Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Duisburg-Essen

Auf rationale Weise zu irrationalen Zahlen

Im Herbst 2018 veranstaltete die Katholische Akademie Bayern eine Tagung zum Thema „Irrationalität – Die andere Seite des Homo sapiens“. Im Programmheft wurden unter anderem folgende Fragen aufgeworfen: Wofür steht das schillernde Wort „irrational“ eigentlich? Und wie hat dieses Wort, das ursprünglich aus der Mathematik stammt, seine philosophische Karriere genommen? Die folgenden Ausführungen werden diesen Fragen und ihrer bildungsphilosophischen Bedeutung nachgehen.

1. Die mathematische Entdeckung des Irrationalen und ihre Folgen

Die Entdeckung der irrationalen Größenverhältnisse geschah in der Zeit der Pythagoreer um 450 v. Chr. Sie erfolgte ziemlich sicher zunächst im geometrischen Gewand der Inkommensurabilität. Begleitet war sie durch die philosophische Annahme „Alles ist Zahl“. Diese unterstellte, die Welt sei von Zahlprinzipien durchwirkt und die realen Dinge und ihre Verhältnisse seien nach den Verhältnissen der ganzen Zahlen geformt, alles habe somit einen *logos* (lateinisch: *ratio*). Dieser griechische Begriff, der eine viel weiter reichende Bedeutung annehmen sollte, hat hier einen ganz speziellen Sinn. Ein Verhältnis $a:b$ war ein *logos*, eine Verhältnisgleichung $a:b=c:d$ eine *analogia* (Perilli 2013, S. 6).

Die Entdeckung, dass Seite und Diagonale im regulären Fünfeck keinen *logos* haben, ihr Verhältnis also *alogon* ist, stellte das bestehende Weltbild in Frage und erforderte, dass die auf Mathematik gegründete Philosophie und Weltdeutung überdacht werden musste. Sie erweiterte aber nicht nur den mathematischen Wissensbestand, sie war auch durch ein neues Verhältnis zur Mathematik bedingt. Dieses äußerte sich im Reflektieren über aus der Praxis gewonnene Erkenntnisse und im Bedürfnis des Erklärens und Begründens, das als Ursprung des wissenschaftlichen Denkens angesehen wird (Mittelstraß 2014, S. 275).

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) rühmt in seiner Metaphysik die Inkommensurabilität als Prototyp einer wissenschaftlichen Entdeckung, die aus dem reinen Streben nach Erkenntnis gewonnen ist, und zeigt, dass Menschen ihr Wissen allein durch schlussfolgerndes Denken erweitern können (Artmann 1999, S. 229 f.). Die Möglichkeiten des Denkens selbst waren also wesentlich an dem Fortschritt beteiligt. „Die Schlussform ‚reductio ad absurdum’ (Beweis durch Widerspruch) erlaubte die ersten Unmöglichkeitsbeweise und die ersten exakten Aussagen über das ‚Unendliche’.“ (Ebbinghaus et al. 1983, S. 26). Artmann (1999) sieht in den *Elementen* des Euklid, die den betreffenden Wissensstand wiedergeben und nach der Methodologie des Aristoteles geschrieben sind, die wichtigste frühe Quelle für eine Auffassung von Mathematik, die für mehr als zweitausend Jahre prägend war.

2. Der Logos – das durchwirkende Prinzip

Das Wort *logos* ist im Verlauf seiner Bedeutungsgeschichte „nicht nur zu umfassender und weit verzweigter Bedeutung gelangt, sondern in mannigfacher geschichtlicher Umbildung ein Begriff geworden, den man fast symbolisch nennen könnte für griechisches Welt- und Daseinsverständnis überhaupt." (Kleinknecht 2013, S. 262).

Etymologisch betrachtet ist *logos* das Substantiv zu *legein* und damit in seiner Grundbedeutung das Sammeln und Lesen, verstanden im kritischen Sinne von Auswählen, Auslesen, Gruppieren. Übertragen auf geistige Tätigkeiten meint *logos* ursprünglich das Zählen, Rechnen, Explizieren und gewinnt von hier aus eine weit aufgefächerte Bedeutung (ebd., S. 262 ff.):

- Im Zusammenhang mit Philosophie bekommt *logos* als die vernünftige Beziehung der Dinge zueinander die allgemeine Bedeutung von Sinn, Ordnung, Maß.
- Schließlich umfasst *logos* auch das menschliche Denkvermögen „und wird als die im Menschen angelegte, rationale Kraft der Rede, des Denkens und des Sprechens verstanden." (ebd., S. 268).

Damit entsteht aber ein auf den ersten Blick paradox erscheinender Befund: Der *logos* als das allgemeine Bestreben, Beziehungen herzustellen, bringt das Phänomen ans Licht, dass es Dinge gibt, die keinen *logos* im ursprünglichen, enger gefassten Sinne des Wortes haben.

Dem griechischen Begriff *logos* entspricht der lateinische Begriff *ratio.* „Durch die ratio … erkennt er [der Mensch] die Ursachen und Folgen der Ereignisse, unterscheidet und vergleicht er, bringt er einen Zusammenhang in den Ablauf des Geschehens, der ihm Behauptungen auch über das Zukünftige ermöglicht." (Schwemmer 1995, S. 462). Deshalb wird Rationalität als Vermögen zu begrifflichem, schlussfolgerndem Denken und damit als Grundlage wissenschaftlichen Forschens betrachtet.

Auch hier gibt es die mathematische Spezialbedeutung von *ratio* als Zahlenverhältnis, von der sich der Fachbegriff „rationale Zahl" herleitet. Durch schlussfolgerndes Denken wurde entdeckt, dass es Streckenlängen gibt, die keine *ratio* in diesem speziellen Sinne haben. Die Entdeckung des Irrationalen in der Mathematik erfolgte also auf ganz rationale Weise im allgemeinen, erkenntnistheoretisch gefassten Verständnis des Begriffs.

3. Schritte und Hindernisse auf dem Weg zur Zahlwerdung

Trotz aller Leistungen der Antike, die zur Entdeckung und zum Studium inkommensurabler Größen führten, mussten bis zur Anerkennung des Irrationalen als Zahl noch Jahrhunderte vergehen. Das Irrationale war nicht nur die Verneinung des Rationalen, es war zugleich das „Unaussprechliche, Unbegreifliche, Bildlose“ (Sonar 2011, S. 47) oder das Unbestimmbare, wie es in dem griechischen Adjektiv *arrhaetos* und seinem lateinischen Pendant *surdus* zum Ausdruck kommt.

Ihre mathematische Bewährung, zum Beispiel bei der theoretischen Fundierung der Analysis, hat den irrationalen Zahlen mittlerweile einen unangefochtenen Platz in der Architektur des Zahlensystems gesichert. Und doch gilt, dass ihre Entdeckung „selbst bis zum heutigen Tag auf nachdenkliche Köpfe wie eine Herausforderung wirkt“ (Courant & Robbins 1992, S. 48; vgl. auch Bedürftig & Murawski 2015). Diese Herausforderung besteht in dem von M. Stifel so eindrücklich geschilderten Doppelcharakter: Einerseits sind irrationale Zahlen sowohl Gegenstände wie Werkzeuge tiefliegender Beweise, andererseits entziehen sie sich dort, wo Arbeitstitel wie $\sqrt{2}$ nicht ausreichen, einer genauen „Bezifferung“, sie werden unaussprechlich, unbestimmbar und verschwinden „unter einem Nebel der Unendlichkeit“ (Stifel 1544, S. 103).

4. Bedeutungswandel des Begriffes „Irrationalität“ in der Philosophie

Als Übertragung in die Philosophie taucht das Adjektiv „irrational“ erst um 1800 auf und bezeichnet einen dem Verstand nicht zugänglichen Bereich der Erkenntnis (Rücker 1976, S. 583 f.). Für Fichte und Hegel beginnt dort, wo für die deduktiv verfahrenden Wissenschaften Rationalität an ihre Grenzen stößt, das Terrain philosophischer Vernunft. Irrationalität in diesem Sinne meint etwas dem Verstande, nicht aber der Vernunft Entgegengesetztes. Dabei ist Vernunft seit Kant als ein die rationale Verstandestätigkeit umfassendes und übersteigendes Denkvermögen zu verstehen.

So artikuliert sich ein differenziertes Bewusstsein über Möglichkeiten und Grenzen des rationalisierenden Denkens und über weitergehende Erkenntnismöglichkeiten, das Anlass zu kontroversen Standpunkten gibt. Im weiteren Verlauf wird das, was als irrational bezeichnet wird, zunehmend vom jeweils zugrunde liegenden Rationalitätsbegriff abhängig. Eine allgemeine Definition des Begriffs „Irrationalität“ und eine präzise Verwendung werden dadurch immer schwieriger. Dies führt schließlich dazu, dass das Urteil „irrational“ vor allem pauschal-polemisch verwendet wird. Zum neueren Begriffsgebrauch zieht Rücker (1976, S. 587) deshalb das Fazit: „Irrational denken und des Irrationalismus schuldig sind – die anderen.“

5. Irrationale Zahlen im Mathematikunterricht als Bildungschance

Der Stellenwert des Themas „irrationale Zahlen“ im Mathematikunterricht hat sich deutlich verändert. Bigalke (1983, S. 307) stellt noch fest, dass es in fast allen Lehrplänen für die Sekundarstufe I an Realschulen und Gymnasien verankert ist. In den aktuellen Bildungsstandards (KMK 2004, 2012) kommt der Begriff „irrationale Zahl“ dagegen nur noch indirekt vor. Seine Behandlung ist als Möglichkeit angedeutet, aber nicht explizit gefordert.

Die historischen Betrachtungen haben jedoch gezeigt, wie sehr eine Behandlung der irrationalen Zahlen das Bild des Faches Mathematik und seiner Bedeutung bereichern kann – vor allem, wenn Schülerinnen und Schüler Gemütsbewegungen nacherleben, von denen die Entdeckung des Irrationalen begleitet war. Und schließlich kann der Mathematikunterricht sogar zur Klärung eines gesellschaftlich brisanten Begriffsproblems beitragen.

Literatur

Artmann, B. (1999). *Euclid – The Creation of Mathematics.* New York: Springer.

Bedürftig, Th. & Murawski, R. (2015). *Philosophie der Mathematik.* 3. Auflage. Berlin/Boston: de Gruyter.

Bigalke, H.-G. (1983). Rekonstruktionen zur geschichtlichen Entwicklung der Inkommensurabilität. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4(4), 307–354.

Courant, R. & Robbins, H. (1992). *Was ist Mathematik?* 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Prestel, A., Remmert, R. (1983). *Zahlen.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Kleinknecht, H. (2013). Der Logos im Griechentum und Hellenismus. In L. Perilli, (Hrsg.), *Logos. Theorie und Begriffsgeschichte* (S. 263–278). Darmstadt: WBG.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

KMK (Hrsg.). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003*. München: Wolters Kluwer.

Mittelstraß, J. (2014). *Die griechische Denkform. Von der Entstehung der Philosophie aus dem Geiste der Geometrie.* Berlin/Boston: De Gruyter.

Perilli, L. (2013). Logos. Das Bauzeug der Welt. In L. Perilli, (Hrsg.), *Logos. Theorie und Begriffsgeschichte* (S. 1–18). Darmstadt: WBG.

Rücker, S. (1976). Irrational, das Irrationale, Irrationalismus. In J. Ritter & K. Gründer (Hrsg.), *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Band 4 (S. 583-588). Basel: Schwabe & Co (Lizenzausgabe der WBG).

Schwemmer, O. (1975). Ratio. In J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Band 3 (S. 462). Stuttgart, Weimar: Metzler.

Sonar, Th. (2011). *3000 Jahre Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Nürnberg: Johan Petreium.