Florian FÜLLGRABE & Andreas EICHLER, Kassel

Analyse von Beweisprodukten

1. Einleitung

Das Beweisen ist eine zentrale mathematische Tätigkeit (Brunner, 2014). Um die Fähigkeiten von Lernenden, Beweise zu konstruieren, einzuschätzen zu können, ist ein ausgearbeitetes Analyseschema für die Beweisprodukte von Lernenden notwendig. In diesem Beitrag stellen wir ein solches Analyseschema vor und illustrieren es anhand von zwei Beispielen.

2. Theoretischer Hintergrund

Von mehreren möglichen Definitionen nutzen wir eine enge Definition für einen mathematischen Beweis: Ein Beweis kann definiert werden als hinreichend vollständige Kette deduktiver Schlüsse, die mit wahren (und ggfs. bereits bewiesenen) Prämissen startet und mit einer wahren Konklusion, der Behauptung, endet. Notwendige Beweisfähigkeiten sind vielschichtig und bestehen aus mathematisch-inhaltlichem Wissen, mathematisch-strategischem Wissen, Methodenwissen, Problemlösefähigkeiten, Beliefs und affektiven Eigenschaften (Sommerhoff, 2017). Grundlage unseres Analyseschemas ist das Methodenwissen von Reiss und Heinze (2003), das aus drei Wissensbereichen besteht: 1. Jeder Schluss muss eine hinreichend argumentativ gestützte Deduktion sein („Beweisstruktur"), 2. Ein Beweis startet mit den Prämissen und endet mit der Behauptung („Beweisschema"), 3. Jeder Beweisschritt kann aus dem Vorherigen geschlossen werden, notfalls unterstützt durch weitere Argumente („Beweiskette").

3. Methode

Die Analyse von Beweisprodukten ist Teil eines Forschungsprojekts mit einer Stichprobe von n=506 Studierenden unterschiedlicher Lehramtsstudiengänge. Es wird der Zusammenhang zwischen der Fähigkeit, Beweise zu konstruieren mit den bei der Beurteilung von vorgelegten Beweisen genannten Akzeptanzkriterien für Beweise hergestellt (Füllgrabe & Eichler, 2018). Auf Basis des Methodenwissens haben wir folgende Kategorien zur Analyse von Beweisprodukten identifiziert:

Globale Struktur (Code GS): Ein Beweis startet mit (den gegebenen, falls existent) Prämissen und endet mit der Behauptung, ohne eben diese zu nutzen, um sich selbst zu beweisen.

Gültigkeit der Schlüsse (Code SG): Alle Schlüsse sind gültig. Ein logischer Schluss ist per Definition gültig, wenn die daraus folgende Konklusion wahr ist (Brunner, 2014).

Wahrheit der Prämissen (Code PW): Alle Prämissen sind wahr. Hier müssen nur noch Annahmen überprüft werden, da Prämissen, die zuvor als Konklusionen erschlossen wurden, mit dem Code SG überprüft werden.

Hinreichende Verständlichkeit (Code HV): Die Gültigkeit der Schlüsse, die Wahrheit von Aussagen oder das Vorhandensein von Argumenten können nur bei einer hinreichenden Verständlichkeit vollständig beurteilt werden. Dieser Code bewertet nicht die Qualität einer Erklärung.

Allgemeinheit bewahrt (Code AB): Der Gültigkeitsbereich der zu beweisenden Aussage wird in der Gesamtheit der Argumentationskette nicht eingeschränkt. Mit Gültigkeitsbereich ist die Menge aller Elemente, für die die zu beweisende Aussage gelten soll, gemeint.

Inhaltliches Wissen (Code WI): Das notwendige inhaltliche Wissen wird korrekt genutzt (siehe auch Tebaartz und Lengnink (2015)). Dieser Code existiert, um Fehlerursachen besser bestimmen zu können.

Vollständigkeit der Argumentationskette (Code VO): Die Frage, wann ein Beweis als hinreichend vollständig gilt, hat keine global akzeptierte Antwort. Allerdings stimmen wir Tebaartz und Lengnink (2015) zu, dass es möglich ist, einen Datensatz von Beweisen mit einem Beweis zu vergleichen, den wir als normativ vollständig bezeichnen und dann entscheiden, ob der zu beurteilende Beweis die notwendigen Argumente enthält oder nicht (und zu welchem Ausmaß). Wir würden diesen „Vergleichsbeweis" „Musterfall" nennen. Um zu bestimmen, ob ein Beweis des Satzes „Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $c|a$ und $c|b$, dann $c|(a+b)$" hinreichend vollständig ist, vergleichen wir ihn mit diesem Musterfall:

1. $c|a\ und\ c|b$
2. $\Leftrightarrow es\ gibt\ p, q \in \mathbb{N}\ sodass$
3. $(\Leftrightarrow, falls\ der\ vorherige\ Schritt\ fehlt)\ c \cdot p = a\ und\ c \cdot q = b$
4. $(\Rightarrow)\ a + b = c \cdot p + c \cdot q$
5. $(a + b, falls\ der\ vorherige\ Schritt\ fehlt) = c(p + q)$
6. $(Da)\ (p + q) \in \mathbb{N}$
7. $\Rightarrow c|(a + b)$

Abbildung 1: Musterfall

Aus unserer Sicht sind 1. bis 7. nötig für eine hinreichende Vollständigkeit. Um einen differenzierteren Blick auf die Beweisprodukte zu erhalten, wird, abgesehen vom Code HV, jeder Code weiter aufgeteilt. In den Codes VO und GS betrachten wir verschiedene Kombinationen aus fehlenden Aussagen. Die weiteren Codes werden hinsichtlich des Ausmaßes eines Fehlers unterschieden. Am Beispiel des Codes SG: Ein ungültiger Schluss ist ein schwerwiegender Fehler, wenn der Schluss im Musterfall (dort allerdings mit wahrer Konklusion) auftritt oder die weitere Argumentation im Beweisprodukt darauf aufbaut. Nicht schwerwiegend ist der Fehler, wenn keiner dieser Fälle eintritt. Je nach Ausmaß der Unvollständigkeit bzw. des Fehlers würde man einen Code mit „-“ (großes Ausmaß bzw. schwerwiegend) oder „~“ (mittleres bis geringes Ausmaß bzw. nicht schwerwiegend) und ansonsten mit „+“ versehen. Wenn jeder Code mit einem „+“ versehen wird, bezeichnen wir das Beweisprodukt als gültigen Beweis.

4. Exemplarische Analyse von Beweisprodukten

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$
Es gilt $c|a \Leftrightarrow \exists n \epsilon \mathbb{N}: a = c \cdot n$ und $c|b \Leftrightarrow \exists m \epsilon \mathbb{N}: b = c \cdot m$.
Seien also $a = c \cdot n$ für ein $n \epsilon \mathbb{N}$ und $b = c \cdot m$ für ein $m \epsilon \mathbb{N}$.
Dann ist $a + b = cn + cm = c(n + m)$.
Wegen $(n + m) \epsilon \mathbb{N}$ gilt also $c|(a + b)$

Abbildung 2: Ein gültiger Beweis (Student 1)

Das Beweisprodukt startet mit den gegebenen Prämissen und interpretiert diese korrekt (Code WI+). Da es ferner mit der Behauptung endet, hat es eine vollständige globale Struktur (Code GS+). Alle Prämissen sind wahr (Code PW+) und alle Schlüsse gültig (Code SG+). Ebenso wird der Gültigkeitsbereich nicht eingeschränkt (Code AB+). Wir schätzen das Beweisprodukt darüber hinaus als hinreichend vollständig (Code VO+) ein. Insgesamt können wir das Beweisprodukt also als gültigen Beweis bezeichnen.

z.z.: a, b, c $\epsilon \mathbb{N}$,	$c\|a,\ c\|b \Rightarrow c\|(a + b)$		
Beweis: $c\|a$ und $c\|b$	$\Rightarrow$ n · a = b	(b > a)	$n \in \mathbb{N}$
	$\Rightarrow$ n · b = a	(a > b)	
	$\Rightarrow$ b = a		

$c|(a + n \cdot a) =\ c|a \cdot$ (1 + n) ✓ (wenn c a teilt, teilt es auch ein Vielfaches von a)
$c|(n \cdot b + b) =\ c|b \cdot$ (n + 1) ✓ (wenn c b teilt, teilt es auch ein Vielfaches von b)
$c|(a + b) =\ c|(a + a) =\ c|2a$ ✓

Abbildung 3: Kein gültiger Beweis (Student 2)

Das Beweisprodukt besteht aus mehreren ungültigen Schlüssen. Aus $c|a$ und $c|b$ folgt nicht, dass $n \cdot a = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Beispiel gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ für $c = 2, a = 4, b = 6$, sodass $n \cdot 4 = 6$. Dies kann als Fehlinterpretation der Aussage $c|a$ gedeutet werden (Code WI-). Beim zweiten Schluss ist nicht hinreichend klar, ob er aus $c|a$ und $c|b$ folgt oder aus $n \cdot a = b$. Wenn Ersteres der Fall ist, dann ist der Schluss aus demselben Grund ungültig wie der erste Schluss. Wenn Zweites gilt, so wäre der Schluss nur für $n = 1$ gültig, allerdings ist dies ausgeschlossen, da vorab die unnötige Einschränkung „$b > a$“ gemacht wurde. Aus genau diesem Grund ist auch die dritte Implikation ungültig, denn $b = a$ könnte dann nicht wahr sein. Die folgende Auflistung von Aussagen hat das Ziel, zu zeigen, dass die zu beweisende Aussage $c|(a + b)$ gleichbedeutend ist mit der wahren Aussage $c|2a$.

Allerdings basiert dies darauf, dass b = a ist, was den Gültigkeitsbereich einschränkt. Im Kern besteht das Problem also darin, dass schwerwiegend falsche Schlüsse vorliegen (Code SG-), die auf unwahren Aussagen basieren und der Gültigkeitsbereich eingeschränkt wird (Code AB-). In der Folge fehlen viele notwendige Argumente (Code VO-). Obgleich die gegebenen Prämissen genannt werden, ist durch das Fehlen der Behauptung die globale Struktur unvollständig (Code GS~). Insgesamt bezeichnen wir das Beweisprodukt als keinen gültigen Beweis.

5. Diskussion

Während Student 1 einen gültigen Beweis konstruiert hat, ist Student 2 daran aufgrund einer Fehlinterpretation der gegebenen Prämissen in Kombination mit daraus resultierenden falschen Schlüssen gescheitert. Das Analyseschema erwies sich hierbei als geeignet, um die (normative) Gültigkeit eines Beweises und in Ansätzen auch Fehlerursachen zu ermitteln. Bei der Beurteilung der Beweiskompetenz können Aspekte des Methodenwissens und des mathematisch-inhaltlichen Wissens in Ansätzen eingeschätzt werden, wobei, wie bei Student 2 ersichtlich, diese durchaus einander bedingen bzw. eng zusammenhängen können: um etwa gültig schließen zu können, muss inhaltliches Wissen vorhanden sein. Umgekehrt kann aber keine Aussage darüber getroffen werden, ob dieser Studierende gültig geschlossen hätte, wenn das notwendige Wissen vorhanden gewesen wäre.

6. Literatur

Brunner, E. (2014). Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Berlin, Heidelberg: Springer.

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2018). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In P. Bender & T. Wassong (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM Verlag, S. 577 – 580.

Reiss, K., & Heinze, A. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hg.), International Newsletter of Proof.

Sommerhoff, D. (2017). The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills: From theory to intervention. München: Universitätsbibliothek der Ludwig-Maximilians-Universität.

Tebaartz, P. C., & Lengnink, K. (2015). Was heißt "mathematischer Beweis"? Realisierungen in Schülerdokumenten. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Hg.), LehrerInnenbildung gestalten: Band 7. Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern (1. Ausgabe, S. 105–120). Münster, New York: Waxmann.