

Was Lehrkräfte unter mathematischem Argumentieren verstehen

Mathematisches Argumentieren ist ein unumgängliches Mittel, um sich über individuelle Vorstellungen zu mathematischen Inhalten im Unterrichtsdiskurs auszutauschen und deren Bedeutung auszuhandeln. In der Realität sind mathematische Begründungen und eigenständiges Beweisen oft jedoch kein fester Bestandteil von Mathematikunterricht (Reiss, 2002). In der Schule dominieren häufig formale Beweise oder kalkülorientierte Argumentationen (Brunner, 2014), sofern diese überhaupt thematisiert werden. Solche Argumentationen stellen oft eine hohe epistemologische Anforderung für Schülerinnen und Schüler dar, da sie einen hohen Abstraktionsgrad beinhalten und losgelöst von konkreten Beispielen sind. Als Einführung mathematischen Argumentierens sind sie eher ungünstig, vielmehr ein finales Ziel, das erst bedeutungsvoll aufgebaut werden sollte. „Daher wird gefordert, dem Argumentieren, Begründen und Beweisen im Unterricht mehr Raum zu geben und dabei nicht nur formales Beweisen, sondern auch andere Begründungsformen zu kultivieren.“ (Meyer & Prediger, 2009, S. 1). Voraussetzung dafür ist, dass Lehrkräfte sich dieser Problematik bewusst sind, selbst ein fachlich angebrachtes Verständnis mathematischen Argumentierens haben und sich ihre Rolle bei kollektiven Argumentationen vergegenwärtigen.

Motivation und Forschungsinteresse

Bisher ist wenig erforscht, wie Lehrkräfte kollektive Argumentationen im Mathematikunterricht unterstützen, welche Typen von Argumenten sie im Unterricht kultivieren und wie ihr Handeln kollektive Argumentationen im Unterrichtsdiskurs beeinflusst. Das im Vortrag vorgestellte Forschungsprojekt möchte einen Beitrag zu dieser Forschungslücke leisten und legt einen Schwerpunkt im Bereich des Übergangs von der Arithmetik zur Algebra. Die übergeordneten Forschungsfragen aus diesem Projekt lauten: Wie kann eine Lehrkraft ihre Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung von strukturorientierten Argumentationen konstruktiv unterstützen? Wie sieht ein Unterrichtsdesign für die Entwicklung von strukturorientierten Argumentationen im Mathematikunterricht aus? In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse des Projektes bezüglich der Vorstellungen und dem Vorwissen von drei Lehrkräften zum mathematischen Argumentieren vorgestellt.

Theoretischer Hintergrund

Mathematische Argumentationen und Beweise „[...] spielen sich in einem mathematischen Diskurs ab, in dessen Rahmen es darum geht, eine rationale

Begründung zu formulieren bzw. eine solche innerhalb einer fachlichen (Lern-)Gemeinschaft auf ihre Überzeugungskraft hin zu prüfen.“ (Brunner, 2014, S. 230). Dieser Austausch findet im Mathematikunterricht oftmals im Unterrichtsgespräch statt, welches durch die Lehrkraft moderiert oder geleitet wird. Die Lehrkraft benötigt nach Steele und Rogers (2012) Vorwissen bezüglich des Beweisens, um diese Kompetenzen auch ihren Schülerinnen und Schülern vermitteln zu können. In dem von Steele und Rogers (2012) vorgelegtem Rahmenwerk werden vier Komponenten an Wissen unterschieden, die Lehrkräfte benötigen, um Beweise unterrichten zu können: Das Definieren von Beweisen, das Erkennen von korrekten Beweisen, das Verstehen der Rolle von Beweisen in der Mathematik und das Erstellen von Beweisen. Diese Komponenten haben wiederum verschiedene Charakteristika, auf die in der Darstellung der Ergebnisse näher eingegangen wird.

Methodisches Vorgehen

In meiner Studie wurden zunächst das Vorwissen und die Vorstellungen von drei Lehrkräften zum mathematischen Argumentieren erhoben. Die Interviews wurden mittels eines Leitfadens mit Fragen zum mathematischen Argumentieren geführt. Zusätzlich wurden den Lehrkräften fiktive Schülerlösungen zur Begründung einer mathematischen Aussage präsentiert, um zu erfassen, wie sie verschiedene Typen von Argumenten bewerten. Neben den Interviews haben die Lehrkräfte eine von mir konstruierte Lernumgebung empirisch erprobt, was in diesem Beitrag jedoch aus Platzgründen nicht näher erläutert werden kann.

Zur Analyse der Daten wurden zunächst Transkripte von dem empirischen Material (Audioaufnahmen) erstellt. Daraufhin wurden die Interviews mittels der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012) ausgewertet. Dabei wurden induktive Kategorien aus dem empirischen Material erstellt, die wiederum mit dem Rahmenwerk von Steele und Rogers (2012) in Verbindung gebracht wurden. Die Komponenten wurden analog zum mathematischen Argumentieren ausgewertet. Dabei wird fokussiert, welche Charakteristika empirisch genannt wurden und welche Differenzen es zu den Charakteristika aus dem Rahmenwerk gibt.

Erste Ergebnisse

Die Lehrkräfte in dieser Studie zeigen verschiedene Vorstellungen und unterschiedliches Vorwissen bezüglich des mathematischen Argumentierens. Während Lehrkraft 1 ein eher formales, abstraktes Verständnis vom mathematischen Argumentieren hat und formale Regeln und logische Verkettungen in den Vordergrund stellt, versteht Lehrkraft 3 mathematisches Argumentieren offener, eher im Sinne der Kompetenz „Kommunizieren“.

Lehrkraft 2 versteht mathematisches Argumentieren als ein Weg mathematische Ideen glaubhaft und überzeugend zu kommunizieren. Damit zeigen die Lehrkräfte deutlich unterschiedliche Verständnisse vom mathematischen Argumentieren. Lediglich die Vorstellungen von Lehrkraft 1 lassen sich ansatzweise in Verbindung mit dem Rahmenwerk von Steele und Rogers (2012) bringen. Analog kann man zum „Verständnis der Rolle von mathematischen Argumentationen“ sagen, dass Lehrkraft 1 mathematisches Argumentieren als Mittel zum inhaltlichen Lernen und einer Systematisierung sieht, während Lehrkraft 2 und 3 auf das Kommunizieren fokussieren.

Bezüglich der Komponente „Erkennen von korrekten Argumenten“ hat Lehrkraft 1 keine Probleme korrekte Argumente von unvollständigen oder falschen Argumenten zu unterscheiden, während Lehrkraft 2 und 3 dabei teilweise falsche Entscheidungen treffen. Während Lehrkraft 2 algebraische Argumente bevorzugt und andere Typen von Argumenten oftmals nicht als korrekt anerkennt, sind für Lehrkraft 3 alle fiktiven Schülerlösungen korrekte Argumente, auch wenn sie nicht allgemeingültig sind oder inhaltliche Fehler enthalten.

Die Lehrkräfte haben auch unterschiedliche Erwartungen an ihre Lernenden beim mathematischen Argumentieren. Lehrkraft 1 erwartet von ihren Schülerinnen und Schülern, dass sie einen tieferen Einblick in mathematische Strukturen erlangen, formale und logische Regeln einhalten. Dagegen sind Lehrkraft 2 und Lehrkraft 3, die Einhaltung von sozialen Regeln, wie Gesprächsregeln, beim mathematischen Argumentieren sehr wichtig. Für Lehrkraft 2 ist zunächst der Inhalt der Argumentationen entscheidend, wobei Fachsprache zunehmend Bedeutung erlangt und die Lernenden eindeutige Aussagen treffen sollen. Lehrkraft 3 ist die Nutzung von Fachsprache wichtig, aber vor allem erwartet sie, dass die Lernenden ihre Aufgabenlösung erklären können.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse gegliedert dargestellt.

| | Lehrkraft 1 | Lehrkraft 2 | Lehrkraft 3 |
|--|---|--|--|
| Definition vom mathematischen Argumentieren | - als allgemeingültig. - Verkettung führt zu logischen Schlussfolgerungen. | - Mittel und Wege, um etwas glaubhaft zu erklären. | - Kompetenz einem anderen Lernenden etwas zu erklären. |
| Verständnis der Rolle von mathematischen Argumentationen in der Mathematik | - um eine Systematisierung des Bereichs zu erhalten. - in allen Themenbereichen der Mathematik relevant. - um inhaltliches Lernen zu ermöglichen. | - um mathematische Ideen zu kommunizieren. - um Verständnis zu erzeugen. - in allen Themenbereichen der Mathematik relevant. | - um mathematische Ideen zu kommunizieren. |

| | | | |
|--|--|--|--|
| Erkennen von korrekten Argumenten | <ul style="list-style-type: none"> - unterscheidet zwischen korrekten und falschen oder unvollständigen Argumenten - erkennt Argumente in verschiedenen Darstellungsformen | <ul style="list-style-type: none"> - unterscheidet nur bedingt zwischen korrekten und falschen oder unvollständigen Argumenten | <ul style="list-style-type: none"> - unterscheidet nur bedingt zwischen korrekten und falschen oder unvollständigen Argumenten |
| Erwartungen an die Lernenden beim mathematischen Argumentieren | <ul style="list-style-type: none"> - tieferen Einblick in die mathematische Struktur zu erlangen. - logische bzw. formale Regeln müssen eingehalten werden. | <ul style="list-style-type: none"> - fachlicher Inhalt relevant. - Fachsprache ab einem gewissen Punkt notwendig. - eindeutige Aussagen. - soziale Regeln müssen eingehalten werden. | <ul style="list-style-type: none"> - Nutzung von Fachsprache. - Lösung von Aufgaben erklären. - soziale Regeln müssen eingehalten werden. |

Tab.: Vorstellungen der Lehrkräfte bezüglich des mathematischen Argumentierens

Fazit und Ausblick

Die Lehrkräfte haben unterschiedliche Vorstellungen zum mathematischen Argumentieren und stellen verschiedene Erwartungen an ihre Lernenden. Wie sich dies auf die Umsetzung der Lernumgebung auswirkt, wird im weiteren Verlauf dieser Studie untersucht. Es ist davon auszugehen, dass die drei Lehrkräfte unterschiedliche Schwerpunkte in ihrem Unterricht setzen und auch die Lernenden daher anders argumentieren. Während Lehrkraft 1 vermutlich formale Argumente fokussiert, geben Lehrkraft 2 und 3 dem Kommunizieren voraussichtlich mehr Raum und Abgrenzungen zwischen richtigen und falschen Argumenten bleiben möglicherweise unklar. Lehrkraft 3 wird vermutlich mehrere Typen von Argumenten integrieren. In der weiteren Auswertung wird daher ein besonderer Fokus auf die kollektiven Argumentationen der Lernenden und auf die Unterstützungen seitens ihrer Lehrkräfte gelegt.

Literatur

- Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 229–249.
- Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim u.a.: Beltz Juventa.
- Meyer, M., & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(30), 1–7.
- Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht*. Bayreuth: Universität.
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 159-180.