Wieland WILZEK, Duisburg-Essen

Interaktive dynamische Visualisierungen als Unterstützungsangebot im Mathematikstudium – Chancen und Gefahren der Anschauung

Da Mathematik in der Schule und in der Hochschule unterschiedlich in Erscheinung tritt, sehen sich Studierende eines mathematischen Studiums einer Reihe von Schwierigkeiten gegenüber. Die Schwierigkeiten können in verschiedenen Bereichen zum Tragen kommen. Gerade in den Fachstudiengängen machen aber die abstrakte Begriffsbildung, der höhere Formalisierungsgrad und die strengere deduktive Beweisführung eine besondere Herausforderung aus. Um Studierende hier eine Unterstützung zu bieten, können interaktive dynamische Visualisierungen als ein optionales Angebot zum Selbststudium bereitgestellt werden.

Interaktive Dynamische Visualisierungen: Ein Beispiel

An der Universität Duisburg-Essen werden die Visualisierungen über die Lernplattform Moodle bereitgestellt. Neben den mit GeoGebra erstellten Visualisierungen ist jeweils auch ein einleitender Text vorhanden, in dem die Aussage des Satzes oder die Formulierung der Definition aus dem Vorlesungsskript zitiert und die Bedienung der Visualisierung erklärt wird. Außerdem werden den Lernenden Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge an die Hand gegeben, damit die Auseinandersetzung mit der Visualisierung angeregt und unterstützt wird. Wie eine solche Visualisierung im konkreten Fall aussehen kann, soll am Beispiel des Mittelwertsatzes demonstriert werden. Ein Eindruck des Materials kann in Abb.1 und 2 gewonnen werden, wobei die Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge zur besseren Lesbarkeit in den Fließtext aufgenommen wurden.

S.80 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der Mittelwertsatz (S.80) besagt, dass zu jeder auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) differenzierbaren Funktion f eine Stelle $\xi \in (a,b)$ existiert, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometrisch kann man das so deuten, dass eine Stelle ξ existiert, an der die Tangentensteigung gleich der Steigung der Sekanten durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

In der Visualisierung ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ gegeben, wobei durch Ziehen der blauen Punkte das Intervall $[a,b]$, auf das die Funktion eingeschränkt wird, verändert werden kann (a sollte aber links von b bleiben). Die Sekante und die Tangente (bzw. Tangenten) mit den zugehörigen Stellen ξ_1 und ξ_2 passen sich dabei dem betrachteten Intervall $[a,b]$ dynamisch an.

Abb.1: Einleitender Text der Visualisierung

- Verändern Sie das Intervall $[a,b]$ einige Male, bis Sie die Gültigkeit des Satzes geometrisch nachvollzogen haben.
- Kann man mit Hilfe der Visualisierung auch den Satz von Rolle darstellen?

- Warum wird bei dieser Funktion die Tangentensteigung manchmal an einer, manchmal an zwei Stellen, nie aber an drei oder mehr Stellen angenommen?
- Erklären Sie die folgende alternative Formulierung des Mittelwertsatzes: Die mittlere Steigung der Funktion im Intervall $[a, b]$ wird in einem inneren Punkt auch angenommen. (Hinweis: In dieser Formulierung erkennt man, woher der Satz seinen Namen hat.)

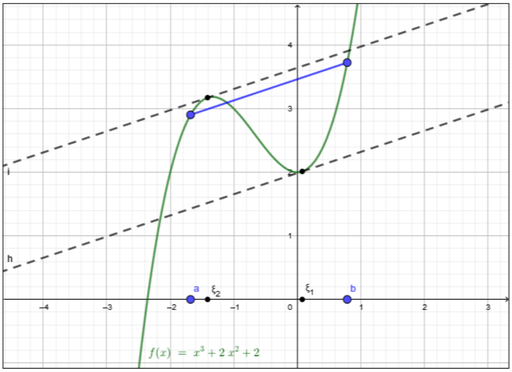

Abb.2: Visualisierung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Die Reflexionsanregungen und Arbeitsaufträge unterstützen sowohl die Vernetzung von formaler und anschaulicher Ebene, als auch die Vernetzung mit anderen Sätzen und Begriffen. Durch die Erklärung der Namensherkunft wird auch die persönlichen Sinnstiftung angeregt. Um die Frage nach der Anzahl an Stellen zu beantworten, kann man sich grafischer und algebraischer Argumente bedienen. Somit ist eine natürliche Differenzierung zu erkennen.

Praktische Erwägungen

Auf der einen Seite muss das Angebot aufgrund der Freiwilligkeit möglichst attraktiv gestaltet sein, denn man kann davon ausgehen, dass eine Visualisierung mit einem zu langen Text von Studierenden nicht bearbeitet wird. Auch eine Reduktion der Visualisierung auf das Nötigste scheint sinnvoll, um das Arbeitsgedächtnis nicht zu sehr zu belasten. Auf der anderen Seite müssen solche visuellen Darstellungen aber erklärt werden, da sie nicht selbstevident sind (Lorenz, 1998). Außerdem sollen die Arbeitsaufträge und Reflexionsanregungen dazu dienen, den Lernprozess zu entschleunigen, da computerunterstütztes Lernen zu einem zu schnellen und blinden Abarbeiten des Materials verführen kann. Von einer Visualisierung ohne oder mit sehr kurzem Text wurde daher abgesehen.

Neben der Veranschaulichung des bereits formal präsentierten Stoffes können auch weitere didaktisch wertvolle Impulse gegeben werden. So wurden im Beispiel oben auch Tätigkeiten des Vernetzens und der Sinnstiftung angeregt. Auch können die Grenzen von visuellen Darstellungen thematisiert werden, um einem kritischen Umgang mit anschaulichen Methoden zu erzielen. So sind Definitionslücken an einem Funktionsgraphen nicht zu erkennen, wenn die Funktion dort stetig fortsetzbar ist.

Anschauung in der Hochschullehre?

Da sich die Hochschullehre an den wissenschaftlichen Standards des Faches orientiert, ist es fraglich, ob ein Unterstützungsangebot, welches die anschaulich-inhaltliche Seite der Mathematik stärker betont, mit dem formal-deduktiven Aufbau der Mathematik verträglich ist. Um die Frage zu beantworten, muss zunächst geklärt werden, welche Funktionen die Anschauung beim Mathematiktreiben übernehmen kann.

Volkert (1986) nennt die *erkenntnisbegrenzende Funktion*, bei der es um die Klärung des epistemologischen Status der mathematischen Objekte geht. So galten die komplexen Zahlen lange Zeit lediglich als Hilfsobjekte, bis Gauß das anschauliche Modell der komplexen Zahlenebene entwarf. Weiter nennt Volkert die *erkenntnisleitende Funktion*. Hier soll die Anschauung als Heuristik fungieren, wenn zum Beispiel Probleme der Analysis durch eine grafische Betrachtung gelöst werden, um die so gewonnene anschauliche Beweisidee zu formalisieren. Die Beweisidee muss dann noch der formalen Überprüfung standhalten. Auch können Vermutungen durch anschauliche Untersuchungen von Beispielen aufgestellt werden. Bei der dritten Funktion, die von Volkert *erkenntnisbegründende Funktion* der Anschauung genannt wird, geht es um das Führen von Beweisen mithilfe von anschaulichen Argumenten. Während alle drei Funktionen in der Schule eine Relevanz haben, ist in der wissenschaftlichen Mathematik nach heutigen Standards laut Volkert nur die zweite anzutreffen.

Doch kann die Anschauung speziell für das Lernen von Mathematik positive Effekte haben. Zum einen kann sie als mnemotechnische Stütze dienen, da Informationen, die sprachlich und bildlich repräsentiert werden, besser behalten werden können. Tall et al. (2002) berichten von einem Lerntyp, bei dem die formale Definition eines mathematischen Begriffes bei Bedarf an einem anschaulichen Vorstellungsbild rekonstruiert werden kann. Zum anderen kann die Einbeziehung von anschaulichen Elementen in der Hochschullehre die persönliche Sinnstiftung unterstützen. Hierfür wurde oben bereits ein Beispiel gegeben. Es soll die Frage in den Raum gestellt werden, ob und in welchem Umfang die historische Entwicklung von Begriffen, inner- und außermathematische Anwendungsbezüge sowie Aktivitäten des Vernetzens auch Bildungsziele fachmathematischen Studiums sein sollen.

Gegen Anschauung in der Hochschullehre spricht, dass anschauliche Elemente in der Regel beispielgebunden sind. Tall und Bakar (1992) berichten von Studierenden, die aufgrund ungünstiger Prototypen des Funktionsbegriffs zu Fehleinschätzungen kommen. Obwohl in der Schule Funktionen als eindeutige Zuordnung charakterisiert werden, komme es häufig zu speziellen Annahmen, wie der Notwendigkeit eines Funktionsterms, da alle Beispiele im Schulkontext, diese Eigenschaft beinhalten würden. Grundsätzlich ist die Gefahr zu sehen, dass durch Anschauung in der Hochschullehre die Beschäftigung mit Mathematik im Niveau abgesenkt wirkt.

Diese Argumente lassen sich abschwächen, wenn lediglich die erkenntnisleitende Funktion der Anschauung Eingang in die Lehre erhält und dies auch den Studierenden gegenüber transparent gemacht wird. Auch können Betrachtungen, die anschaulich motiviert werden, durchaus hohes Niveau haben, wenn sie entsprechend angeregt werden.

Fazit

An der Universität Duisburg-Essen wird das Angebot der Visualisierungen von den Dozentinnen und Dozenten der Analysis akzeptiert und in die Lehre eingebunden. Jedoch sind die Zugriffszahlen durch die Studierenden relativ niedrig, sodass die Attraktivität des Angebots noch verbessert werden sollte. Um die Wirkweisen der Maßnahme besser zu verstehen, findet im Rahmen eines Dissertationsprojektes qualitative Begleitforschung statt.

Literatur

Lorenz, Jens Holger (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. [mentales visuelles Operieren und Rechenleistung]. Zugl.: Göttingen, Univ., Habil.-Schr. 2., unveränd. Aufl. Göttingen: Hogrefe.

Tall, D. & Bakar, Md., Nor. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23 (1), 39–50.

Tall, David; Pinto, Márcia Maria, Fusaro (2002): Building Formal Mathematics on Visual Imagery: A Case Study and a Theory. In: For the Learning of Mathematics 22 (1), S. 2–10.

Volkert, K. T. (1986). *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850* (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Bd. 3). Zugl.: Saarbrücken, Univ., Diss. Göttin-gen: Vandenhoeck und Ruprecht.