

Computertomographie als authentisches Modellierungsthema

Ein Workshop des Schülerlabors CAMMP

Kirsten Wohak, Martin Frank

Kontext

Um zu überprüfen, ob Knochen oder Organe bei einem Unfall verletzt wurden oder, ob ein Patient einen Tumor hat, werden Computertomographen verwendet. Der Patient wird mit Röntgenstrahlen bestrahlt und die Ärzte erhalten ein Abbild des Querschnitts der untersuchten Körperstelle. Dabei stellen verschiedene Grauwerte unterschiedliche Materialien dar, die beim Durchstrahlen die Strahlen verschieden stark abschwächen durch Absorption. Doch wie ist es möglich mithilfe der Röntgenstrahlen Abbildungen der inneren Struktur der durchstrahlten Körperteile zu erhalten?



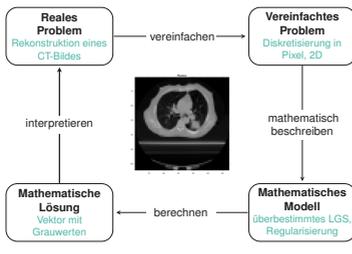
CAMMP

CAMMP steht für **Computational and Mathematical Modeling Program** (Computergetütztes Mathematisches Modellierungsprogramm). Im Rahmen verschiedener Veranstaltungsformate steigen Schüler/innen **aktiv in das Problemlösen** mithilfe von **mathematischer Modellierung und Computersatz** ein. Bei den Problemstellungen handelt es sich um **echte Probleme** aus Alltag, Industrie und Forschung.

- CAMMP day** Modellierungstag
- CAMMP week** Modellierungswoche für Schüler/innen
- CAMMP week pro** Modellierungswoche für Studierende
- CAMMP trainee** Modellierungspraktikum
- CAMMP teaching Stipendium** Lehrerausbildung und -fortbildung Förderstipendium für Schüler/innen

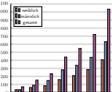


Mathematischer Modellierungskreislauf



Erfahrung bei CAMMP days

Anzahl Schüler/innen:



Bisher Erreichtes:
 ■ 173 CAMMP days
 ■ 3192 Schüler/innen
 ■ 11 Module

Angeborene Module:



Kontakt

Kirsten Wohak
 wohak@kit.edu
 Steinbuch Center for Computing (SCC),
 Karlsruher Institut für Technologie (KIT)



CAMMP
 cammp@scs.kit.edu
 www.scc.kit.edu/forschung/CAMMP

Inverse Probleme

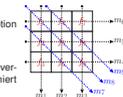
Bei inversen Problemen versucht man, Informationen über ein unbekanntes Objekt zu erhalten, indem man **ungenaue, indirekte Daten** verwendet. Typischerweise werden diese Daten durch ein Phänomen der Physik erzeugt. Sorgen kleine Fehler in den Daten für riesige im Objekt spricht man von einem **schlecht gestellten inversen Problem**. Die Rekonstruktion eines Bildes bei der Computertomographie stellt ein solches Inverses Problem dar. Es müssen deshalb die **drei Bedingungen von Hadamard** überprüft werden:

- **Existenz:** Es sollte mindestens eine Lösung existieren.
- **Eindeutigkeit:** Es sollte höchstens eine Lösung existieren.
- **Stabilität:** Die Lösung sollte stetig von den Daten abhängig sein.

Am Beispiel der Computertomographie

Annahmen und Vereinfachungen

- Unterteilung des Objekts in n Pixel mit konstanter Absorption pro Pixel.
- Absorptionskoeffizienten werden als Grauwerte verstanden.
- Die Grauwerte $f_i, i = 1, \dots, n$, der Pixel durch den ein Strahl verläuft, werden, entsprechend der Länge gewichtet, aufsummiert und ergeben die Messwerte m_j .



Vereinfachtes Modell mit neun Pixeln

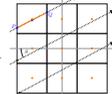
Bestimmung der Grauwerte bei gegebenem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \end{pmatrix}$$

Es werden mehr Strahlen benötigt, um ausreichende Informationen zur eindeutigen Bestimmung der Grauwerte zu haben.

Modellierung des Verlaufs der Strahlen durch die Pixel

- Beschreibung der Strahlen als Geraden im \mathbb{R}^2
- Bestimmung der Schnittpunkte mit den Pixelkanten
- Bestimmung der zurückgelegten Länge pro Pixel
- Bestimmung des Pixels in dem der Strahl sich zum gegebenen Zeitpunkt befindet
- Aufstellen der Matrix für das Gleichungssystem



Erste Rekonstruktion mit Berücksichtigung von Messfehlern

- Minimiere $h(\vec{f}) = \|A \cdot \vec{f} - \vec{m}\|_2^2$
- Auflösen nach \vec{f} liefert

$$\vec{f} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \vec{m}$$



Zweite Rekonstruktion durch Tikhonov-Regularisierung unter Berücksichtigung von Messfehlern

- Minimiere $h(\vec{f}) = \|A \cdot \vec{f} - \vec{m}\|_2^2 + p \cdot \|\vec{f}\|_2^2$
- Betrachtung eines kleinen Beispiels:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$



- Umformung zu $h(\vec{f}) = (A_{1,1} \cdot f_1 + A_{1,2} \cdot f_2 - m_1)^2 + (A_{2,1} \cdot f_1 + A_{2,2} \cdot f_2 - m_2)^2 + p \cdot (f_1^2 + f_2^2)$
- Die Ableitung nach f_1 und f_2 liefert $\nabla_{\vec{f}} h(\vec{f}) = 2 \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{f} - 2A^T \cdot \vec{m} + 2 \cdot p \cdot \vec{1} \vec{f} \stackrel{!}{=} 0$
- Auflösen nach \vec{f} liefert $\vec{f} = (A^T \cdot A + p \cdot \mathbb{1})^{-1} \cdot A^T \vec{m}$

Referenzen

- Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.) (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule, Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Grunne, T., Kluge, W., Lange, S., Meese, W. & Ringel, K. (1988). *Zerebrale und spinale Computertomographie*. Berlin: Schering AG.
- Heinrich, F., Bruder, R., & Bauer, C. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik. Problemösen lernen*. Berlin: Springer Verlag.
- Museller, J. L. & Siliacus, S. (2012). *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.