Annalisa DRÖSEMEIER, Bayreuth

BeGREIFEN des Integralbegriffs: Lernmaterialien zur enaktiven Entwicklung von Grundvorstellungen

Verständnisorientierter Mathematikunterricht soll darauf abzielen, dass die Lernenden mentale Bilder und tragfähige Vorstellungen – sogenannte *Grundvorstellungen* – zu den erarbeiteten Begriffen aufbauen, um den fachlichen Aspekten inhaltliche Bedeutung zu geben. Der vorliegende Beitrag fokussiert den Integralbegriff und stellt sich die Frage, wie dieses Ziel im Bereich der Integralrechnung erreicht werden kann. Aus den vier Grundvorstellungen, die Greefrath et al. (2016) zum Integralbegriff postulieren, werden exemplarisch die Flächeninhalts- und Kumulationsvorstellung herausgegriffen. Zwei konkrete Lernmaterialien, die im Sinne der Montessori-Pädagogik zur enaktiven Förderung dieser beiden Grundvorstellungen entwickelt wurden, werden vorgestellt.

Der Aufbau von Grundvorstellungen

„Die Grundidee beim Aufbau von Grundvorstellungen ist, dass konkrete Handlungen an geeigneten Materialien zu gedanklichen Operationen umgebaut werden“ (Wartha & Schulz 2011, S.11). In der Primarstufe und der frühen Sekundarstufe I gilt ein derartiges Vorgehen als gängige Praxis. Wartha und Schulz (2011) empfehlen vor allem im Hinblick auf leistungsschwächere Kinder, beim Aufbau von Grundvorstellungen in vier Schritten vorzugehen:

1. Das Kind handelt am Material und versprachlicht die Handlung.
2. Das Kind beschreibt die Handlung mit Sicht auf das Material.
3. Das Kind beschreibt die Handlung ohne Sicht auf das Material.
4. Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.

Die Mathematik der Sekundarstufe II wird hingegen selten mit konkreten Materialien erarbeitet. Diese Gepflogenheit ist vermutlich vor allem auf zwei Gründe zurückzuführen: Zum einen gestaltet es sich mit zunehmender Abstraktion immer schwieriger, die mathematischen Begriffe zu vergegenständlichen, und zum anderen kann ein gewisses Abstraktionsvermögen bei Lernenden dieser Altersstufe durchaus vorausgesetzt werden. Abstraktionsvermögen bedeutet allerdings nicht zwangsläufig, dass die oben genannten Phasen 1 bis 3 gänzlich übersprungen werden müssen – es bedeutet vielmehr, dass Jugendliche auf dieser Entwicklungsstufe prinzipiell in der Lage sind, *schneller* von der gegenständlichen auf die gedankliche Ebene überzugehen.

In der Unterrichtspraxis hat sich gezeigt, dass konkrete Lernmaterialien von SchülerInnen auch bzw. gerade im Bereich der Sekundarstufenmathematik dankbar angenommen werden, da anschauliche Vorstellungen das Verständnis erleichtern. Derartige Materialien können bei der Einführung eines mathematischen Begriffs oder auch schon propädeutisch eingesetzt werden, um einen Begriff frühzeitig vorzuentlasten. Hierzu jeweils ein Beispiel:

Beispiel 1: Die Kumulationsvorstellung vom bestimmten Integral

Die geometrische Veranschaulichung der Kumulationsvorstellung entspricht dem „Integral als Grenzwert einer Summe von Rechtecksflächen(inhalten), wobei die Stufen dieser Treppenfiguren beim Grenzprozeß beliebig schmal werden.“ (Blum & Törner 1983, S. 163). Zur Anbahnung dieser Grundvorstellung wurde das propädeutische Lernmaterial – in der Montessori-Pädagogik spricht man von *Sinnesmaterial* – der *Metallenen Einsatzrahmen* entwickelt (Abb. 1).

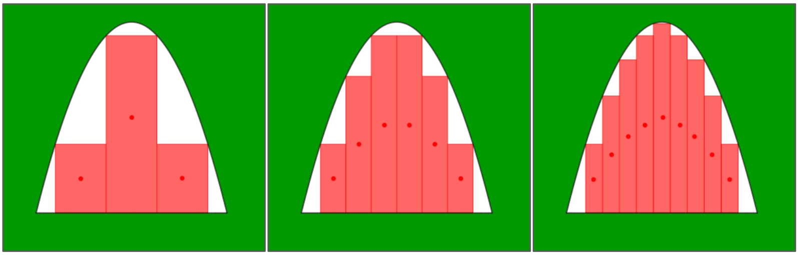

Abb. 1: Lernmaterial zur enaktiven Förderung der Kumulationsvorstellung

Bereits ab der Primarstufe ermöglicht das Lernmaterial sensomotorische Grunderfahrungen, die im Hinblick auf den Integralbegriff fundamental erscheinen. Ziel des Materials ist es, ein Parabelsegment durch vertikale Rechteckstreifen gleicher Breite zu approximieren. Dazu stehen rote Metallsegmente zur Verfügung, die mithilfe eines kleinen Haltegriffs passgenau in die Parabelrahmen eingesetzt werden können. Die Anzahl der Streifen wird sukzessive erhöht und die jeweiligen Rahmen werden zum Vergleich nebeneinandergelegt. Die Verschmälerung der Stufen kann durch Aufeinanderlegen der Metallstreifen er*fasst*, die zunehmend exaktere Exhaustion durch Beobachten der weißen Hintergrundfläche visuell wahrgenommen werden. Auf diesem Weg werden zwei wichtige Erkenntnisse für das Kind greifbar: Je mehr Streifen man verwendet, desto schmaler werden die einzelnen Streifen und desto exakter wird das Parabelsegment approximiert. Diese Vorstellung kann gedanklich bis zum Begriff des Unendlichen weitergesponnen werden. Kumulieren wird in der Materialarbeit also zur enaktiven Tätigkeit, wodurch die Definition vom Integral als Grenzwert einer Produktsumme vorentlastet wird.

Beispiel 2: Die Flächeninhaltsvorstellung vom bestimmten Integral

Im Sinne der Flächeninhaltsvorstellung wird das bestimmte Integral als *orientierter* Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion f in einem Intervall [a;b] mit der x-Achse einschließt, interpretiert. Ergebnisse empirischer Untersuchungen weisen allerdings darauf hin, dass viele Lernende den Integralbegriff unmittelbar mit dem Flächeninhalt identifizieren (vgl. z.B. Baumert et al. 1999, S.80). Eine Möglichkeit, solchen Fehlvorstellungen entgegen zu wirken und das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt enaktiv zu be*greifen,* bietet das Lernmaterial der *Roten und Blauen Flächen.* Das bestimmte Integral wird dabei mithilfe von hölzernen Flächenstücken dargestellt, die in einem Koordinatensystem zwischen einem gegebenen Graphen und der x-Achse ausgelegt werden. Auf Funktionsterme und algebraische Berechnungen wird zugunsten einer qualitativen und vorstellungsorientierten Herangehensweise zunächst gänzlich verzichtet, weil das algorithmische Procedere von der angestrebten Erkenntnis ablenken würde.

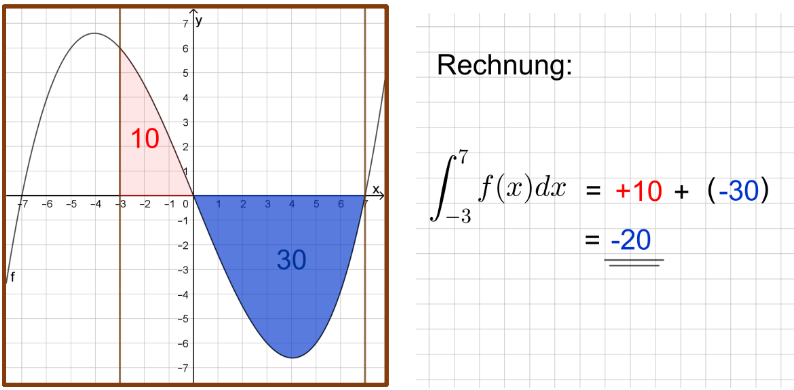

Abb. 2: Das bestimmte Integral als orientierter Flächeninhalt

Abbildung 2 illustriert die Materialarbeit zur Darstellung des bestimmten Integrals $\int_{-3}^{7} f(x)dx$ exemplarisch anhand des punktsymmetrischen Graphen einer Funktion f. Um den Integrationsbereich zu veranschaulichen, werden zuerst verschiebbare Gummibänder als Integralgrenzen über den Koordinatenrahmen gespannt. Die entsprechenden Flächenstücke werden sodann zwischen dem Graphen und der x-Achse ausgelegt. Sie unterliegen einer konsequenten Farbkodierung, die die Orientierung des Flächeninhalts zum Ausdruck bringt: Flächen oberhalb der x-Achse sind rot und werden positiv gezählt, Flächen unterhalb der x-Achse sind blau und werden negativ gezählt. Da die Lernenden die orientierten Inhalte der Flächen noch nicht selbständig berechnen können, sind die jeweiligen Maßzahlen auf den Flächenstücken angegeben. Durch Ablesen der Maßzahlen kann der Wert des bestimmten Integrals ermittelt und die zugehörige Rechnung notiert werden.

Bei punktsymmetrischen Graphen kann das Vorzeichen des gesuchten Integralwerts weiterhin durch Aufeinanderlegen der beiden Flächenstücke deutlich gemacht werden: Liegen die Farben rot und blau übereinander, so heben sie sich offensichtlich gegenseitig auf; die dann noch überstehende Fläche ist in diesem Beispiel blau, also ist der Wert des gesuchten Integrals negativ. Der Spezialfall $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, bei dem rote und blaue Flächenstücke vollständig zur Deckung kommen, liegt im Übrigen ganz analog *auf der Hand*.

Auch der Unterschied zwischen Integral und Flächeninhalt kann mit den *Roten und Blauen Flächen* enaktiv erfasst werden. Wird nach dem Flächeninhalt gefragt, den ein Funktionsgraph im entsprechenden Intervall mit der x-Achse einschließt, so müssen blaue Flächenstücke in einem zweiten Handlungsschritt gegebenenfalls in rote Flächenstücke umgetauscht werden. Formal wird dieses Umtauschen an entsprechender Stelle durch den Betrag ausgedrückt.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorgestellten Lernmaterialien bergen das Potenzial, die Entwicklung von Grundvorstellungen zum bestimmten Integral zu fördern, indem wichtige Facetten des Integralbegriffs vergegenständlicht und in enaktive Handlungen übersetzt werden. Zukünftige Forschungen sollen sich der Frage widmen, inwieweit die intendierten Zielvorstellungen durch den Einsatz der Lernmaterialien tatsächlich realisiert werden können.

Literatur

Baumert, J., Bos, W., Klieme, E., Lehmann, R., Lehrke, M., Hosenfeld, I., Neubrand, J. Watermann, R. (Hrsg.) (1999). *Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftlliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3).* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin: Springer Spektrum.

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* Kiel: IPN-Materialien.