

Isabelle GRETZSCHEL, Michelle BRÄUER, Kerstin BRÄUNING,  
Denise LENZ & Georg PFEIFFER, Halle a. d. S.

## **Mathematisches Erleben mit gleichem Material in großer Menge - Fallbeispiele mathematisch interessierter Viertklässler\*innen**

*„Ich dachte immer, Kinder sind die Unordentlichen. Dabei sollen wir es ja aufräumen...“*

Gemeinsam mit Anton Strobel entwickelte und erprobte Kerensa Lee das Konzept „Gleiches Material in großer Menge“, welches auf den Freinetpädagogen Le Bohec und der Methode des natürlichen Mathematiklernens gründet. Dabei werden Kindern sehr große Mengen gleichen Materials (z.B. 1500 Ein-Cent-Stücke) unsortiert und ohne eine konkrete Aufgabenstellung zur Verfügung gestellt. Neben dem ausgelösten Reiz zur haptischen Begegnung mit dem Material ermöglicht dies, eigene Strukturvorstellungen gestalterisch zu bilden und zu repräsentieren (Hülswitt Lee, 2002). Die Kinder fertigen nach eigenem Ermessen Dokumentationen ihrer Erfindungen an. Der im Rahmen der „Erfinderrunde“ stattfindende gemeinsame Austausch ermöglicht das Kennenlernen, Wertschätzen und das Herausarbeiten von Mathematik in den Erfindungen. Mathematische Motive werden durch unterschiedlichste Handlungen mit dem Material erkennbar: z.B. das Bilden symmetrischer Formen sowie das Verbinden von Arithmetik und Geometrie (Lee, 2012, S. 107). In vielen Erfindungen der Kinder wird Mathematik als die Wissenschaft der Muster und Strukturen sichtbar.

### **Zielsetzungen und Forschungsfragen**

Diese explorative Studie widmet sich dem Ziel, Besonderheiten im Umgang mit gleichem Material in großer Menge für mathematisch interessierte Viertklässler\*innen zu erkunden. Dabei sind die folgenden Forschungsfragen von besonderem Interesse: Welche Arten von Erfindungen generieren mathematisch interessierte Viertklässler\*innen mit großen Mengen gleichen Materials? Welche Begabungsaspekte lassen sich in den Erfindungen, Dokumentationen und Erläuterungen der Kinder wiederfinden?

### **Studiendesign**

Im Rahmen des universitären Angebots „Matheforscher“ für mathematisch interessierte Kinder an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg wurden mit zwei Gruppen (jeweils 12 Jungen und 2 bzw. 1 Mädchen) der vierten Klassenstufe, die aufgrund eines bestandenen Aufnahmetests teilnahmen, jeweils eine Erhebung durchgeführt. Im Rahmen einer 60-minütigen Sitzung

konnten sich die Viertklässler\*innen der individuellen Arbeit mit den Materialien widmen, ihrem eigenen Bedürfnis folgend, ihre Ergebnisse und Erkenntnisse dokumentieren sowie diese in der abschließenden Erfinderrunde allen Teilnehmenden vorstellen und erläutern. Dazu wurden Plastikbecher, Holz- und Spielwürfel, 1-Cent Münzen sowie unterschiedlich farbige Deckel und weißes Papier zur Dokumentation bereitgestellt. Der gesamte Bearbeitungsprozess und die Erfindungen der Kinder wurden prozessbegleitend videografiert und durch halbstrukturierte Leitfadenterviews ergänzt, die zur Erfassung der Einstellungen der Kinder dienten. Um mögliche Besonderheiten der Erfindungen mathematisch interessierter Kinder aufzuzeigen, werden vergleichend Merkmale für eine mathematische Begabung (Käpnick, 1998) herangezogen.

### Erste Ergebnisse

Im Folgenden werden drei exemplarische Erfindungen mathematisch interessierter Kinder vorgestellt und kommentiert.

Leon erstellte eine Tabelle, um die Häufigkeiten der unterschiedlichen Augensummen für zwei (Abb. 1) und anschließend für drei Spielwürfel beim 30-maligen Werfen zu erfassen. Außerordentlich erscheint die Leistung vor dem Hintergrund, dass dieses Kind ohne externe Impulse in den Tabellen alle möglichen Augensummen bestimmte und diese begründen konnte.

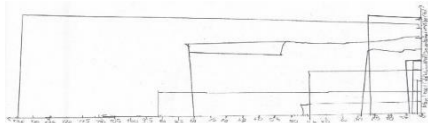
Leon: „Also habe ich gewürfelt und mir eine Tabelle angefertigt, um zu schauen, welche Zahl ich am häufigsten würfel.“

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Abb. 1: Leons Häufigkeitstabelle bei zwei Spielwürfeln  
 (...). Erst mal mit den Zahlen Zwei bis Zwölf, weil man mit zwei Würfeln die Zahlen Zwei bis Zwölf würfeln kann und dann habe ich geschaut, was am häufigsten dran kommt mit dreißig Würfen und dann habe ich auch noch angefangen das mit drei Würfeln zu machen.“ Eine erste Besonderheit in Leons Vorgehen besteht darin, dass er mit den Materialien nicht baut, sondern sich alleine durch das Material zu mathematischen Inhalten wie dem Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, welcher im Mathematikunterricht eine untergeordnete Rolle spielt, inspirieren ließ. Sein Zugang zu den Spielwürfeln war zudem nicht durch eine erste haptische Begegnung mit der gesamten Menge gekennzeichnet. Leon widmete sich direkt nur einer kleinen Teilmenge des Materials und dokumentierte seine Ergebnisse. Die direkt zu Beginn erstellte Häufigkeitstabelle zeigt Leons mathematische Sensibilität als Gefühl für Zahlen und seine Fähigkeit zum Strukturieren von Sachverhalten. Ferner wird auch der durch Leon selbstständig durchgeführte Repräsentationswechsel von der enaktiven Ebene des Ermitteln der Augensummen hin zu einer symbolischen Form deutlich. Das Vorgehen und die Darstellung der Ergebnisse für die

Augensummen zweier Würfel wurden durch Leon selbstständig für die Summenbildung aus drei Augenzahlen transferiert und modifiziert. Auch in dieser dazugehörigen Verteilungstabelle wurden die erreichbaren Augensummen korrekt bestimmt.

Zahra zählte und sortierte die farbigen Deckel mit Rückgriff auf die bekannte Fünfer- und Zehnerbündelung und zeigte damit ihre Fähigkeit zum Strukturieren großer Mengen. Anschließend fertigte sie zur Dokumentation der Ergebnisse ein Diagramm an, aus dem die unterschiedlichen Anzahlen je Farbe deutlich hervorgehen. Zahra betonte dabei ihre persönliche Beziehung zu den Farben als antreibenden Motor ihrer Aktivität: „*Ich hab die Farben gesehen und mag Farben, außer rosa! Und dann habe ich mir gedacht, oh die zähle ich einfach mal. Und dann hat sie [die Leiterin der Sitzung] die Blätter hingelegt. Da hab ich gedacht, da kann ich ein Diagramm hinmalen. (...) Und dann hab ich mich natürlich gefreut, dass rosa nicht das Beste war. (...) Also ich habe ein Diagramm hingezeichnet (...) also von den Deckeln, wie viel es von jeder Farbe gibt*“.



**Abb. 2:** Zahras Darstellung der Farb-Anzahl-Verteilung

„*Ich hab die Farben gesehen und mag Farben, außer rosa! Und dann habe ich mir gedacht, oh die zähle ich einfach mal. Und dann hat sie [die Leiterin der Sitzung] die Blätter hingelegt. Da hab ich gedacht, da kann ich ein Diagramm hinmalen. (...) Und dann hab ich mich natürlich gefreut, dass rosa nicht das Beste war. (...) Also ich habe ein Diagramm hingezeichnet (...) also von den Deckeln, wie viel es von jeder Farbe gibt*“.

Der haptische Reiz der bunten Deckelmenge mit den daraus resultierenden Handlungsimpulsen, Übersichtlichkeit in die ungeordnete Menge zu bringen und die Mächtigkeit der entstandenen Teilmengen zu ermitteln, führten zu Zahras Plan, eine Übersicht über die unterschiedlich farbigen Anzahlen an Deckeln in Form eines Diagramms zu erstellen. Auf der x-Achse erfolgte durch Zahra die Einteilung entsprechend der sortierten Anordnung der unterschiedlichen Deckelfarben auf dem Boden. Die y-Achse wurde in Fünferschritten beginnend bei Zehn eingeteilt, sodass für jede Deckelfarbe jeweils die absolute Anzahl der Elemente abgelesen werden kann (Abb. 2). Diese eigenständige Unterteilung der Achse, nicht beginnend mit Null, zeigt Zahras ausgeprägtes Verständnis für das Darstellen von Daten, welches eine hohe Anforderung für Viertklässler\*innen darstellt.

Jan und Jonas erstellten mit den Spielwürfeln zuerst mehrere „Pyramiden“ (Abb. 3). Die Augenzahlen der Spielwürfel wurden dabei als zusätzliches Gestaltungsmittel genutzt: „*Guck mal. Nicht umschubsen - nach der Reihe geordnet. (...) Von innen ist es 6, 5, 4, 3, 2, 1. Von außen ist es 1, 2, 3, 4, 5, 6. (...) Jan hast du nicht bemerkt,*



**Abb. 3:** Gebaute „Pyramide“ aus Spielwürfeln



**Abb. 4:** Ergebnis der Weiterentwicklung der „Spielwürfel-Pyramiden“

rische Strukturen in sich, die den ästhetischen Aspekt der Mathematik betonen. Im Vordergrund stand beim Erstellen dieser Erfindung nicht nur der Schaffensprozess, im Sinne einer zirkulären Perfektionierung (vgl. Hülswitt Lee, 2002), sondern auch das Kommunizieren über gewonnene Erkenntnisse. Jonas' Bewusstmachung, dass in dieser Erfindung Mathematik enthalten ist, deutet auf seine mathematische Sensibilität hin.

Insgesamt zeigte sich, dass die mathematisch interessierten Viertklässler\*innen über die gesamte Bearbeitungszeit hinweg an einem ausgewählten Material verblieben und sich sehr intensiv und motiviert mit diesem auseinandersetzten. Die Offenheit ermöglichte einen individuellen oder kooperativen Zugang zum Material. Von besonderer Bedeutung erschien es den Kindern auch, ihre Erfindungen oder Ergebnisse schriftlich und/oder durch ihren Namen zu dokumentieren und diese in der abschließenden Erfinderrunde allen anderen vorzustellen.

### Ausblick

Die bisherigen Erkenntnisse sollen im weiteren Verlauf durch Erhebungen mit Fünftklässler\*innen an einem Spezialgymnasium für Mathematik verglichen werden. Die Erfindungen der „Matheforscher“ können im Anschluss als persönlich bedeutsamer Ausgangspunkt weiteren mathematischen Lernens dienen, indem die Ideen der Kinder aufgegriffen und in den folgenden Matheforscherstunden weitergeführt werden.

### Literatur

- Hülswitt Lee, K. (2002). Kreieren – Kommunizieren – Mathematisieren: Die Kultivierung natürlicher Lernprozesse für Mathematiklernenden. In S. Prediger et al. (Hrsg.), *Mathematik und Kommunikation. Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft* 3. Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft. S. 19–32.
- Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Lang Verlag.
- Lee, K. (2012): Die Aufgabe, ohne eine Aufgabe zu arbeiten: Ideenentwicklung mit gleichem Material in großer Menge. In J. Košinár; U. Carle (Hrsg.), *Aufgabenqualität in Kindergarten und Grundschule. Grundlagen und Praxisbeispiele*. Hohengehren: Baltmannsweiler Schneider. S. 103–112.

*dass das hier alles mit Mathe zu tun hat?“*

Anschließend ergänzten sie ihre Konfiguration um weitere kleine Pyramiden und einzelne Würfel nach dem gleichen Schema, sodass eine Blume mit Stängel und Blättern entstand. Diese Erfindung vereint figürliche Elemente und geometrische Strukturen in sich, die den ästhetischen Aspekt der Mathematik betonen.