

## **Die Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme in der Grundschule – Eine vergleichende Schulbuchanalyse**

### **1 Theoretischer Hintergrund**

Kombinatorische Anzahlbestimmungen spielen u. a. im Kontext von Wahrscheinlichkeiten eine zentrale Rolle. Dabei stehen zur Anzahlbestimmung verschiedene Zugänge zur Verfügung: strukturierte Auflistungen, Zählprinzipien und kombinatorische Operationen sowie verschiedene Darstellungen. Diverse Studien zeigen, dass Lernende große Schwierigkeiten beim Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme haben (vgl. u. a. Batanero et al., 1997). Als ursächlich wird ein fehlendes konzeptuelles Verständnis der verschiedenen Zugänge und ihrer Beziehungen angenommen, welches auch auf die Art und Weise der Thematisierung zurückgeführt wird (vgl. Lockwood, 2014). Eine Langzeitstudie von Maher et al. (2010) zeigt, dass ein dem genetischen Prinzip folgender Unterricht, in dem kombinatorische Inhalte spiralförmig von der Grundschule bis in die Sekundarstufe thematisiert werden, dazu beiträgt, ein kombinatorisches Verständnis zu entwickeln. Ein empirisch fundiertes, konkretes unterrichtliches Konzept liegt bislang jedoch für keine Schulstufe vor. Da Untersuchungsergebnisse zeigen, dass Lernende schon in der Grundschule in der Lage sind, eigenständig tragfähige Strukturierungsstrategien zu entwickeln und erste Zählstrategien daraus abzuleiten, die bereits den Grundideen der kombinatorischen Zählprinzipien entsprechen (vgl. u. a. Höveler, 2014), empfiehlt Höveler (2014), neben der Thematisierung der notwendigen Disjunktheit der zu zählenden Mengen, eine Schwerpunktsetzung auf diese beiden Aspekte. Darüber hinaus wird empfohlen, die Strategien und Konzepte im Sinne der fortschreitenden Schematisierung (Treffers, 1983) zu behandeln, wie dies bspw. in Ansätzen in dem Fünf-Phasenmodell von Schipper et al. (2015) wiederzufinden ist.

*Doch wie sieht der aktuelle Unterricht zur kombinatorischen Anzahlbestimmung in deutschen Grundschulen aus? Inwiefern folgt er diesen Grundgedanken und welcher Veränderungen bedarf es ggf., um Lernende bei der Entwicklung kombinatorischer Anzahlbestimmungsstrategien und eines konzeptuellen Verständnisses zu unterstützen?*

### **2 Forschungsinteresse und Untersuchungsdesign**

Da entsprechende empirische Erkenntnisse bislang fehlen, liegt das Interesse der vorliegenden Studie darin, zu erheben, inwiefern die aktuelle Unterrichtspraxis zu kombinatorischen Anzahlbestimmungsproblemen den in der

Literatur benannten didaktischen Empfehlungen folgt und wie sich dies auf die Kompetenzen der Lernenden auswirkt. Dazu wird zunächst die Thematisierung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme im Medium *Schulbuch* untersucht, da dieses „Instrument [...] des Lehrens und Lernens“ (Rezat, 2009, S. 26) die aktuelle Unterrichtspraxis zu einem gewissen Teil spiegelt. Anknüpfend sollen Lehrkräfte bezüglich der Gestaltung des Unterrichts und vorgenommener Schwerpunktsetzungen befragt und die kombinatorischen Kompetenzen von Lernenden aus diesen Klassen erhoben werden. In diesem Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse der Schulbuchanalyse zu folgenden Fragestellungen präsentiert:

*F. 1: Inwiefern wird die Entwicklung von (konkreten) tragfähigen a) Strukturierungsstrategien und b) Zählstrategien als Basis für Zählprinzipien gezielt thematisiert? F. 2: Inwiefern folgen die Darstellungen in den Schulbüchern dem Ansatz der fortschreitenden Schematisierung?* Der Überprüfung der zweiten Frage diente das Fünf-Phasenmodell von Schipper et al. (2015).

Zur Beantwortung der Fragen wurden die aktuellen NRW-Ausgaben der Schulbücher *Denken und Rechnen (DuR)*, *Das Zahlenbuch (Zb)*, *Fredo (F)*, *eins zwei drei (ezd)* und *ZahlenZauber (ZZ)* sowie die dazugehörigen Lehrerkommentare (Lk) hinzugezogen und analysiert. Auswahlkriterien waren die Behandlung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme über mindestens drei Schuljahre hinweg, die Häufigkeit der Verwendung in Schulen (*Zb*, *DuR*) sowie besondere konzeptuelle Ansätze (*ezd*, *ZZ*, *F*). Die Datenanalyse erfolgte mittels Qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) in Form eines deduktiv entwickelten Kategoriensystems bezüglich der Strukturierungsstrategien, der Zählprinzipien und des adaptierten Phasenmodells.

### 3 Untersuchungsergebnisse

Hinsichtlich der Thematisierung von Strukturierungsstrategien (F. 1a) fällt auf, dass in den Schulbüchern und den Lehrercommentaren von einem notwendigen strukturierten Vorgehen gesprochen wird (vgl. Tab., K. I, Z. 1). Konkrete Impulse, die die Lernenden auffordern, Kriterien für geeignete Strategien zu entwickeln, und Anregungen zum Austausch über konkrete, tragfähige Strategien werden Lehrenden und Lernenden nicht gegeben.

Bezüglich individueller Zählstrategien, als Basis für die Ableitung kombinatorischer Zählprinzipien (F. 1b), zeigt die Analyse, dass diese in den Schulbüchern sehr selten thematisiert werden (vgl. Tab., K. II). Anregungen zur Entwicklung individueller Zählstrategien sind in den Schulbüchern kaum zu finden: In *ZahlenZauber 2* und in *eins zwei drei 2* gibt es je eine Aufgabenreihe, die das Additions- bzw. Rekursionsprinzip impliziert (vgl. Tab., K. II,

Z. 7 & 8) und ein zählendes Vorgehen, abgeleitet vom strukturierten Auflisten, anregt. Auffällig ist, dass das Baumdiagramm in allen Schulbüchern als Veranschaulichung verwendet wird, das aus der Darstellung ableitbare Kreuzprodukt, das allgemeine Zählprinzip und deren Besonderheiten jedoch nicht explizit behandelt werden – obwohl die Lehrerkommentare zu *Das Zahlenbuch 2, 3* und *eins zwei drei 2* diesen Zusammenhang als Hintergrundwissen für Lehrpersonen angeben.

	Zb 1-4/ Lk 1-3	ZZ 1-4	DuR 1-4 Lk 1,2,4	F 1-4 Lk 1	EZD 1-3 Lk 1-3
Anzahl Aufgabenserien					
1) Fokussierung allgem. strukturiertes Vorgehen					
2) Fokussierung Tachometer					
3) Fokussierung anderer Sst					
1) Allgem. Zählprinzip (inkl. Kreuzprodukt)					
2) Kreuzprodukt explizit					
3) Kreuzprodukt implizit					
4) Additionsprinzip					
5) Rekursionsprinzip					
1: Individuelle Vorgehensweisen					
2: Austauschen über versch. Vorgehensweisen					
3: Systematisieren von Sst					
4: Verallgemeinern: Variationen					
5: Verallgemeinern: Reflexion					
Erläuterung					

**Tab.:** Ergebnisse der Schulbuchanalyse

Hinsichtlich der zweiten Frage sind die Ergebnisse sehr differenziert zu betrachten. So scheint die Phasierung nach Schipper et al. (2015) auf den ersten Blick Berücksichtigung zu finden. Der Tabelle ist zu entnehmen, dass *individuelle Vorgehensweisen* immer einbezogen werden und einen hohen Stellenwert in den Schulbüchern einnehmen (vgl. Tab., K. III, Z. 1). Auch das *Verallgemeinern* bezüglich der *Variationen der Inhalte, Anzahlen und kombinatorischen Figuren* wird häufig innerhalb der Aufgaben eines Schuljahres implementiert, allerdings fehlt in den meisten Fällen eine *Reflexion über Auswirkungen der Variationen* auf die Strukturierungs- und Zählstrategien

(vgl. Tab., K. III, Z. 4 & 5). So werden zwar in den Schulbüchern, z. B. durch die Veränderung der Anzahlen, zueinander analoge Aufgabenstellungen abgebildet, doch Anregungen zur Thematisierung der strukturellen Beziehungen und Verallgemeinerung von Strukturierungsstrategien und Verkürzungen in Form von Zählstrategien sind nicht zu finden. Dieses Ungleichgewicht, zugunsten der Notation aller Möglichkeiten, ohne gezielte Herausarbeitung von Kriterien zur Entwicklung tragfähiger Strategien, lassen den Schluss zu, dass die Darstellungen in den Schulbüchern dem Ansatz der fortschreitenden Schematisierung nicht vollständig folgen.

#### 4 Diskussion und Ausblick

Die ersten Ergebnisse der Schulbuchanalyse zeigen, dass die didaktischen Empfehlungen zu den Inhalten (Thematisierung tragfähiger Strukturierungsstrategien und Ableitung individueller Zählstrategien als Basis zur Entwicklung kombinatorischer Zählprinzipien) und zur Art und Weise der Behandlung kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme (fortschreitende Schematisierung) in den Schulbüchern nur zu geringen Teilen berücksichtigt werden. Anzunehmen ist, dass sich dies auch im Unterricht widerspiegelt. Zur Sicherung dieser Annahme sind jedoch weitere Erhebung u. a. durch Lehrerbefragungen notwendig. Bestätigen sich die Ergebnisse, ist die Entwicklung von Materialien inklusive konkreter didaktischer Empfehlungen notwendig, die von individuellen Vorgehensweisen ausgehen und das Reflektieren über die und das Verallgemeinern der tragfähigen Strategien anvisieren.

#### Literatur

- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181–199.
- Höveler, K. (2014). Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern. TU Dortmund, Dortmund. Abgerufen von <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-15563>
- Lockwood, E. (2014). A Set-Oriented Perspective on Solving Counting Problems. *For the Learning of Mathematics*, 34(2), 31–37.
- Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Hrsg.). (2010). *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms*. New York: Springer Science+Business.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. (11., aktual. u. überarb. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.
- Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. Ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *mathematik lehren*, 1, 16–20.
- Die Schulbuchliteraturliste kann bei Janet Winzen ([j.winzen@wwwu.de](mailto:j.winzen@wwwu.de)) erfragt werden.