Franz EMBACHER, Wien

Von dreieckigen Pizzen – Anlässe zu Erfahrungen mit mathematischem Arbeiten in 10 Stationen

Ausgehend von verschiedenen Möglichkeiten, eine dreieckige Pizza gerecht (oder ungerecht) auf zwei Personen aufzuteilen, wird illustriert, wie unkonventionelle Fragen aus der Dreiecksgeometrie Anlässe zu Erfahrungen mit mathematischem Arbeiten stiften können.

Einleitung

Das bekannte Pizzatheorem für den Kreis (siehe etwa Humenberger 2015) findet ein Analogon in der Teilung einer dreieckigen gleichseitigen Pizza durch die von einem beliebigen Punkt im Inneren der Pizza gezogenen Strecken zu den Eckpunkten und die Normalen auf die Seiten, wobei die entstehenden Stücke abwechselnd zwei Personen zugeteilt werden. Dass dadurch – unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes – jede Person stets die Hälfte der Pizzafläche und die Hälfte des Randes (der Kruste) bekommt, ist mittels eines sehr schönen „Beweises ohne Worte“ (Carter *et. al.* 1994; de Villier 2012; Nicollier 2015, 2015b) unmittelbar einsichtig. Dieser Sachverhalt eröffnet einen Spaziergang durch 10 verwandte und verallgemeinerte Pizza-Teilungs-Situationen,

- deren Fragestellungen leicht verständlich sind,
- in deren Bearbeitung unterschiedliche mathematische Methoden – von leicht bis anspruchsvoll – zum Einsatz kommen
- und die den Charakter der Mathematik als neugieriger Wissenschaft, die ihre Fragestellungen (auch) aus sich selbst heraus gewinnt, illustrieren.

Die im Vortrag gezeigten GeoGebra-Dateien stehen unter Embacher (2019) zur Verfügung.

1. Station

Bei der ersten Station handelt es sich um die bereits erwähnte (flächen- und krustengerechte) Teilung einer gleichseitigen Dreieckpizza. Der Beweis benötigt lediglich drei Hilfslinien.

2. Station

Eine Fragestellung, der eine „unfaire“ Teilung einer dreieckigen Pizza zugrunde liegt, verdeutlicht, dass es sehr nützlich sei kann, extreme Konfigurationen zu betrachten.

3. Station

Ein vergleichsweise komplexer („annähernd fairer“) Teilungsmodus einer gleichseitigen Dreieckpizza illustriert, wie man durch numerische Näherungsverfahren zu Ergebnissen gelangen kann, die „mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit“ exakte Gültigkeit beanspruchen können.

4. Station

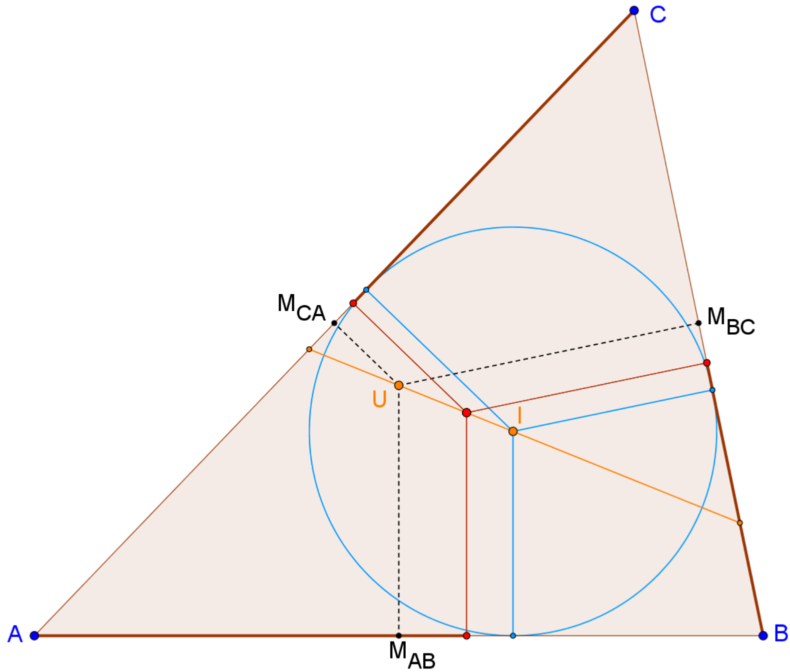
Mit der vierten Station betreten wir wieder den in Station 1 anklingenden Bereich der oft verblüffenden Beziehungen der Dreiecksgeometrie. Die Frage lautet hier: Wo muss der Anfangspunkt für die Teilung einer gleichseitigen Dreieckpizza durch Parallelen zu den Seiten liegen, damit die drei entstehenden dreieckigen Stücke die gleiche Gesamtfläche besitzen wie die drei viereckigen Stücke? Das Problem wird gelöst mit Mitteln der analytischen Geometrie (auf einem im Mathematikunterricht der Oberstufe zur Verfügung stehenden Niveau) – mit einer überraschenden Antwort.

5. Station

Die Fragestellung von Station 4 wird auf ein allgemeines Dreieck verallgemeinert. Die Verallgemeinerung gelingt erstaunlich einfach, wenn benutzt wird, dass ein gleichseitiges Dreieck durch geeignete geometrische Transformationen, die Parallelität und Flächenverhältnisse invariant lassen (eine Scherung und eine Streckung/Stauchung), in ein Dreieck beliebiger Form übergeführt werden kann. Dabei tritt ein im Mathematikunterricht unbekanntes, aber leicht begreifliches geometrisches Objekt auf: die flächengrößte Ellipse, die man einem Dreieck einschreiben kann (die Steinersche In-Ellipse).

6. Station

Die sechste Station wendet sich dem Problem der „Krustengleichheit“ bei Teilung eines allgemeinen spitzwinkeligen Dreiecks nach der Methode „Anfangspunkt → Strecken zu den Ecken und Normalen auf die Seiten“ zu. Auch hier lautet die Frage, wo der Anfangspunkt liegen muss. Nach elementargeometrischen Argumenten, die zwei wohlbekannte Punkte des Dreiecks (Umkreismittelpunkt U und Inkreismittelpunkt I) als zulässige Anfangspunkte identifizieren, wird eine einfache Eigenschaft linearer Funktionen verwendet, um zu zeigen, dass jeder Punkt auf der Geraden durch U und I, der im Inneren des Dreiecks liegt, das Gewünschte leistet (siehe Abbildung).



7. Station

Die Frage nach der „Krustengleichheit“ bei einer Teilung eines gleichseitigen Dreiecks durch Parallelen zu den Seiten illustriert, dass numerische Berechnungen (bzw. Messungen) manchmal zu Vermutungen führen, die danach exakt bewiesen werden können. Sie verdeutlicht außerdem, dass mathematische Erkenntnisse auch darin bestehen können, dass etwas *nicht* möglich ist (No-Go-Theoreme): Eine gleichseitige Dreieckspizza kann mit der Methode „Anfangspunkt → Parallelen zu den Seiten → eine Person bekommt die dreieckigen Stücke, die andere bekommt die viereckigen Stücke“ nicht so geteilt werden, dass beide Personen gleich viel von der Kruste bekommen.

8. Station

Die Verallgemeinerung des No-Go-Theorems von Station 7 auf ein allgemeines Dreieck unterstreicht die Nützlichkeit von Abschätzungen in Form von Ungleichungsketten in mathematischen Argumentationen.

9. Station

Eine über den Horizont des Mathematikunterrichts hinausgehende Fragestellung ist das Problem der Flächengleichheit bei der Teilung eines allgemeinen spitzwinkeligen Dreiecks mit der Methode „Anfangspunkt → Strecken zu den Ecken und Normalen auf die Seiten“, also die Verallgemeinerung des Flächenaspekts von Station 1. Auch hier möchte man die möglichen Orte des Anfangspunktes, die zu einer flächengleichen Teilung führen, wissen. Die Fragestellung führt auf einen in Expertenkreisen bekannten, mit einem allgemeinen Dreieck verbundenen Kegelschnitt, die Stammler-Hyperbel (Embacher und Humenberger 2019).

10. Station

Die letzte Station schließlich behandelt die Teilung eines allgemeinen Dreiecks durch Ecktransversalen, die einander in einem inneren Punkt (dem Anfangspunkt) schneiden. Während die möglichen Orte des Anfangspunkts, die zu Flächengleichheit führen, leicht zu identifizieren sind, führt die analoge Frage für die Krustengleichheit auf eine algebraische Kurve, von der dem Autor nicht bekannt ist, ob sie eine einfache geometrische Bedeutung besitzt. Dies soll illustrieren, dass manche mathematischen Probleme (vorläufig) ungelöst bleiben.

Literatur

Carter, Larry and Wagon, Stan (1994): *Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza*, Mathematics Magazine 67, 267.

de Villiers, Michael (2012): *An illustration of the explanatory and discovery functions of proof*, Pythagoras 33, 3, Art # 193, https://pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/193/227.

Embacher, Franz (2019): GeoGebra-Dateien zu diesem Vortrag: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/GDM2019/.

Embacher, Franz and Humenberger, Hans (2019): *A Note on the Stammler Hyperbola*, erscheint in American Mathematical Monthly.

Humenberger, Hans (2015): *Gerechte Pizzateilung – keine leichte Aufgabe*, Mathematische Semesterberichte 62, 2, 173 – 194.

Nicollier, Gregoire (2015): *Proof without words: Half issues in the equilateral triangle and fair pizza sharing*, Mathematics Magazine 88, 337.

Nicollier, Gregoire (2015b): *Fair sharing of a pizza: a one-line proof*, comment to http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/VivianiAreaAnalogue.shtml.