Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Das Besondere an der Mathematik

Der Mathematik werden zahlreiche besondere und spezifische Eigenschaften zugeschrieben, die sie von anderen Wissenschaften, insbesondere den Naturwissenschaften unterscheiden (sollen). Dabei werden diese Unterschiede manchmal nur graduell, oft aber als kategorisch angesehen. In einigen Fällen ist es auch kontrovers, ob der Mathematik diese Eigenschaft überhaupt zukommt oder zugeschrieben werden kann. Überhaupt ist in dieser Diskussion zu beachten, dass man Mathematik nicht wie einen physischen Gegenstand betrachten und analysieren kann. Sondern wir sprechen dabei über eine menschliche kulturelle Tätigkeit und deren Eigenschaften und soziale Bedingungen. Zu den „besonderen" Qualitäten der Mathematik (siehe dazu das Buch von B. Heintz, 2000) zählen die folgenden:

Mathematische Aussagen über mathematische Objekte sind absolut exakt und genau, sie sind eben apodiktisch. Es gibt keine Messfehler, keine Näherungswerte oder dergleichen. Mathematische Aussagen sind in diesem Sinne eindeutig.

Zu mathematischen Aussagen gibt es keine sinnvolle Alternative, eine solche ist nicht vorstellbar, jedenfalls nachdem ein Beweis erfolgt ist. Was könnte denn eine irgendwie sinnvolle und vorstellbare Alternative etwa zu arithmetischen Gleichungen sein? Wittgenstein spricht von der „Härte des logischen Muss", siehe Kroß (2008), oder von ihrer Unerbittlichkeit.

Mathematische Aussagen/Sätze sind unveränderlich, sie haben keine zeitliche Entwicklung, sie gelten immer, oder besser, sie sind zeitlos oder außerzeitlich. Mathematische Theorien können zwar aus der Mode kommen, aber sie werden nie ungültig oder gar falsch. Ein solches Schicksal bleibt bekanntlich vielen naturwissenschaftlichen Theorien nicht erspart. Das zeigt sich auch in der üblichen Formulierung mathematischer Sätze, die immer im Präsens erfolgt und keinerlei Angabe über einen Zeitpunkt der Formulierung enthält. Im Unterschied zu Experimenten bedürfen Beweise keiner näheren Angaben über „äußere" Bedingungen ihres Zustandekommens.

Mathematik ist unabhängig von sozialen, politischen, ökonomischen und historischen Bedingungen und Umständen, jedenfalls was die Gültigkeit ihrer Aussagen betrifft. Natürlich ist es von gesellschaftlichen und kulturellen Bedingungen abhängig, ob überhaupt Mathematik betrieben wird und zu welchen Zwecken. Hierin zeigt sich wieder eine deutliche Autonomie der Mathematik.

Mathematische Sätze – wenn einmal bewiesen – sind unveränderlich „wahr“, noch nie wurde ein solcher Satz falsifiziert im Sinne etwa von Karl Popper, wie das für die Naturwissenschaften dagegen fast zu einem konstitutiven Merkmal wurde. Dieses Phänomen darf nicht mit Fehlern oder Irrtümern in Beweisen verwechselt werden, die es natürlich (in großer Zahl) gibt. Es wird auch von Autoren wie Hilary Putnam oder Quine in Frage gestellt, die eher nur einen graduellen Unterschied zwischen Mathematik (und Logik) und Naturwissenschaften machen (etwa hinsichtlich Allgemeinheit), aber nicht einen kategoriellen, wie wir ihn bei Wittgenstein finden werden. Hier liegt ein anderer Aspekt der Unzeitlichkeit oder Außerzeitlichkeit der Mathematik vor.

Es gibt keine konkurrierenden mathematischen Theorien wie in der Physik oder besonders in den Sozialwissenschaften. Selbst intuitionistische und klassische Mathematik leben friedlich nebeneinander und es werden etwa die Gemeinsamkeiten und Unterschiede mathematisch untersucht. Ähnlich ist das Phänomen, dass es keinen mathematischen Streit gibt, der nicht relativ leicht „mathematisch“ beigelegt werden kann, worauf auch schon Wittgenstein hingewiesen hat. Davon zu unterscheiden sind natürlich Diskussionen darüber, welche Theorie die „schönere“ oder „elegantere“ ist. Man hat sich auch daran gewöhnt, dass Euklidische und Nichteuklidische Geometrien mathematisch gleichberechtigt sind, und ihre Anwendbarkeit auf physikalische Phänomene keine mathematische Frage sein kann. „Konkurrenz“ zwischen mathematischen Theorien besteht also vielleicht hinsichtlich Anwendbarkeit oder „Schönheit“ aber nicht hinsichtlich Gültigkeit.

Mathematischen Aussagen kommt zeitliche und geografische Universalität zu, sie gelten unabhängig von Zeit und Ort; sie können ohne große Schwierigkeiten in verschiedenste Kulturen transportiert werden. Ein überzeugendes Beispiel dafür ist das erfolgreiche und historisch gut dokumentierte Zusammentragen mathematischer Ergebnisse und Methoden aus den verschiedensten Quellen in der arabisch-muslimischen Kultur vom 8. bis ins 15. Jahrhundert, sowie deren Vertiefung und Weiterführung dort.

Zum Teil in einem scheinbaren Widerspruch oder zumindest einem Spannungsverhältnis zu den bisherigen Aspekten steht die notorische Anwendbarkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften und natürlich weit darüber hinaus. Dies schon allein dadurch, dass diese Wissenschaften teilweise zur Mathematik konträre Charakteristika aufweisen. Diese Anwendungen beeinflussen zwar, welche Fragestellungen bearbeitet werden, aber sie haben keinen Einfluss auf die mathematischen Ergebnisse an sich. Anwendungen können scheitern, aber die Mathematik als solche nicht.

Die durch diese Zuschreibungen manifestierte Sonderstellung der Mathematik bedarf natürlich einer Erklärung. Weite Teile der Philosophie der Mathematik sind so auch diesem Thema explizit oder implizit gewidmet. Dabei dominiert das Bestreben, die beobachteten Qualitäten der Mathematik auf entsprechende Qualitäten ihrer Objekte zurückzuführen. Das hat jedoch die unabdingbare Voraussetzung, dass es in irgendeinem Sinne mathematische Objekte gibt, von denen dann die Mathematik handelt, etwa so wie die Mineralogie von den Mineralien handelt. Damit wird die Frage nach dem Status mathematischer Objekte zur Grundfrage der Philosophie der Mathematik mit sehr unterschiedlichen Antworten (Platonismus/Idealismus, Empirismus, Intuitionismus und Varianten davon, vgl. Shapiro, 2000). Aber aus meiner Sicht scheitern alle diese Versuche, weil jede Sichtweise zwar die eine Qualität der Mathematik plausibel machen kann, dafür aber im Hinblick auf andere versagt. Das Festhalten an der Annahme mathematischer Objekte quasi außerhalb der Mathematik als Untersuchungsgegenstand der Mathematik erweist sich damit als äußerst kontraproduktiv und erzeugt mehr Probleme als es lösen kann. Ein Versuch, dieses Dilemma zu lösen sind Varianten des Fiktionalismus, für den mathematische Objekte fiktive Erfindungen sind, vergleichbar etwa mit Figuren in einem Roman oder Theaterstück. Dieser Weg wird aber gerne mit dem Argument abgelehnt, dass mathematische Sätze in einem apodiktischen Sinne wahr sind, insbesondere Existenzsätze. Dies mache aber für Fiktionen keinen Sinn, wahr können nur Aussagen über unabhängig existierende Gegenstände sein. Hier zeigt sich auch, dass „Wahrheit" ein Schlüsselbegriff in diesen Reflexionen über die Qualität der Mathematik ist. Eine Lösung dieser verwickelten Sachlage scheint also nur darin bestehen zu können, dass man den gordischen Knoten der mathematischen Objekte durchschlägt. Und genau diesen gewagten Schritt hat Wittgenstein gemacht.

Hier kann von Wittgensteins Philosophie der Mathematik nur der Aspekt skizziert werden, der für das Thema „Sonderstellung" der Mathematik besonders relevant ist, für eine breitere Darstellung siehe Dörfler (2013, 2014 oder 2019). Ausgangspunkt ist der Vorschlag Wittgensteins, die Bedeutung eines Zeichens nicht in seiner Referenz, sondern in seiner Verwendung zu sehen, und zwar in der Verwendung in dem, was Wittgenstein Sprach- oder Zeichenspiel nennt. Hilfreich ist die Analogie zum Schachspiel: die Bedeutung einer Figur liegt in den Regeln des Spieles. Grundlegend für die Bedeutung eines Zeichens sind also nach Wittgenstein die expliziten und impliziten Regeln seines Gebrauchs. Zahlzeichen leiten ihre Bedeutung darnach nicht daraus ab, dass sie für Zahlen stehen, Zahlen also „bezeichnen", sondern daraus, wie in der Mathematik mit den Zahlzeichen operiert wird und nach welchen Regeln dies erfolgt. Wie die Bedeutung des „Turmes" durch die

Zugregeln entsteht, also durch die Rolle im Schachspiel, so wird in der Arithmetik durch die diversen Rechenregeln und arithmetischen Sätze die Bedeutung eines Zeichens wie „5“ festgelegt und auch entwickelt. Das Spiel der Arithmetik beginnt also mit Regeln zum Zeichengebrauch und nicht mit Aussagen über „Zahlen“. Und aus Regeln können auch wieder nur Regeln abgeleitet werden, wieder nach Regeln, und diese Regeln können dann weiterverwendet werden. Wittgensteins Vorschlag ist also, mathematische Sätze als Regeln zum Gebrauch der in ihnen auftretenden Zeichen und Terme zu interpretieren (grammatische Sätze); sie werden in der Mathematik „nur“ als Regeln verwendet oder als Regeln zur Beschreibung ohne selbst Beschreibungen zu sein. Nun kann man aber bei Regeln nicht von „wahr“ sprechen, am ehesten noch von praktisch oder viabel, womit sich die Frage nach Verifizierbarkeit nicht mehr stellt. Die Notwendigkeit der Mathematik liegt in dieser Sicht im konventionellen und normativen Charakter von Regeln: man muss sich ihnen unterwerfen bzw. wird zu ihrer Befolgung erzogen und streng angehalten. Aber prinzipiell könnte man sie auch ablehnen! Regeln werden nie „falsch“, aber sie können aus der Mode kommen oder verändert werden. Auf ähnliche Weise löst sich so das Mystische an der Sonderstellung der Mathematik bei den anderen Punkten auf. Als Sonderstellung bleibt der Regelcharakter mathematischer Sätze: Regeln zum Schließen, zum Beschreiben, zum Verwenden von Zeichen und Termini.

Literatur

Dörfler, W., Bedeutung und das Operieren mit Zeichen. In: Meyer, M., Müller-Hill, E. und Witzke, I. (Hrsg.). Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum sechzigsten Geburtstag von Horst Struve. Franzbecker, Hildesheim, 2013. S.165-182.

Dörfler, W., Didaktische Konsequenzen aus Wittgensteins Philosophie der Mathematik. In: Heike Hahn (Hrsg.), Anregungen für den Mathematikunterricht unter der Perspektive von Tradition, Moderne und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Regina Dorothea Möller. S.68-80. franzbecker, Hildesheim, 2014.

Dörfler, W. , Zeichen statt Metaphysik. Erscheint in Sammelband des AK „Semiotik und Sprache im MU“, Springer, 2019.

Heintz, B., die innenwelt der mathematik. Springer, Wien, 2000.

Kroß, M. (Hrsg.), Ein Netz von Normen. Wittgenstein und die Mathematik. Parerga, Berlin, 2008.

Shapiro, S., Thinking about mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2000.