

Martina GREILER-ZAUCHNER, Kärnten (Österreich)

## **Rechenwege bei der Multiplikation – Entwicklung, Erprobung und Beforschung eines Lernarrangements im dritten Schuljahr**

Die Mathematikdidaktik ist sich weitgehend darüber einig, dass Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule mehr lernen sollten als das korrekte und möglichst schnelle Lösen von Rechenaufgaben. Es sollte dabei vielmehr auch darum gehen, die zugrundeliegenden Strukturen zu durchschauen oder wie James Hiebert (1990) formulierte: „*If we want students to remember procedures, we should ask them to step back and think about the procedures they are using rather than practicing more exercises*“ (ebd., S. 36). In diesem Sinne beschäftigt sich die vorliegende Untersuchung mit Rechenwegen zur Multiplikation einstelliger mit zweistelligen Zahlen und im Zuge dessen mit der Entwicklung, Erprobung und Erforschung eines Lernarrangements, dem die Zielsetzung zugrunde liegt, Unterricht so zu gestalten, dass möglichst viele Kinder Einsicht in die den verschiedenen multiplikativen Rechenwegen zugrundeliegenden Konzepte und Zusammenhänge erlangen und Rechenwege in der Folge sicher und vorteilhaft anwenden können.

### **Zur Konzeption des Lernarrangements**

Das Lernarrangement zu Rechenwegen bei der Multiplikation wurde auf Basis fachdidaktischer Analysen entwickelt. Ausgangspunkt bei der Entwicklung des Lernarrangements war der *forschende Ansatz* des Mathematiklernens nach Baroody (2003). Der Schwerpunkt dieses *forschenden Ansatzes* liegt sowohl auf dem Erwerb von Wissen über Verfahren und Prozeduren als auch auf dem Erwerb von Wissen über Konzepte und operative Zusammenhänge. Er versteht die Konstruktion von Wissen als forschenden Prozess, in dem das Verständnis von Mathematik aktiv selbst gestaltet wird (ebd., S. 17f).

Unter dem Paradigma des forschenden Ansatzes wurden die Kinder angeregt, die Rechenwege des kleinen Einmaleins, insbesondere Verdoppeln und Zerlegen, auf das große Einmaleins zu übertragen. Die Kinder bekamen des Weiteren Gelegenheit, ihre eigenen Lösungswege zu finden, zu beschreiben und gemeinsam zu reflektieren. Ferner wurde das 400er-Punktfeld eingesetzt, um Rechenwege zu begründen und die Rechenwege anderer Kinder zu verstehen.

In Bezug auf flexible Rechenkompetenzen lag der Schwerpunkt des Lernarrangements einerseits darauf, ein Repertoire an Rechenwegen zu vermitteln (*Zerlegen in eine Summe als Universalrechenweg, Zerlegen in eine*

*Differenz, Verdoppeln und Nutzung des Gesetzes von der Konstanz des Produktes*). Andererseits wurden parallel dazu anhand geeigneter Aufgabenstellungen Anregungen gegeben, besondere Aufgabenmerkmale zu erkennen und zu nutzen. Als besondere Aufgabenmerkmale wurden die Nähe zu einer Zehnerzahl für *Zerlegen in eine Differenz*, der Faktor 4 bzw. 8 für *Rechenwege unter Einbezug von Verdoppelungen*, der Faktor 5 für *Rechenwege unter Einbezug von Halbierungen des Zehnfachen* und das Überführen in eine leichter zu lösende Aufgabe durch Nutzung des *Gesetzes von der Konstanz des Produktes* thematisiert. Wesentlich in der Umsetzung war die Verfolgung der Lernziele mit steigendem Anspruchsniveau. Demnach lautete die Zielsetzung für leistungsschwächere Kinder, den *Universalrechenweg* über *Zerlegen in eine Summe* abzusichern und für möglichst viele Kinder eine breite Anwendungsvielfalt an Rechenwegen unter Berücksichtigung besonderer Aufgabenmerkmale zu ermöglichen (Padberg & Benz, 2011, S. 174).

### **Zielsetzungen der Untersuchung sowie methodologische und methodische Vorgehensweise**

Die leitende Forschungsfrage der Untersuchung lautete wie folgt:

Welche typischen Lösungsverhalten zu Multiplikationen von einstelligen mit zweistelligen Zahlen und welche Hürden in den Lernprozessen können unter dem Einfluss des Lernarrangements aus den beobachteten Verhaltensweisen der Kinder rekonstruiert werden?

Die Untersuchung war im Design einer *Educational Design Research*-Studie angelegt. Kennzeichnend für diese Art der Forschungskonzeption ist eine enge Verzahnung von Praxis und Forschung. So liegt der Schwerpunkt von *Educational Design Research*-Studien im Zuge des Forschungsprozesses sowohl auf Erkenntnisinteressen an der Entwicklung von Unterrichtsaktivitäten als auch auf einer Weiterentwicklung wissenschaftlicher Theorien über das Lehren und Lernen des spezifischen Lerngegenstandes (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006).

Vor diesem Hintergrund wurde das Lernarrangement in zwei Zyklen in jeweils acht Kärntner Grundschulklassen der dritten Schulstufe erprobt. Zur Datenerhebung wurden qualitative Interviews nach der revidierten klinischen Methode vor und nach der Umsetzung des Lernarrangements durchgeführt (Selter & Spiegel, 1997, S. 110f). In den Interviews wurden die Kinder aufgefordert, Aufgaben zu lösen und ihre Rechenwege zu verbalisieren. Weiters wurden Aufgaben zum Erkennen operativer Beziehungen, zum Begründen von Rechenwegen am 400er-Punktefeld und zur Begründung der Wahl des Rechenweges gestellt. Das Datenmaterial wurde nach Kelle und Kluge (2010, S. 56f.) anhand von Kategorien, die während der Kodierung

entwickelt wurden, ausgewertet. Ferner wurden Leitfadeninterviews mit den Klassenlehrkräften geführt.

### **Ausgewählte Ergebnisse**

Aus dem Lösungsverhalten der 55 Kinder des zweiten Zyklus nach der Umsetzung des Lernarrangements konnte abgeleitet werden, dass rund 75 Prozent (41 von 55) der Kinder zusätzlich (neben dem *Universalrechenweg* über *Zerlegen in eine Summe*) weitere Rechenwege unter Nutzung besonderer Aufgabenmerkmale (*Verdoppeln*, *Halbieren*, *Zerlegen in eine Differenz* und *Nutzung des Gesetzes von der Konstanz des Produktes*) anwendeten. Wird Flexibilität verstanden als die Fähigkeit, aus verschiedenen Rechenwegen durch Erkennen und Nutzen von besonderen Aufgabenmerkmalen den geeignetsten Rechenweg zu wählen, so waren verschiedene Grade von Flexibilität beobachtbar. Unterschiedliche Verhaltensweisen wurden einerseits in Bezug auf eine konsequente bzw. inkonsequente Nutzung der besonderen Aufgabenmerkmale festgestellt. So wurden beispielsweise Kinder beobachtet, die alle Aufgaben mit einem 9er an der Einerstelle eines Faktors über *Zerlegen in eine Differenz* lösten, andere Kinder hingegen nutzten diesen Rechenweg nur einmalig bei entsprechendem Aufgabenmerkmal und lösten die weiteren Aufgaben mit einem 9er an der Einerstelle über den *Universalrechenweg*. Andererseits wurden unterschiedliche Verhaltensweisen in Bezug auf die Anzahl der Art der Aufgabenmerkmale, die erkannt und genutzt wurden, beobachtet. Rund 20 Prozent (8 von 41) der Kinder, die zusätzlich weitere Rechenwege unter Nutzung besonderer Aufgabenmerkmale nutzten, erkannten und nutzten nur eine Art von Aufgabenmerkmal (*Zerlegen in eine Differenz*, oder *Verdoppeln*, oder *Gesetz von der Konstanz des Produktes*), die restlichen 80 Prozent (33 von 41) hingegen erkannten und nutzten zwischen zwei und vier Arten von Aufgabenmerkmalen (*Zerlegen in eine Differenz* und *Verdoppeln* und *Halbieren* und *Gesetz von der Konstanz des Produktes*).

Ferner wurde unter den 12 Kindern, die bei freigestelltem Rechenweg ausschließlich den *Universalrechenweg* über *Zerlegen in eine Summe* anwendeten, beobachtet, dass die Hälfte davon auf Nachfrage sehr wohl in der Lage war, Rechenwege unter Nutzung besonderer Aufgabenmerkmale zu verwenden. Dieses Verhalten lässt die weitere Vermutung zu, dass manche Kinder dazu neigen, trotz der Fähigkeit, andere Rechenwege unter Nutzung von Aufgabenmerkmalen anzuwenden, den einmal erprobten *Universalrechenweg* aus Gründen der Sicherheit oder Bequemlichkeit beizubehalten. Der *Universalrechenweg* wird subjektiv als der einfachste Rechenweg angesehen, weil er Sicherheit bietet und ohne viel Nachdenken über Aufgabenmerkmale stets angewendet werden kann.

45 der 55 beobachteten Kinder (81,8 Prozent) konnten die in den Erhebungen gezeigten Rechenwege sicher anwenden. Weitere 10 Kinder (18,2 Prozent) neigten jedoch zu Fehleranfälligkeiten. Insbesondere wurden zwei übergeordnete Fehlermuster identifiziert:

- fehlerhafte Zerlegungen aufgrund fehlerhafter Verwendung des Distributivgesetzes
- fehlerhafte Rechenwege aufgrund von Verwechslung der Rechenwege

Im Lösungsverhalten dieser Kinder wurde festgestellt, dass die fehlerhaften Rechenwege nicht durchgängig auftraten. Insbesondere bei Kindern des unteren Leistungsspektrums wurden durchaus Fehleranfälligkeiten aufgrund von Überforderungen durch die Vielfalt der erarbeiteten Rechenwege beobachtet. Diese führten zu Verwechslungen und Vermischungen von Rechenwegen.

Die Ergebnisse zu Lösungsverhalten und Hürden der vorliegenden Studie, die unter dem Einfluss des Lernarrangements aus den beobachteten Verhaltensweisen der Kinder rekonstruiert wurden, sollten vor allem Lehrkräften helfen, die Denkwege und Verhaltensweisen der Kinder besser zu verstehen und zur Weiterentwicklung des Unterrichts im Hinblick auf den Lerngegenstand beitragen.

## Literatur

- Baroody, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1–33). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Hiebert, J. C. (1990). The role of routine procedures in the development of mathematical competence. In T. J. Cooney (Hrsg.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (S. 31–40). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (Hrsg.). (2006). *Educational design research*. London.