

Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei Aufgaben zur Achsenspiegelung

Einzelne geometrische Inhalte sind im Vergleich zu arithmetischen Inhalten noch wenig beforscht. Es sind vor allem systematische Erkenntnisse zu geometrischen Inhaltsbereichen, die Anforderungen einzelner geometrischer Inhalte möglichst kontinuierlich beschreiben, die fehlen. Diese könnten jedoch Hinweise darauf geben, wie geometrische Fähigkeiten weiterentwickelt werden können. Deshalb wird in diesem Beitrag – exemplarisch für einen Inhaltsbereich der Geometrie – die Idee verfolgt, Anforderungen bei der Achsenspiegelung systematisch darzustellen, mit dem Ziel einen anschlussfähigen Wissensaufbau im Sinne der Berücksichtigung der jeweils nächsten Entwicklungsstufe zu fokussieren. Dadurch könnte u.a. eine zielorientiertere individuelle Förderung geometrischer Fähigkeiten im Unterricht gelingen.

Forschungsergebnisse zu Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

Studien, die sich mit Achsenspiegelungen beschäftigen, liefern verschiedene Einzelergebnisse. So gibt es einige Studien im Vorschul- und Grundschulbereich zum Ergänzen zu achsensymmetrischen Figuren (z.B. Höglinger und Senftleben 1997; Schmidt 1986). Studien, die sich mit Achsenspiegelungen beschäftigen, die eine Figur kongruent abbilden, so dass zwei kongruente Figuren entstehen, sind überwiegend mit älteren Kindern, kaum jedoch mit Grundschulkindern durchgeführt worden (Grenier 1985a, 1985b; Küchemann 1981). Diese Studien fokussieren die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen, kaum jedoch die Spiegelung von geschlossenen Figuren, wie sie im Unterricht der Grundschule üblicherweise durchgeführt werden. Sie stellen einige Merkmale von Aufgaben zu Achsenspiegelungen heraus, die Schwierigkeiten sichtbar werden lassen. In fast allen Studien wird die Lage der Achse als ein Merkmal von Aufgaben herausgestellt, das die Lösungshäufigkeit von Aufgaben beeinflusst (u.a. Schmidt 1986; Küchemann 1981). Ebenso wird die Komplexität der Figur als ein Merkmal beschrieben, welches die Schwierigkeit einer Aufgabe mitbestimmt. Die vorliegenden Studien, die die Komplexität variieren, beziehen sich jedoch darauf, einen Punkt, eine Strecke oder eine Fahne zu spiegeln (s.o.; Küchemann 1981). Inwieweit die Lösung einer Aufgabe zur Achsenspiegelung eine besondere Koordination von Winkeln erforderlich macht, kann ebenfalls die Schwierigkeit von Aufgaben beeinflussen. Eine Winkelkoordination ist dann notwendig, wenn die zu spiegelnde Figur oder die Achse eine Abweichung bezüglich der Vertikalen aufweisen (vgl. Küchemann 1981). Bezüglich des Unterschieds zwischen Kästchenpapier und Blankopapier wird einerseits

vermutet, dass durch Kästchenpapier eine (teils falsche) Orientierung an den Linien vorkommen kann (Grenier 1985; Küchemann 1981). Es zeigt sich jedoch andererseits auch, dass eine Achsenspiegelung ohne Hilfslinien nicht unbedingt leichter sein muss. Die hier aufgezeigten empirischen Studien, die die Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung untersuchten (Grenier 1985; Höglinger und Senfleben 1997; Küchemann 1981; Schmidt 1986) und weitere qualitative Analysen, lassen über die Lösungshäufigkeiten einzelner Aufgaben Rückschlüsse auf Aufgabenmerkmale zu, die die Lösungshäufigkeit beeinflussen.

Forschungsfragen

Auch wenn bereits einige Erkenntnisse zur Beschreibung inhaltsbezogener Merkmale vorliegen, die Aufgaben zur Achsenspiegelung schwieriger werden lassen, so sind diese noch nicht umfassend systematisiert. Aus diesem Grund verfolgt dieser Beitrag folgende Forschungsfragen: Welche inhalts-spezifischen Aufgabenmerkmale und welche Ausprägungen dieser sind bei der Achsenspiegelung von Figuren (über bereits bekannte Merkmale hinaus) schwierigkeitsgenerierend? Lassen sich diese Merkmale bei der Achsenspiegelung im Sinne eines Kategorienschemas systematisch beschreiben?

Methode

Datenbasis dieser Studie sind 37 rasch-skalierte¹ Aufgaben zur Achsenspiegelung aus Erprobungsstudien in Deutschland in Jahrgangsstufe 3, welche bezüglich inhaltlicher Aufgabendetails systematisch entwickelt wurden. Durch die Rasch-Skalierung sind alle Aufgaben nach ihrer empirischen Schwierigkeit auf Kompetenzstufen von I bis V angeordnet (vgl. Reiss und Winkelmann 2008) und können somit hinsichtlich ihrer Schwierigkeit verglichen werden. Jede Aufgabe wurde von ca. 250 Schülerinnen und Schülern in einem Paper-Pencil-Test bearbeitet. Auf Basis der psychometrischen Analysen werden an den Aufgaben qualitative Analysen durchgeführt: Systematisch gebildete Aufgabenpaare (vgl. Abb. 1) werden bezüglich ihrer Schwierigkeiten verglichen und so zusammengestellt, dass nur *ein* theoretisch belegtes Aufgabenmerkmal variiert wird. In Abbildung 1 (links und Mitte) ist dies bspw. die Lage der Figur zur Achse (anliegend/nicht anliegend). Zusätzlich zum paarweisen Vergleich der Aufgaben werden jeweils alle Aufgaben einer Kompetenzstufe hinsichtlich ihrer Anforderungen analysiert, um Theorien zu weiteren Merkmalen zu entwickeln, die die Schwierigkeit von

¹ Die Datenanalysen wurden am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen – Wissenschaftliche Einrichtung der Länder an der Humboldt-Universität zu Berlin e.V. durchgeführt.

Aufgaben beeinflussen. Die Ergebnisse der Analyse der Aufgaben anhand der bereits bekannten schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (Lage der Achse, Komplexität der Figur, Untergrund) und weiterer Merkmale, die sich aus den qualitativen Analysen ergaben, werden im Folgenden dargestellt.

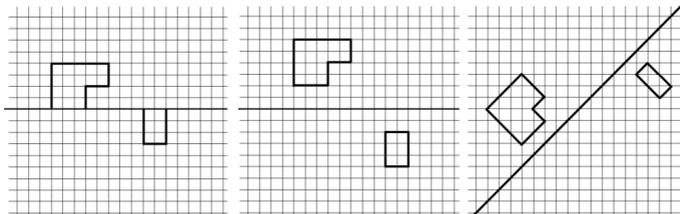


Abbildung 1: Beispielaufgaben zur systematischen Aufgabenentwicklung

Ergebnisse

Die Lage der Achse konnte als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal bestätigt werden (vgl. u.a. bei Schmidt 1986; Küchemann 1981; Grenier 1985). Es zeigte sich, dass Spiegelungen an vertikalen Achsen tendenziell leichter sind als Spiegelungen an horizontalen Achsen. Spiegelungen an schrägen Achsen stellten sich auch in dieser Studie im Wesentlichen als am schwersten heraus. Ebenso ist der Abstand der Figur zur Achse ein schwierigkeitsgenerierendes Merkmal. Betrachtet man hier unterschiedliche Ausprägungen dieses Merkmals, so sind Aufgaben, die das Spiegeln anliegender Figuren (vgl. Abb. 1, links) verlangen leichter als Aufgaben, die das Spiegeln nicht anliegender Figuren (vgl. Abb. 1, Mitte) verlangen. Des Weiteren zeigt sich auch die Komplexität der Figur als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal bei der Achsenspiegelung. Hierzu wurden zwei Merkmale untersucht: die „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ und die „Lage der Seiten der Figur zur Achse“. Bei ersterem wurde betrachtet, wie die Seiten der Figur bezüglich des Kästchenpapiers liegen. Aufgaben mit Figuren, deren Seiten entlang der Kästchenlinien verlaufen (vgl. Abb. 1, links) sind deutlich leichter, als Aufgaben zu Figuren mit Seiten, die die Kästchen diagonal schneiden (=Kästchendiagonalen) (vgl. Abb. 1, rechts). Als besonders schwer stellt sich die Spiegelung von Figuren heraus, die das zugrunde gelegte Kästchengitter beliebig schneiden (bezeichnet als „schräge Linien“). Abgeleitet vom Konzept der Winkelkoordination nach Küchemann 1981 stellte sich die „Lage der Seiten der Figur zur Achse“ mit den beiden Ausprägungen „Seite parallel zur Achse“ (vgl. Aufgaben in Abb. 1) und „Seite nicht parallel zur Achse“ auch als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal heraus. Des Weiteren scheint bezüglich des Untergrundes, auf dem gespiegelt werden soll, eine Spiegelung auf Punkteraster leichter zu fallen als auf Kästchengitter. Jede Aufgabe kann also durch eine Zusammensetzung

schwierigkeitsgenerierender Merkmale beschrieben werden (z. B. horizontale Achse, Figur ohne Kästchendiagonalen, anliegend, etc.). Ein weiteres Ziel dieser Studie war es, schwierigkeitsgenerierende Merkmale der Achsenspiegelung als Kategorien mit unterschiedlichen Ausprägungen im Sinne eines Kategorienschemas darzustellen. Abbildung 2 stellt in jeder Spalte die herausgearbeiteten Aufgabenanforderungen in ihren unterschiedlichen Ausprägungen dar (siehe Götz und Gasteiger, eingereicht).

Ansteigende Schwierigkeit	Achse	Lage der Figur zur Achse	Lage der Seiten der Figur zum Untergrund	Lage der Seiten der Figur zur Achse	Art des Untergrundes
	vertikale Achsen	Anliegende Figuren	Figuren mit keiner Kästchendiagonalen	Figuren mit zur Achse parallel verlaufenden Seiten	Punkteraster
	horizontale Achsen	Nicht anliegende Figuren	Figuren mit ein bis zwei Kästchendiagonalen	Figuren ohne zur Achse parallel verlaufende Seiten	Kästchengeritter
	schräge Achsen	Figuren mit weitem Abstand zur Achse	Figuren mit mehr als zwei Kästchendiagonalen Schräge Linien		

Abbildung 2: Schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei der Achsenspiegelung und ihre Ausprägungen (Götz und Gasteiger, eingereicht)

Fazit

Ausgehend von einer Aufgabe kann anhand dieses Schemas durch die Variation von einzelnen Merkmalen die Schwierigkeit verändert werden. Somit kann dieses Kategorienschema sowohl diagnostisch als auch zur gezielten Aufgabenerstellung sehr wertvoll werden, um Kinder mit spezifischen Schwierigkeiten, gezielt dort zu fördern, wo die Probleme im Detail liegen.

Literatur

- Höglinger, S., & Senftleben, H.-G. (1997). Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben. *Grundschulunterricht* 44 (5), 36–39.
- Götz, D. & Gasteiger, H. (eingereicht): Anforderungen bei der Achsenspiegelung. Ein empirisch gestütztes Kategorienschema. *Journal für Mathematikdidaktik*.
- Grenier, D. (1985). Middle school pupils' conceptions about reflections according to a task of construction. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 183–188).
- Küchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K.M. Hart (Hrsg.), *Children's Understanding of Mathematics* (S. 137–157). London: Murray.
- Reiss, K., & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule* (10), 34–37.
- Schmidt, R. (1986). *Geometrische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit: Ergebnisse einer Untersuchung*, Justus-Liebig-Universität. Gießen.