

Argumentationstheoretische und linguistische Analyse von Beweisen in natürlicher Sprache

Logische Strukturen und sprachliche Mittel im Fokus der Analyse

Beweise werden innerhalb der Mathematikdidaktik oft qualitativ mit dem Toulmin-Modell (1958) analysiert (z.B. bei Pedemonte, 2007), das für alltägliche Argumentationen geschaffen wurde. Hierbei werden die Nennungen von Voraussetzungen, Schlussregeln und Schlussfolgerungen identifiziert, deren Unterscheidung für das Verständnis der logischen Struktur von Beweisen und zur Vermeidung von Zirkelschlüssen notwendig ist (Heinze & Reiss, 2003). Bei der Betrachtung von mathematischen Sätzen als Schlussregeln muss – im Gegensatz zu alltäglichen Argumentationen – deren konditionale Struktur berücksichtigt werden, da Implikationen aus hypothetischen Voraussetzungen und Schlussfolgerungen bestehen (Pedemonte, 2007). Dabei nutzen (nicht rein formal-symbolisch gefasste) mathematische Beweise eine Sprache, die sich in ihren grammatikalischen Strukturen und deren Bedeutungen von der Alltagssprache unterscheidet (Schleppegrell, 2007, S. 146). Die Sprachmittel und grammatikalischen Strukturen stellen eine Herausforderung für viele Lernenden dar, insbesondere wenn ihnen die formalen Hintergründe meistens noch nicht bekannt sind (O’Halloran, 1998). Daraus ergibt sich die Forderung – neben den inhaltlichen – auch sprachliche Anforderungen von Beweisen und Beweisprozessen zu identifizieren, um diese im Unterricht expliziter thematisieren zu können (Mariotti, Durand-Guerrier, & Stylianides, 2018, p. 80).

Diese Forderung passt in das generelle Forschungsprogramm, themenspezifische, lernförderliche Sprachmittel für unterschiedliche Themen zu identifizieren (Schleppegrell, 2007; Prediger & Hein, 2017). Für diesen Zweck wird hier auf die systemisch-funktionale Grammatik nach Halliday (1985) zurückgegriffen, um grammatikalische Strukturen und deren engen Zusammenhang zu deren Bedeutungen empirisch zu untersuchen.

Forschungsinteresse, Datenkorpus und Methoden der qualitativen Analyse

Forschungsinteresse: Untersucht werden Lernenden-Texte, die im Rahmen eines Lehr-Lern-Arrangements über deduktives Schließen entstanden sind (Hein & Prediger, 2017; Prediger & Hein, 2017) im Hinblick auf Explikation der logischen Elemente und logische Beziehungen und die dafür verwendeten Sprachmittel, um förderliche und hinderliche Sprachmittel zu rekonstruieren.

Datenkorpus: Das untersuchte Datenkorpus besteht aus 63 verschriftlichten Beweise von 48 Lernenden aus den Klassen 8-12. Im empirischen Teil dieses Beitrags werden Analysen von zwei Texten in jeweils einem Beweisschritt exemplarisch vorgestellt.

Für die qualitative Analyse wird in diesem Beitrag 1.) das *Toulmin-Modell* (1958) mit der Adaption für Implikationen (Pedemonte, 2007) genutzt, um die in den Texten genannten logischen Elemente (Voraussetzungen, Schlussregel (generelle Voraussetzung, generelle Schlussfolgerung), Schlussfolgerung) zu identifizieren. Für die linguistische Analyse wird 2.) die *systemisch-funktionalen Grammatik* nach Halliday (1985) genutzt, um die Sprachmittel sowohl für die logischen Elemente (Kästen in Abb.1) als auch für die logischen Beziehungen zwischen den logischen Elementen (Pfeile in Abb.1) zu identifizieren und linguistisch zu untersuchen.

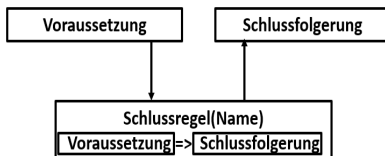


Abbildung 1: Erweitertes Toulmin-Modell

Empirische Einblicke in argumentationstheoretische und linguistische Analysen

Die Analysen werden hier exemplarisch an zwei Textausschnitten der Schüler Lasse (9. Klasse) und Jannis (10. Klasse) gezeigt. In den Texten haben die beiden Schüler den Beweis des Wechselwinkelsatzes verschriftlicht, die Ausschnitte beziehen sich auf den Beweisschritt zur Anwendung des Stufenwinkelsatzes. Abbildung 3 zeigt die Anordnung der geometrischen Konstellation in der von den Lernenden bearbeiteten Aufgabe mit den parallelen Geraden g und h .

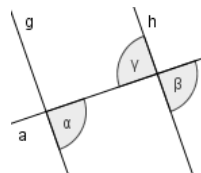


Abbildung 2: Konstellation für Beweis des Wechselwinkelsatzes

Lasse schreibt für die Anwendung des Stufenwinkelsatzes:

α und β sind laut des Stufenwinkelargumentes gleich groß.

Abbildung 3: Lasses Versprachlichung der Anwendung des Stufenwinkelsatzes

Lasse benennt die Schlussregel mit „Stufenwinkelerargument“ und die Schlussfolgerung „ α und β sind [...] gleich groß“. Die logische Beziehung von der Schlussregel zur Schlussfolgerung wird mit „laut“ versprochen. Die Voraussetzungen, die in der Aufgabe ge-

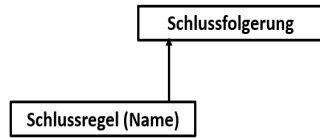


Abbildung 4: Analyse von Lasses Text mit Toulmin

nannt werden bzw. die für den mathematischen Satz erfüllt sein müssen, werden nicht genannt (zur Analyse mit Toulmin siehe Abb. 4). In der linguistischen Analyse zeigt sich, dass Lasse die Schlussregel durch eine Nominalisierung („Stufenwinkelerargument“) verdichtet und nicht deren Inhalt expliziert. Durch die Nominalisierung ist auch die verdichtete Versprachlichung der logischen Beziehung mit der kausalen Präposition „laut“ möglich.

Jannis schreibt hingegen bei der Anwendung des Stufenwinkelsatzes:

Die Voraussetzung für das Stufenwinkelerargument ist, dass zwei parallele Geraden von einer Geraden geschnitten werden. In diesem Beispiel werden die parallelen Geraden g & h von a geschnitten. Daraus folgt, dass $\beta = \alpha$ ist.

Abbildung 5: Jannis' Versprachlichung der Anwendung des Stufenwinkelsatzes

Jannis expliziert in seinem Text die Voraussetzung des Satzes („dass zwei parallele Geraden von einer Geraden geschnitten werden“) und bezeichnet diese auch als solche („Die Voraussetzung für das Stufenwinkelerargument ist...“). Außerdem expliziert er sprachlich die in der Aufgabe vorliegenden Voraussetzungen („die parallelen Geraden g & h von a geschnitten“).

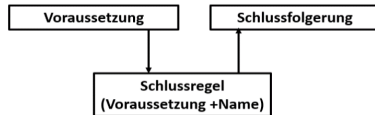


Abbildung 6: Analyse von Jannis' Text mit Toulmin

Die logische Beziehung zur Schlussfolgerung wird mit „Daraus folgt, dass...“ versprachlicht (zur Analyse mit Toulmin siehe Abb. 6). Jannis nutzt sowohl die Konjunktion „dass“, um einen Prädikativsatz einzuleiten („dass zwei parallele Geraden...“), mit der die Voraussetzung des mathematischen Satzes genannt wird, als auch, um die Schlussfolgerung mit einem Konsekutivsatz (Folgesatz) einzuleiten („Daraus folgt, dass...“). Der Konsekutivsatz kann satzübergreifend auf die vorherige Aussage Bezug nehmen. Damit nutzt Jannis unterschiedliche Konjunktionen, um die Beziehungen zwischen unterschiedlichen Informationen

auszudrücken. Konjunktionen ermöglichen im Gegensatz zu kausalen Präpositionen wie „laut“ mehr Explikationen der logischen Elemente, da Präpositionen sprachlich Nomen bzw. Nominalisierungen erfordern.

Diskussion

Die vorliegende argumentationstheoretische und linguistische Analyse der Nennung der logischen Elemente (Voraussetzungen, Schlussregel, Schlussfolgerung) und deren logischen Beziehungen und weitere Analysen für 63 andere verschriftlichte Beweise (siehe dazu auch Prediger & Hein, 2017) legen nahe, dass bestimmte Sprachmittel und grammatikalische Strukturen wie Konjunktionen den Lernenden dabei helfen können, mehr logische Elemente und logische Beziehungen bei der Versprachlichung von Beweisen auszudrücken und zu unterscheiden, während andere wie „gemäß“ nur verdichtete Schlussregeln wie „Scheitelwinkelsatz“ zulassen. Damit kann diese kombinierte Analyse einen Beitrag leisten, um Lehrende mit Wissen über Sprachmittel zu unterstützen, die den Lernenden helfen kann, Herausforderungen beim Beweisen zu bewältigen, indem sie mehr logische Elemente und deren logische Beziehungen explizieren.

Literatur

- Halliday, M. A. K. (1985). *Introduction to functional grammar*. London: Arnold.
- Hein, K., & Prediger, S. (2017). Fostering and investigating students' pathways to formal reasoning: A design research project on structural scaffolding for 9th graders. In T. Dooley & G. Guedet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 163–170). Dublin, Ireland: DCU/ERME.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. *International Newsletter of Proof*, 4, 6.
- Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education - Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75–89). Oxon: Routledge.
- O'Halloran, K. L. (1998). Classroom Discourse in Mathematics: A Multisemiotic Analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359–388.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41.
- Prediger, S., & Hein, K. (2017). Learning to meet language demands in multi-step mathematical argumentations: Design research on a subject-specific genre. *European Journal of Applied Linguistics*, 5(2), 309–335.
- Schleppegrell, M. J. (2007). The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: A Research Review. *Reading & Writing Quarterly*, 23(2), 139–159.
- Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.