Andreas DATZMANN & Matthias BRANDL, Passau

Vernetzung von Schul- und Hochschulgeometrie in der gymnasialen Lehramtsausbildung

Das Problem der doppelten Diskontinuität

Bereits vor mehr als 100 Jahren beschrieb Felix Klein die doppelte Diskontinuität – ein großes Problem des Bildungssystems – wie folgt:

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat." (Klein, 1908, S. 1)

Und dieses Problem besteht bis heute. Welcher Dozent kann sagen, dass er noch nie Kommentare wie „Warum brauche ich das, wenn ich Lehrer werden möchte?" gehört hat? Ein Hauptproblem, das sich aus dieser Haltung einiger Studierender ergibt, ist die geringere Motivation, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Dies führt zu dem oben genannten Problem, die elementare Mathematik auf die alte pedantische Weise zu unterrichten, und auch zu einem schlechteren Verständnis der Mathematik. Um dem Problem der doppelten Diskontinuität entgegenzuwirken, haben wir ein Lehrformat entwickelt, das die Zusammenhänge zwischen der in der Schule unterrichteten und an der Universität gelehrten Mathematik verdeutlichen soll.

Konzeption des Lehrformats

Mit seiner „Drei Welten der Mathematik"-Theorie beschreibt David Tall (2008) eine der Ursachen der ersten Diskontinuität. Ein Grund ist die Existenz einer aus der Anschauung heraus entwickelten und auf Prozessen basierenden Mathematik in der Schule („conceptual-embodied" bzw. „proceptual-symbolic") und einer axiomatisch aufgebauten, formalen Mathematik an der Hochschule („axiomatic-formal"). Der axiomatisch-formale Charakter der Hochschulmathematik, der sich stark von dem „conceptual-embodied" bzw. „proceptual-symbolic" Charakter der Schulmathematik unterscheidet, ist aber auch eine Ursache für die zweite Diskontinuität, denn die

Studierenden schaffen es während ihres Studiums nicht, diese Welten miteinander zu verknüpfen. Deshalb war eine der Ideen unseres Lehrformats, den aus der Schule bekannten, angewandten Konzepten in die axiomatisch-formale Welt der Hochschulmathematik zu folgen, – wenn möglich durch die historische Entwicklung – um die generischen Zusammenhänge zu erkennen. Ein Beispiel hierfür ist die Geschichte des Parallelenaxioms – angefangen mit Euklid bis hin zur Entwicklung der hyperbolischen Geometrie. Dass sich diese Zusammenhänge nicht von selbst herausbilden, wurde von Bauer und Partheil (2008) gezeigt. Als eine Lösung schlugen sie Kurse vor, die explizit die Schnittstellen zwischen Hochschul- und Schulmathematik diskutieren. Wir folgten diesem Vorschlag und konzentrierten uns auf geometrische Konzepte, die sowohl in der Schule als auch in der Hochschule thematisiert werden und verglichen, wie diese jeweils eingeführt werden, wie allgemein sie behandelt werden und auf welche Problemstellungen diese Konzepte zurückgehen. Dieser Ansatz sollte den Studierenden helfen, Zusammenhänge zwischen dem, was sie in der Schule gelernt haben und dem, was in der Universität gelehrt wird, zu erkennen und somit auch den Effekt der zweiten Diskontinuität verringern. Für die methodische Konzeption der einzelnen Sitzungen folgten wir einem Ergebnis von Krauss et al. (2008). Ein Dozierender soll nicht meinen, dass Mathematik am einfachsten durch Zuhören gelernt wird oder dass Studierende ständig kleinschrittig angeleitet werden müssen. Unser Lehrformat basiert deshalb auf einem zyklischen Schema aus theoretischem Input, komplexen Aufgaben und Diskussion der Ergebnisse. Dieses aufgabenbasierte Design soll die Studierenden beim Erkennen von Zusammenhängen unterstützen und sie darauf aufmerksam machen, dass die Hochschulmathematik oft nur eine Verallgemeinerung der Schulmathematik ist und nicht etwas komplett Verschiedenes – eine andere Welt sozusagen.

Blended learning und mathematische Landkarten

Um den Lernprozess der Studierenden zu unterstützen, ergänzten wir unser Lehrformat durch einen blended learning Anteil und mathematische Landkarten. Der blended learning Kurs enthält neben den für die einzelnen Sitzungen nötigen Definitionen, Sätzen und Beispielen auch Geogebra Applets, weiterführende Dokumente oder Links zu externen Seiten und jeweils ein kurzes Testmodul. Mathematischen Landkarten wurden von Brandl (2008) als ein didaktisches Hilfsmittel eingeführt, das Zusammenhänge innerhalb eines Bereichs der Mathematik und dessen zeitliche Entwicklung darstellen soll (Schwarz et al., 2017). Eine solche Darstellung liefert viele Möglichkeiten, um vernetztes Denken zu fördern. Für unser Lehrformat haben wir zwei Landkarten für den Bereich der Geometrie erstellt. Eine zeigt in drei

Dimensionen die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themen und Sätzen der Geometrie, die andere einen Zeitstrahl mit mathematischen Entdeckungen und einer kurzen Information über die jeweilige Entdeckung und die dafür verantwortliche Person, siehe Abbildung 1.

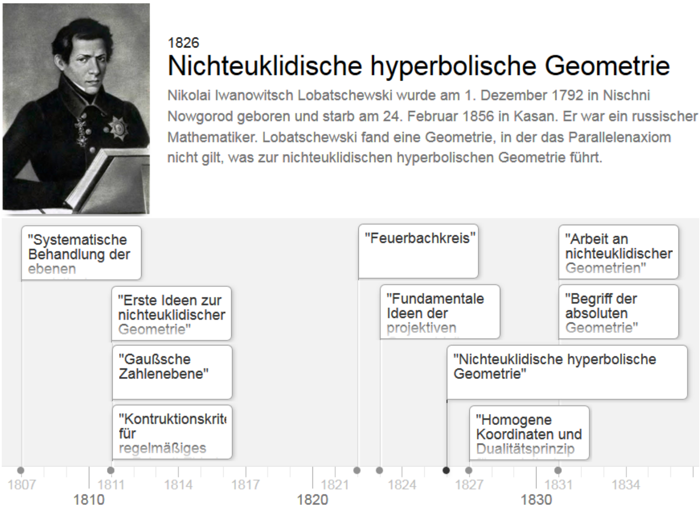

Abb. 1: Mathematische Landkarte zur zeitlichen Entwicklung, eigene Darstellung

Empirische Studie und theoretischer Rahmen

Um den Effekt unseres Lehrformats zu untersuchen, verwendeten wir das theoretische framework des concept image von Tall und Vinner (1981). Der Begriff concept image beschreibt „die gesamte kognitive Struktur, die mit dem Konzept verbunden ist und die alle mentalen Bilder und damit verbundenen Eigenschaften und Prozesse umfasst“ (Tall & Vinner, 1981, S. 2). Das concept image zu einem Begriff entsteht mit der Zeit, wenn man sich mit dem Begriff beschäftigt und verändert sich, wenn neue mentale Verknüpfungen hergestellt werden oder ältere Verknüpfungen sich als nicht mehr passend herausstellen. Für uns ist also interessant, wie sich das concept image der Studierenden nach dem Besuch des Lehrformats verändert hat und ob mehr Verknüpfungen zwischen in der Schule gelernten und in der Universität gelehrten Aspekten zu beobachten sind. Wir haben uns dabei auf die Begriffe Gerade, Kreis, Kongruenz und Innenwinkelsumme konzentriert, da diese sowohl in der Schule als auch an der Universität intensiv behandelt werden. Für unsere explorative Prä-Post-Erhebung verwendeten wir ein leitfadengestütztes Interview, da dieses beiden Studierenden, die das gesamte Lehrformat besucht haben, die Möglichkeit gab, frei auf die Frage zu antworten, was sie mit einem bestimmten Konzept verbinden. Dann konnten wir gezielt Fragen zu Aspekten stellen, die noch nicht adressiert wurden. In allen Interviews wurden die gleichen Fragen gestellt, um optimale Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Insgesamt lässt die Auswertung beider Interviewzeitpunkte den Schluss zu, dass unser Lehrformat das concept image der verschiedenen Begriffe positiv beeinflusst hat. Vorstellungen aus der Schule wurden nicht durch Vorstellungen aus der Hochschule ersetzt, sondern durch diese erweitert. Beispielsweise wurde im zweiten Interview die analytische und algebraische Sichtweise einer Gerade aus der Schule ergänzt von der axiomatisch-mengentheoretischen Sichtweise der Universität, anstatt davon ersetzt zu werden. Insbesondere bei den abstrakteren Begriffen Kongruenz und Innenwinkelsumme wurden im zweiten Interview mehr Verknüpfungen zwischen Aspekten aus Schule und Hochschule beobachtet Beispielsweise wurde die Definition der Kongruenz über Bewegungen oder der Zusammenhang von Innenwinkelsumme und Parallelenaxiom thematisiert. Dies legt insgesamt nahe, dass die Studierenden in der Lage waren, Beziehungen zwischen dem, was sie in der Schule gelernt haben - und später unterrichten werden - und dem, was an der Universität gelehrt wird, herzustellen. Eine ausführlichere Darstellung der empirischen Studie wird auf der CERME11 2019 präsentiert und erscheint auch im zugehörigen Tagungsband.

Literatur

Bauer, T.; Partheil, U. (2008). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Mathematische Semesterberichte, 56(1), 85-103.

Brandl, M. (2008). The vibrating string – an initial problem for modern mathematics; historical and didactical aspects. In I. Witzke (Hrsg.), 18th Novembertagung on the History, Philosophy & Didactics of Mathematics (S. 95–114). Berlin: Logos.

Klein, F. (1908). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Stuttgart: B. G. Teubner.

Krauss, S.; Neubrand, M.; Blum, W.; Baumert, J.; Brunner, M.; Kunter, M.; Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. Journal für Mathematik-Didaktik, 29, H. 3/4, 223–258.

Schwarz, A-M., Brandl, M., Kaiser, T., Datzmann, A. (2017). Interactive mathematical maps for de-fragmentation. In Dooley, T., Gueudet, G. (Eds.). (2017). Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 2292–2293.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12 (2), 151–169.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. Mathematics Education Research Journal, 20(2), S. 5–24.