

Intraindividuelle Entwicklungsverläufe von zwei Kindern der 4. Schulstufe im Umgang mit Brüchen im Vergleich

1. Problemaufriss

Grundlage dieses Beitrags ist eine Verlaufsstudie, in deren Fokus das Interesse an den Entwicklungsprozessen von Kindern beim Umgang mit Brüchen steht und wie sich deren dahinter liegende Konzepte von Begrifflichkeiten im Laufe der Primarstufe und darüber hinaus entwickeln. Bereits Beentjes und Jonker (1987, S. 7) betonen, „that it is risky to base judgment on only one session [...]“. Daher sind längsschnittliche Verlaufsstudien (Bortz & Döring, 2016; Witzel, 2010) notwendig, um das Denken der Kinder über einen längeren Zeitraum zu beschreiben. Gaidoschik (2010, S. 16) führt aus, dass bis zum heutigen Tag Übersichtsstudien, die die Denk- und Lösungswege der Kinder im Mathematikunterricht der Primarstufe sowohl grundsätzlich als auch an der Schnittstelle Primar- und Sekundarstufe beschreiben und analysieren, im deutschsprachigen Raum fehlen.

2. Methodologische Überlegungen

Die auf zwei Jahre konzipierte Verlaufsstudie wurde 2017 begonnen. Einbezogen sind 40 Kinder der 4. Schulstufe einer Volksschule. Bislang wurde vor Thematisierung der Brüche im Unterricht im Herbst 2017 mit jedem Kind ein Interview geführt, eine zweite Interviewrunde mit denselben Kindern erfolgte nach Einführung der Brüche im Unterricht im März 2018. Zwei weitere Interviews mit einer Auswahl derselben Kinder sind im Februar und im Mai/Juni 2019 vorgesehen. Für den vorliegenden Beitrag wurde eine Reduzierung des Samples auf zwei zufällig ausgewählte Kinder (Jana und Alex) der ersten beiden Interviewrunden vorgenommen. Die Interviews sind als halbstandardisierte klinische Interviews gemäß der „revidierten klinischen Methode“ nach Piaget (vgl. Gaidoschik, 2010, S. 239) konzipiert. Sie dauerten ca. 30 Minuten, wurden videografiert und transkribiert. Der Leitfaden der beiden Interviewrunden der Verlaufsstudie umfasst insgesamt acht Aufgaben auf Grundlage der Inhalte des Lehrplans der Volksschule (2012). Für den Beitrag wurden zwei von diesen acht Aufgaben ausgewählt: 1. Darstellen von Bruchteilen 2. Erkennen und Benennen von Bruchteilen.

Zur Auswertung der Interviews wird die kategorienentwickelnde Interpretation (Beck & Maier, 1994, S. 47f.) herangezogen. Dazu werden bedeutungstragende Interviewausschnitte in Form eines Kategoriensystems, welches sich aus dem empirischen Material entwickelt, klassifiziert. Um von den empirischen Daten zu einer Theorie zu gelangen, wird auf das Prinzip der

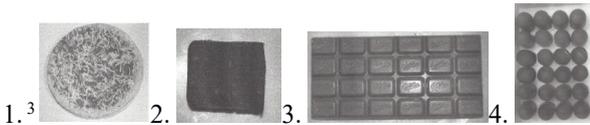
empirisch begründeten Typenbildung zurückgegriffen (Kelle & Kluge, 2010). Konkret bedeutet dies, dass zunächst der Entwicklungsverlauf eines einzelnen Kindes im Mittelpunkt steht. Dann werden Entwicklungsverläufe miteinander verglichen. Angestrebt wird letztendlich eine Typologie der unterschiedlichen Entwicklungsverläufe von Bruchvorstellungen.

3. Ziele und Forschungsfragen

Im Fokus dieses Beitrags steht das Interesse, wie die beiden Kinder der 4. Schulstufe vor und nach unterrichtlicher Thematisierung von Brüchen mit diesen umgehen, welche Denkprozesse dabei zu rekonstruieren sind und wie sich das Konzept der Trias *Teil, Anteil und Ganzes* im Denken der Kinder im Laufe der Primarstufe und darüber hinaus entwickelt. Die beispielhafte Darstellung der Ergebnisse innerhalb der Stichprobe hat den Anspruch, die Denkprozesse der Kinder mittels Handlungs- und Erklärungswissen intraindividuell über die zwei erwähnten Erhebungszeitpunkte und interindividuell auf Grundlage von zwei ausgewählten Aufgaben zu beschreiben und zu interpretieren.

4. Erste Ergebnisse und Interpretationen der Interviews

1. Darstellen von Bruchteilen¹ (ein Halbes, ein Viertel, ein Achtel) bei vier Objekten (1. Objekt: rund, kontinuierlich; 2. Objekt: rechteckig, kontinuierlich; 3. Objekt: rechteckig, Mischform²; 4. Objekt: rechteckig, Mischform):



Jana und Alex beginnen in beiden Interviewrunden beim Darstellen der gefragten Bruchteile bei allen rechteckigen Objekten (R-Objekten) stets mit den Vertikalen. Jana ermittelt dann Bruchteile, soweit möglich, in beiden Interviewrunden bei den R-Objekten vertikal. Sie verwendet nur Horizontale bei den R-Objekten, wenn diese durch den Mittelpunkt des Objektes gehen. Bei allen R-Objekten zeigt sie beim 1. Interview ein Achtel ausschließlich mittels Diagonalen und kann bei den Mischformen (Objekte 3 und 4) die Oberflächenstruktur nicht heranziehen, da sie diese beim Darstellen von einem Achtel mittels Diagonalen zerstört. Die Ermittlung der Bruchteile ausschließlich mittels Diagonalen deutet darauf hin, dass Jana in den

¹ Jedes Kind erhielt einen Stift und ein Arbeitsblatt mit den Abbildungen 1–4 zum Darstellen der Bruchteile.

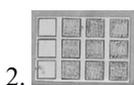
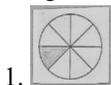
² Die Objekte 3 und 4 werden auch als Mischformen bezeichnet und sowohl als kontinuierliche als auch als diskrete Quantitäten interpretiert (Rottmann, 2006, S. 76).

³ Die Bilderrechte aller Abbildungen obliegen der Autorin.

R-Objekten noch die runde Pizza sieht. Nach unterrichtlicher Behandlung nutzt sie beim 2. Interview zum Zeigen von Achteln bei der Schokolade nicht mehr die Diagonalen, sondern die Grundvorstellung *Bruch als Resultat einer Division* unter Nutzung der Oberflächenstruktur, da die Ermittlung von Achteln durch fortgesetztes Halbieren mittels Vertikalen nicht möglich ist. Sobald jedoch das Darstellen von Achteln mittels Vertikalen umsetzbar ist, verzichtet Jana auf die Anwendung der Vorstellung *Bruch als Resultat einer Division* wie bei den Schokoküssen. Die Verwendung der Vertikalen hat somit bei Jana Priorität vor der Anwendung der Vorstellung *Bruch als Resultat einer Division*. Anzunehmen ist, dass Jana sich bei der Ermittlung und Darstellung von Bruchteilen bei den Objekten 3 und 4 im Übergangsstadium von der Mittelpunktteilung zum *Bruch als Resultat einer Division* befindet. Die flexible Anwendung von nicht durch den Mittelpunkt gehenden Horizontalen zur Ermittlung des Bruchteils ist bei Jana nicht zu beobachten.

Alex ermittelt in beiden Interviewrunden bei den R-Objekten Achtel durch fortgesetztes Halbieren mittels Horizontalen und Vertikalen und nie mittels Diagonalen. Beim Kuchen, der keine strukturierter Oberflächenstruktur aufweist, kann er Achtel beim 1. Interview nicht zeigen, beim 2. Interview gelingt ihm dies. Alex nutzt bei der Schokolade und den Schokoküsse die Anzahl der Einzelelemente (quasi-simultan erfassend) bzw. die Oberflächenstruktur und halbiert diese fortlaufend, um Viertel und Achtel unter Verwendung von Vertikalen und Horizontalen, auch solchen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, darzustellen. Er ist im Vergleich zu Jana nicht an der Mittelpunktteilung bei kreisrunden Objekten (s. Pizza) verhaftet und nutzt bei allen drei R-Objekten flexibel Vertikale und Horizontale zur Darstellung.

2. Erkennen und Benennen von Bruchteilen an zwei Objekten⁴ (1. Objekt: kreisförmig, kontinuierlich; 2. Objekt: rechteckig, Mischform): Wie viel von der ganzen Figur ist gefärbt?



Beide Kinder halten im 1. Interview beim Erkennen des Bruchteils an der Kardination⁵ fest und ermitteln bei den Objekten 1 und 2 die Anzahl und nicht den Bruchteil. Beim 2. Interview hingegen erkennen und benennen beide Kinder den dargestellten Stammbruch ein Achtel beim 1. Objekt korrekt. Beim Erkennen und Benennen des Nichtstammbruchs drei Viertel beim 2. Objekt ist Jana irritiert, weil die Gesamtanzahl des Ganzen keine Potenz von zwei ist. Jana gibt zwei Antworten: neun als Anzahl im Sinne der

⁴ Die beiden Objekte wurden den Kindern auf Kärtchen abgebildet vorgelegt.

⁵ Kardination bedeutet: Eine Zahl ist die Antwort auf die Frage „Wie viele?“

Kardination und neun Sechzehntel als Anteil im Sinne von 16 als einer Potenz von zwei. Alex dagegen bündelt in Dreiergruppen, ermittelt die Anzahl der Teilmengen und somit den gefärbten Bruchteil. Er hat bei beiden Objekten im Gegensatz zu Jana die Kardination überwunden.

5. Resümee

Die Vergleiche zeigen, dass sich die Kinder trotz gleicher unterrichtlicher Instruktionen das Konzept *Teil, Anteil und Ganzes* unterschiedlich schnell erarbeiten und dabei verschiedene Phasen (wie z.B. gleichzeitiges Nutzen von Anzahl- und Bruchteilverstellung beim selben Objekt, Verhaftet-Sein an der Mittelpunktteilung der Pizza, Festhalten am Ermitteln von Bruchteilen durch fortgesetztes Halbieren mittels Horizontalen ausschließlich durch den Mittelpunkt gehend) durchlaufen. Bei Jana zeigt sich, dass es wichtig ist, gestaltpsychologische Aspekte (Rottmann, 2006, S. 94–106) im Unterricht zu berücksichtigen. Wenn ein Kind wie Jana fast ausschließlich vertikal halbiert, Objekte nicht mental dreht, wird es Schwierigkeiten haben, Bruchteile, auf verschiedenen Grundvorstellungen beruhend, zu ermitteln. Auch wird deutlich, dass bei ausschließlicher unterrichtlicher Thematisierung der Stammbrüche *ein Halbes, ein Viertel, ein Achtel* der Transfer der Trias auf Nichtstammbrüche für die Kinder Schwierigkeiten bereiten kann.

Literatur

- Beck, Ch. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier et al. (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung* (S. 43-76). Köln: Aulis.
- Lehrplan der Volksschule (2012). Verordnung des Bundesministeriums für Bildung. BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012 vom 13. September 2012.
- Beentjes, J. & Jonker, V. (1987). Inconsistency in Addition and Subtraction Strategies. *Journal of Experimental Education*, 56, 4-7.
- Bortz, J., Döring, N. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. vollständig überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Ausg.) (S. 447f., 565f.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt am Main: Peter Lang.
- Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung*. (2. überarbeitete Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag.
- Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte“ und „das Doppelte“*. *Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung* (S. 76, 94–106). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.
- Witzel, A. (2010). Längsschnittdesign. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 290-303). Wiesbaden: VS Verlag.