den Referenzkontext darstellt. Innerhalb ihrer Deutung bezieht sie sich dabei auf ein *geometrisch-phänomenologisches Merkmal*.

An den Beispielen zeigen sich zwei charakteristische Merkmale von Argumentationsprozessen unter Nutzung von Anschauungsmitteln. Erstens: Das Anschauungsmittel nimmt im Argumentationsprozess unterschiedliche Rollen ein. Zum einen sind die den Kindern vorgelegten Veranschaulichungen zu deutende Zeichen. Zum anderen, können Veranschaulichungen als individueller Referenzkontext innerhalb der Argumentation herangezogen werden und so als Argumentationsvoraussetzungen dienen. Zweitens: Veranschaulichungen mit geometrischer Ausprägung werden von Kindern unterschiedlich gedeutet. Einige Kinder deuten diese vor dem Hintergrund eines geometrisch geprägten Referenzkontext, wie zum Beispiel Helena. Andere Kinder, wie zum Beispiel Jona, deuten sie arithmetisch. Dies kann zur Folge haben, dass das Anschauungsmittel seine direkte epistemologische Bedeutung verliert und nur noch arithmetisch argumentiert wird. Inwiefern diese charakteristischen Merkmale im Argumentationsprozess das begriffliche Verständnis beeinflusst, wird in weiteren Analysen ausgearbeitet.

Literatur

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: T.K. Nakahara M (Hrsg). Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematic Education, I, 55-69. Hiroschima, Japan: Nishiki Print Co. Ltd.

KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich – Beschluss vom 15.10.2004. München/Neuwied: Wolters Kluwer.

Miller, M. (1986). Kollektive Lernprozesse. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Otte, M. (1983). Texte und Mittel. ZDM, 83/4, 183-194.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective. Berlin, New York: Springer.

Welsing, F. (2018). Grundschulkinder argumentieren mit Anschauungsmitteln – Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2018, 1951 – 1954. Münster: WTM-Verlag.