Esther BRUNNER, Thurgau (Schweiz)

Wie lassen sich schriftliche Begründungen von Schülerinnen und Schülern des 5. und 6. Schuljahrs beschreiben?

Die Bildungsstandards umschreiben für die Kompetenz mathematisches Argumentieren in der Sekundarstufe I drei verschiedene Anforderungsniveaus (Leiss & Blum, 2006) und unterscheiden dabei das Erstellen von Routineargumentationen (Anforderungsniveau I), das Nachvollziehen, Erläutern oder Entwickeln von überschaubaren mehrschrittigen Argumentationen (Niveau II) sowie das Nutzen, Erläutern oder Entwickeln von komplexen Argumentationen (Niveau III). Damit liegt eine Einteilung von gezeigten (mündlichen oder schriftlichen) Leistungen entlang von kognitiven Anforderungen vor. Diese Einteilung ist wichtig, aber sie vermag keinen weiteren Aufschluss über zentrale inhaltliche und formale Bearbeitungsweisen zu geben. Dies leisten qualitative Arbeiten, die mittels interpretativer Zugänge (z. B. Krummheuer, 2008; Krummheuer & Fetzer, 2005) eine Argumentation sehr präzise rekonstruieren und interpretativ analysieren oder episodisch nachzeichnen (z. B. Stylianides, 2016). Andere qualitativ orientierte Ansätze (z. B. Meyer, 2007; Schwarzkopf, 2015) bedienen sich formallogischer Strukturen und analysieren Argumentationen entlang des Toulmin-Schemas (Toulmin, 1996) oder orientieren sich an soziologischen Theorien (z. B. Cramer, 2015). Gemeinsam ist diesen Analysen, dass sie sich auf individuelle Prozesse konzentrieren und meist anhand von Einzelfällen hoch differenzierte, zeitaufwendige Mikroanalysen vornehmen. Solche Vorgehensweisen sind aber sowohl für mittel- bis hochinferente Analysen von Dokumenten aus großen Stichproben als auch für die inhaltliche Beurteilung von schriftlichen mathematischen Begründungen der Lernenden durch Lehrpersonen ungeeignet. Dafür fehlen bislang weitgehend Kodiersysteme und Beurteilungsraster, die Aufschluss über zentrale inhaltliche und formale Bearbeitungsaspekte solcher Dokumente geben würden und damit über eine Zuteilung zu kognitiven Anforderungsniveaus hinausgehen. Der vorliegende Beitrag möchte einen Vorschlag für ein solches Kodiersystem zur Diskussion stellen. Dafür gilt es zunächst, den *Prozess* des mathematischen Argumentierens etwas genauer zu beleuchten, durch den das *Produkt* einer (schriftlichen) Begründung zustande kommt.

Mathematisches Argumentieren: erforderliche Teilprozesse

Mathematisches Argumentieren im Elementar- und Primarbereich lässt sich grob entlang von vier zentralen Teilprozessen beschreiben (Lindmeier, Brunner, & Grüssing, 2018): 1) Kinder müssen eine bestimmte mathematische Struktur mit den diese konstituierenden Merkmalen *erkennen* können.

Diese Kompetenz wird u. a. an der Möglichkeit der Weiterführung der vorhandenen Struktur erkennbar. 2) Sie müssen die erkannte Struktur *beschreiben* und somit die relevanten Merkmale herausarbeiten können (Repräsentation der relevanten Struktur). 3) Sie müssen *Gründe finden und formulieren* können, warum die Struktur ent- oder besteht (Konstruktion einer Begründung). 4) Schließlich müssen sie im Einzelfall das Allgemeine erkennen und damit Einsicht darüber erlangen, warum etwas immer und notwendigerweise gilt bzw. gelten muss und davon ausgehend eine gültige *Verallgemeinerung entwickeln* können. Auf dieser Grundlage können sodann auch Vorhersagen für weitere Fälle getroffen und validiert bzw. falsifiziert werden. In diesem Schritt enthalten sind Verfahren zur Evaluation und Prüfung der vorgebrachten Begründung bezüglich ihrer Gültigkeit (Verallgemeinerung, Rekonstruktion und Reproduktion der mathematischen Begründung auf allgemeine Weise). Insbesondere bei jüngeren Lernenden ist zu erwarten, dass die beiden letzten Teilprozesse – das Begründen und Verallgemeinern – noch nicht in jedem Fall gezeigt werden, sondern sich erst in der Entwicklung befinden. Deshalb ergibt es Sinn, gezeigte Leistungen entlang der vier Teilprozesse zu analysieren, um auch erste Schritte angemessen zu erfassen, wenn die eigentliche Begründung oder Verallgemeinerung fehlt.

Zentral ist beim mathematischen Argumentieren, dass nur auf gesicherte Aussagen zurückgegriffen und akzeptierte Schlussregeln befolgt werden, die darüber hinaus nachvollziehbar repräsentiert und in einem sozialen Akzeptanzprozess als gültig anerkannt sein müssen (Jahnke & Ufer, 2015). Dies widerspiegelt auch die Beschreibung dreier Komponenten einer Argumentation, die Stylianides (2016) definiert. Demnach besteht eine Argumentation aus einem Set akzeptierter Statements, aus dem Modus der Argumentation sowie aus der Art der Repräsentation der Begründung.

Kodiersystem zur Analyse von Argumentationsprozessen

Um eine Begründung von Schülerinnen und Schülern kodieren zu können, können zum einen die vier Teilprozesse und zum anderen die drei Komponenten einer Argumentation herangezogen werden. Die vier Teilprozesse strukturieren den Denkprozess, während die drei Komponenten einer Argumentation die Art und Weise des Vorgehens beleuchten. Das Set akzeptierter Statements kann als zentrale Begründungsidee umschrieben werden und ist je nach Aufgabenstellung unterschiedlich. Deshalb braucht es eine aufgabenbezogene Kodierung für die inhaltliche Lösungsidee sowie die Beurteilung ihrer Korrektheit und ihrer Vollständigkeit. Die anderen beiden Komponenten können hingegen weitgehend inhaltsunabhängig erfasst werden. Der Modus der Argumentation kann beispielsweise entlang der verschiedenen Typen von Beweisen (Wittmann & Müller, 1988) differenziert werden.

Demnach ist zwischen *experimenteller* Begründung, *operativer* oder *inhaltlich-anschaulicher* Begründung und *formal-deduktiver* Begründung zu unterscheiden (Brunner, 2014). Für die Art der Repräsentation sind die Darstellungsebenen nach Bruner (1971) hilfreich. Unterschieden werden folgende Ebenen: *enaktiv* (entspricht der physischen Repräsentation bei Stylianides, 2016), *ikonisch* (entspricht der diagrammatisch/piktoralen Repräsentation), symbolisch, wobei diese letzte Ebene unterteilt wird in *sprachlich-symbolisch* und *formal-symbolisch*. Verbale Sprache wird als sprachlich-symbolisch interpretiert, formale mathematische Sprache hingegen als formal-symbolisch (Zech, 2002). Fehlend ist in dieser Darstellung die *tabellarische Form* einer Repräsentation (Stylianides, 2016), die als eine Mischform von symbolischen Darstellungen mit diagrammatisch/piktoraler gedeutet werden kann. Auf der Basis dieser Überlegungen wurde folgendes Kodierschema entwickelt (**Abb. 1**):

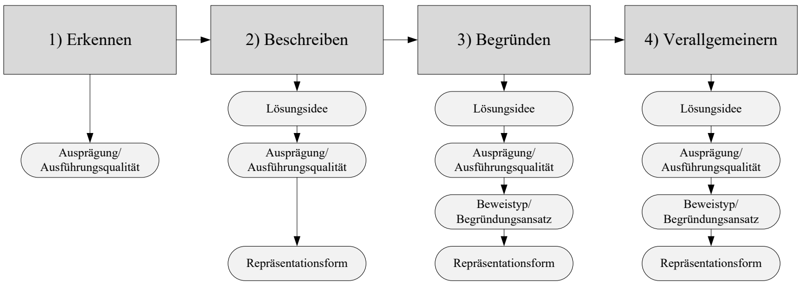

Abb. 1: Ablauf Codierung entlang der vier Teilprozesse

Kodiert wird entlang der Ergebnisse der vier Teilprozesse mathematischen Begründens. Jeder Teilprozess wird bezüglich seines Vorkommens – Nichtvorkommens eingeschätzt und im Fall des Vorkommens nach Ausprägungsgrad/Ausführungsqualität (Vollständigkeit, Korrektheit). Die Ergebnisse der Teilprozesse 2-4 (beschreiben, begründen und verallgemeinern) werden darüber hinaus auch bezüglich der inhaltlichen Lösungsidee und der verwendeten Repräsentationsform analysiert. Die Teilprozesse 3-4 werden zudem bezüglich des Beweistyps eingeschätzt (**Abb. 1**).

Ausblick

Das vorliegende Kodiersystem, ergänzt durch einen umfangreichen Kodierleitfaden, wird gegenwärtig im Rahmen einer Studie zur längschnittlichen Entwicklung von Argumentierleistungen von knapp 1000 Schülerinnen und Schülern des 3. bis 6. Schuljahres erprobt. Erste Angaben zu Gütekriterien und zur Praktikabilität des Kodiersystems sollten bis zur GDM 2019 vorliegen und werden dann im Beitrag ergänzt.

Literatur

Bruner, J. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J. Bruner, R. R. Olver, & P. M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 21–96). Stuttgart: Klett.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Cramer, J. (2015). Förderung der Entstehung mathematischen Argumentierens aus Perspektive der Diskursethik von Habermas. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 199–214). Münster: Waxmann.

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Heidelberg: Springer Spektrum.

Krummheuer, G. (2008). Inskription, Narration und diagrammatisch basierte Argumentation. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht (Band 2)* (S. 7–37). Münster: Waxmann.

Krummheuer, G., & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten. Verstehen. Gestalten.* Heidelberg: Spektrum.

Leiss, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.

Lindmeier, A., Brunner, E., & Grüssing, M. (2018). Early mathematical reasoning - Theoretical foundations and possible assessement. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 315–322). Umea, Schweden: PME.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: von der Abduktion zum Argument*. Franzbecker, Hildesheim; Berlin.

Schwarzkopf, R. (2015). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule: Ein Einblick. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 31–45). Münster: Waxmann.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford: Oxford University Press.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten (2. Aufl.).* Weinheim: Beltz.

Wittmann, E. C., & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim: Beltz.