Erik HANKE, Bremen

Anschauliche Deutungen des komplexen Wegintegrals und der Cauchyschen Integralformel von Expert*innen der Funktionentheorie

Eine gängige (Grund-) Vorstellung vom Integral einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen ist die des orientierten Flächeninhalts, und zur Differential- und Integralrechnung einer reellen Veränderlichen gibt es allerhand mathematikdidaktische Forschung. Ähnlich sieht es bei der Arithmetik und Visualisierung komplexer Zahlen aus. Zur Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlichen sowie der Funktionentheorie gibt es hingegen bislang sehr wenig mathematikdidaktische Arbeiten.

Im Rahmen des Projekts „Spotlight-Y" an der Universität Bremen (vgl. Hanke & Schäfer, 2018; Mehlmann & Bikner-Ahsbahs, 2018) beschäftige ich mich damit, Vorstellungen von und Umgangsweisen mit holomorphen Funktionen und dem komplexen Wegintegral seitens Expert*innen und Noviz*innen in der Funktionentheorie zu rekonstruieren. Als Expert*innen zählen dabei Mathematiker*innen, die selbstständige Lehre in Funktionentheorie durchführen.

Das komplexe Wegintegral

In der Funktionentheorie kann das *komplexe Wegintegral* einer stetigen Funktion $f\colon \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$ entlang eines (stückweise) stetig differenzierbaren Wegs $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ durch $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ definiert werden (bei stückweiser stetiger Differenzierbarkeit von γ summiert man entsprechend über die stetig differenzierbaren Teile auf). Davon unterscheidet sich in der Analysis zweier reeller Veränderlichen das *Wegintegral (2. Art)* $\int_\gamma F\,\mathrm{d}(x,y) := \int_a^b \langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$ für einen (stückweise) stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und ein stetiges Vektorfeld $F\colon \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{R}^2$. Zwischen den beiden Integralbegriffen besteht die Beziehung $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (\mathrm{Re}\,f, -\mathrm{Im}\,f)^T\,\mathrm{d}(x,y) + i\int_\gamma (\mathrm{Im}\,f, \mathrm{Re}\,f)^T\,\mathrm{d}(x,y)$.

Mathematikdidaktik zur Funktionentheorie

Die grundlegenden Konzepte wie Stetigkeit, Ableitung und Integral werden in den USA erstmalig in Fallstudien im Hinblick auf komplexe Funktionen (d. h. $\mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$) untersucht. So interviewten Soto und Oehrtman (2017) fünf Mathematiker*innen zu ihren „images" vom komplexen Wegintegral. In ihrem Kurzbericht deuten die Autoren an, dass die von ihnen interviewten Expert*innen keine genaue geometrische Vorstellung von der Bedeutung des komplexen Wegintegrals nannten und teilweise auch angaben, dass es sich bei der Formulierung einer solchen um ein schwieriges Problem handle. Ein Kandidat stellte u. a. den Bezug zu Wegintegralen 2. Art her, eine Kandidatin argumentierte physikalisch mit geleisteter Arbeit in einem Kraftfeld, was eher einer anschaulichen Erklärung für Wegintegrale 2. Art entspricht.

Fragestellung und Theorierahmen

Die Prämisse, die meiner Studie zugrunde liegt, ist, dass tiefes fachliches Verständnis mit der Reflexion über mathematische Begriffe einhergeht, und sich diese Reflexion in den subjektiven Bedeutungen bzw. Vorstellungen zeigt, die zu mathematischen Begriffen ausgebildet werden (vgl. Sfard, 1994). Mit Vorstellungen sind subjektive Erklärungsansätze, anschauliche Deutungen oder Handlungsheuristiken gemeint, die sich in Narrativen (Sfard, 2008) widerspiegeln. Narrative von Expert*innen, wenngleich hier durchaus auch ihre ganz persönlichen gemeint sind, sind außerdem aus hochschuldidaktischer Sicht besonders deshalb relevant, weil Studierende dem Diskurs von Expert*innen anvertraut sind. In diesem Beitrag stehen nun die folgenden Fragen im Vordergrund: „Welche Vorstellungen zum komplexen Wegintegral haben Expert*innen der Funktionentheorie?“ und „Wie erklären Expert*innen die Cauchysche Integralformel anschaulich?“

Methode

Es wurden halbstandardisierte leitfadengestützte Interviews mit Expert*innen auf dem Gebiet der Funktionentheorie geführt. Die beiden Teilnehmer Dirk und Uwe (Pseudonyme) haben einführende Vorlesungen in die Funktionentheorie gehalten. Gegenstand dieses Artikels sind ihre Antworten auf die Fragen: „Welche geometrische Bedeutung hat für Sie die komplexe Zahl $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für einen (stückweise stetig differenzierbaren) Weg $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ und eine stetige Funktion $f\colon \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$?“ und „Eine Version der Cauchyschen Integralformel lautet $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ für $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, sodass der Abschluss von $B(z_0,r)$ in Ω enthalten ist, und $z \in B(z_0,r)$. Wie stellen Sie sich die Aussage dieser Formel vor?“

Erste Befunde

Der Interviewer leitet die erste Frage mit einem Verweis auf die gängige Flächeninhaltsvorstellung für Integrale aus der Analysis einer reellen Veränderlichen ein. Außerdem händigt er den Interviewten die Fragen (in leicht veränderter Formulierung) während des Interviews ausgedruckt aus. Noch während der Interviewer die erste Frage stellt, unterbricht Uwe damit, dass die Zahl $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ „gar keine“ Bedeutung habe. Nachfragen bestätigen diese Auffassung und veranlassen Uwe zu erklären, dass er $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ als ein Wegintegral „3. Art“ begreift: „Das ist ja sozusagen, wenn man so will, f von z ist komplex multipliziert mit $\mathrm{d}z$ und da stellt man sich am besten gar nichts drunter vor.“ Ferner betont er den „Werkzeug“-Charakter des komplexen Wegintegrals, sowie dass es „sowieso nur für holomorphe Funktionen“ interessiere, und der Residuensatz „sagt einem genau, welche Vorstellung man davon haben soll, nämlich [… die] Summe der Residuen“

Um einen Bezug zu konservativen Vektorfeldern herzustellen, versucht Uwe mit der Rechnung $\begin{pmatrix} f_1 & -f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\gamma_1' + \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}\gamma_2' = \langle \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix}, \gamma' \rangle$ (dabei gilt $f_1 = \operatorname{Re} f$ und $f_2 = \operatorname{Im} f$), den Integranden des komplexen Wegintegrals analog zum Wegintegral 2. Art mithilfe eines Skalarprodukts zu schreiben, wobei er die Multiplikation von komplexen Zahlen in ein Matrix-Vektor-Produkt umformt und das komplexe Skalarprodukt verwendet. Durch formales Entpacken der Integrabilitätsbedingung für konservative Vektorfelder auf $\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix}$ leitet Uwe schließlich die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\partial_2 f = i\partial_1 f$ ab. Außerdem betont er, dass komplexe Wegintegrale zwar dabei helfen können, reelle Integrale auszurechnen.

Dirk merkt an, dass Wegintegrale in Vektorfeldern eine physikalische Bedeutung hätten, und kommt auch nach einiger Bedenkzeit kaum über eine Umformulierung der ursprünglichen Frage hinaus. Als Impuls wirft der Interviewer den Cauchyschen Integralsatz auf. Dirk diskutiert die Existenz von Stammfunktionen und, dass „man“ gern auf ein Bild zurückgreifen können möchte, wie bei reellen Integralen, wobei die Vorstellung eines Flächeninhalts aber nur als „Krücke“ gelten könne, da die integrierte Funktion ja komplexe Werte annehme. „Man sollte schon ein gutes Bild vermitteln können“ und „das wird nicht immer gemacht, zum Beispiel in Lehrbüchern“, „[i]st auch die Frage, ob es dann hilfreich ist oder eher verwirrt“.

Bei der Cauchyschen Integralformel nennen beide Experten, dass Funktionswerte im Innern der Kreisscheibe durch die Werte auf der Kreislinie festgelegt seien. Uwe betont, dass diese Formel das zentrale Hilfsmittel sei, um die Analytizität holomorpher Funktionen zu beweisen, und erläutert, ähnlich wie Dirk, den Zusammenhang zur Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen sowie, dass die Formelaussage, dass der Funktionswert im Mittelpunkt der Kreisscheibe das Integralmittel der Werte auf dem Rand sei – „anschaulich überhaupt nicht klar, dass sowas gilt“. Dass die Werte auf dem Rand die Werte im Innern des Kreises festlegen, erklärt Uwe mit dem Identitätssatz, und die Cauchysche Integralformel entspreche demzufolge einer Art Quantifizierung dieses Satzes (wenngleich es typischer ist, den Identitätssatz nach der Cauchyschen Integralformel herzuleiten). Dirk äußert ebenfalls, dass die Beziehung der Funktionswerte auf dem Rand und im Innern des Kreises „intuitiv was mit dieser Starrheit [von holomorphen Funktionen] zu tun“ habe.

Ausblick

Die hier dargestellten Beispiele sind Teil einer umfassenderen Untersuchung, in der Narrative von Expert*innen über ihre anschaulichen Deutungen von Holomorphie und komplexer Wegintegration rekonstruiert und mit ihren Argumentationsweisen in Beziehung gestellt werden, um damit einen möglichen Lernhorizont für Studierende abzubilden. Für die Analyse kommt Sfards (2008) *commognition* infrage, mithilfe derer sowohl mathematischer als auch metamathematischer Diskurs im Hinblick auf Narrative, Wortgebrauch, visuelle Mediatoren und Routinen analysiert werden können. Auch die Tatsache, dass es selbst Expert*innen schwerfällt, anschauliche Erklärungen für Grundbausteine der Funktionentheorie zu beschreiben, macht weitere Forschung notwendig. Insbesondere bedarf es einer Klärung, Vorstellungen welcher Art überhaupt in der Funktionentheorie vorhanden sind.

Danksagung

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01JA1612 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

Literatur

Hanke, E. & Schäfer, I. (2018). Learning complex analysis in different branches – Project Spotlight-Y for future teachers. INDRUM 2 Proceedings, 54–63.

Mehlmann, N. & Bikner-Ahsbahs, A. (2018). Spotlights Lehre – Ein Ansatz zur Vernetzung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik an der Universität Bremen, in: I. Glowinski, A. Borowski, J. Gillen, S. Schanze, & J. von Meien (Hrsg.), *Kohärenz in der universitären Lehrerbildung. Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Bildungswissenschaften* (S. 77–102). Potsdam: Universitätsverlag Potsdam.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *FLM, 14*(1), 44–55.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Soto, H. & Oehrtman, M. (2017). Mathematicians‘ interplay of the three worlds of the derivative and integral of complex-valued functions. *RUME 20 Proceedings*, 1436–1441.