Markus HENSGENS & Marvin TITZ, Aachen

Iterative Verfahren – Ein Schülerarbeitsheft mit symbolischem, ikonischem und enaktivem Lernmaterial

Bereits im 17. Jahrhundert erkannten Sir Isaac Newton und Joseph Raphson die Bedeutung iterativer Verfahren für die approximative Bestimmung von Nullstellen und zahlreiche weitere Probleme. Seitdem wurden zahlreiche iterative Verfahren entwickelt, die im Zuge der Digitalisierung in der reinen und angewandten Mathematik noch erheblich an Relevanz gewonnen haben. Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungen sind fester Bestandteil aller ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge und insbesondere aus der numerischen Mathematik nicht mehr wegzudenken. Auch Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme werden thematisiert und mit leistungsstarken Rechnern binnen weniger Sekunden näherungsweise ermittelt. Die angewandte Mathematik ist dort auf Näherungsverfahren angewiesen, wo analytische Lösungsverfahren nicht zur Verfügung stehen oder an ihre Grenzen stoßen. Sie bedient sich aus dem Fundus mathematischer Ideen, um die bestmögliche Lösung schrittweise anzunähern.

Angewandte Mathematik mit Schulrelevanz?

In den KMK-Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (2012) finden sich unter der Leitidee „Algorithmus und Zahl" Anknüpfungspunkte für eine Behandlung iterativer Verfahren im Unterricht. Obwohl der Nordrhein-Westfälische Kernlehrplan (2013) die Bildungsstandards insofern spezifiziert, als er Iteration explizit als mögliches Querschnittsthema zur Vernetzung der verschiedenen Inhaltsfelder nennt (2013, S. 17), so ist die Idee in den schulinternen Curricula nur selten umgesetzt und wird kaum im Unterricht behandelt. Dagegen zeigt sich im Lehrplan des Landes Sachsen (2014) die Option, numerische Verfahren zum Lösen von Gleichungen im Wahlpflichtbereich zu behandeln.

Einige Mathematikdidaktiker zählen Iteration und iterative Algorithmen zu den fundamentalen Ideen der Mathematik (Klika 2003, S. 5, Schreiber 1979, S. 167). Demnach spricht einiges dafür, SchülerInnen anhand des Themas Iteration die zentrale Rolle der Mathematik als vernetzende Wissenschaft in Beruf und Leben zu verdeutlichen. Das Thema *Iteration* bzw. *iterative Verfahren* ermöglicht außerdem eine fächerübergreifende Thematisierung mit anderen Unterrichtsfächern wie Informatik, Biologie oder Wirtschaftswissenschaften, die allesamt in der Praxis auf derartige Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik angewiesen sind.

Konzept und Methodik

Die Lernenden bemühen sich um Kenntnis, Verständnis und die zielgerichtete Anwendung der iterativen Verfahren zur Nullstellenbestimmung (Bisektion, Newton-Verfahren und Sekantenverfahren) und werden dazu sensibilisiert, ein Nullstellenproblem im Sachzusammenhang angehen und interpretieren zu können. Dabei ziehen sie begründet das Verfahren zu Hilfe, welches am besten geeignet und im Kontext das Problem am besten zu lösen vermag. Um dies zu erreichen, werden zunächst die Begriffe Iteration sowie Approximation eingeführt, um alle Lernenden auf einen gemeinsamen Kenntnisstand zu bringen und sie mit der benötigten Fachsprache vertraut zu machen. Zudem wird nicht nur ein iteratives Verfahren erläutert, sondern gleich drei Verschiedene, um die Verfahren miteinander vergleichen zu können. Damit erarbeiten sich die Lernenden Kenntnis über die Vor- und Nachteile des jeweiligen Iterationsverfahrens. Schließlich können sie ihr Wissen in einem eigenen Kapitel vertiefen und eigene Entscheidungskriterien für die Auswahl eines geeigneten Verfahrens entwickeln. Alle drei Abschnitte – zur Bisektion, Newton- und Sekantenverfahren – weisen ein eigenes Übungsblatt inklusive kommentierter Lösungen auf, wobei die Übungsaufgaben möglichst alle fünf prozessbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans NRW (2013) „Argumentieren“, „Kommunizieren“, „Anwenden“, „Modellieren“ und „Werkzeuge nutzen“ widerspiegeln sollen.

Abb. 1: Schülerarbeitsheft

Die Methodik des Schülerarbeitshefts mitsamt der Begleitmaterialien orientiert sich an den von Jerome S. Bruner eingeführten Repräsentationsmodi (1974, S. 49). Jedes der drei Verfahren wird im Heft symbolisch, ikonisch sowie enaktiv dargestellt, sodass die SchülerInnen die Möglichkeit haben, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln. Die Lernenden können sich diejenige Darstellungsweise auswählen, die auf ihre Bedürfnisse und Vorlieben am besten zugeschnitten ist. Dadurch ermöglicht das Lernheft, die Thematik einem großen Schülerkreis zugänglich zu machen.

Enaktive Lernmaterialien – Zwei Beispiele

Der Grundaufbau der Abschnitte zu den Iterationsverfahren im Schülerarbeitsheft ist immer gleich: Neben einer kurzen Einführung, welche der Herangehensweise einer mathematischen Vorlesung nachempfunden ist, werden hilfreiche Tipps zum jeweiligen Verfahren und zur Anwendung sowie mögliche Stolpersteine und Hürden thematisiert. Es folgen Einheiten, die durch die drei Darstellungsebenen einen Zugang zur Durchführung des Verfahrens ermöglichen. Abschließend wird ein Übungsblatt zur Selbstevaluation angeboten.

Beispielhaft wird hier auf den Abschnitt zur Bisektion etwas näher eingegangen: Kennzeichnend für dieses Lernheft ist die Möglichkeit die Bisektion – wahlweise, verknüpfend oder wechselnd – symbolisch, ikonisch oder enaktiv angehen zu können. Auf der symbolischen Ebene kann die Bisektion formal, analytisch durchgerechnet werden. Zur primär ikonischen Darstellung dient ein kurzes Lernvideo, in dem die iterativen Schritte anhand von Abbildungen erläutert werden. Zuletzt eignet sich der enaktive Zugang zur spielerischen und motivierenden Aneignung der wesentlichen Inhalte und Schritte des Verfahrens. Dabei kann der Lernende die Bisektion anhand eines Modells händisch nachempfinden (Abb. 2). Auf einem Brett können Schrauben an den Stellen eingedreht werden, wo die Intervallgrenzen im jeweiligen Schritt liegen. Die Orientierung des Schraubenkopfes signalisiert dabei das Vorzeichen des Funktionswerts der jeweiligen Grenze (waagerechter Schraubenkopf = negatives Vorzeichen, senkrechter Schraubenkopf = positives Vorzeichen). Mit Gummiringen lässt sich die Verkleinerung

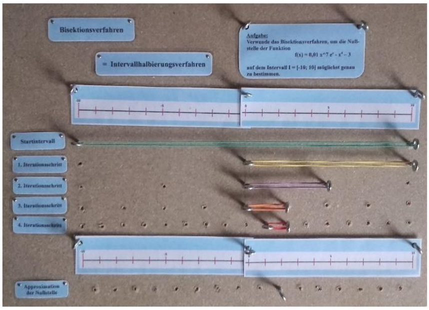

Abb. 2: Enaktives Material – Bisektion

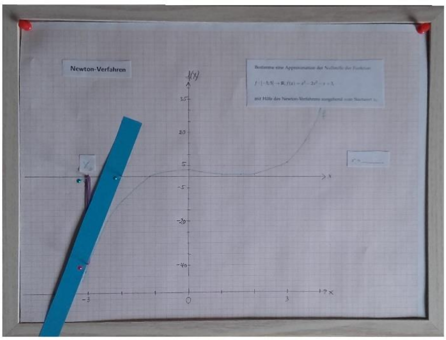

Abb. 3: Enaktives Material – Newton-Verfahren

bzw. Halbierung der Intervalllängen je Iterationsschritt visualisieren und anhand des Zahlenstrahls kann die approximierte Nullstelle schließlich mit entsprechender Genauigkeit abgelesen werden. Abbildung 3 zeigt das enaktive Lernmaterial zum Newton-Verfahren. Mit Hilfe von Stecknadeln – zur Kennzeichnung von Startwerten, Iterierten und Funktionswerten – kann das Verfahren an verschiedenen Aufgaben durchgeführt werden. Dabei vermitteln die Materialien nicht nur das allgemeine Vorgehen, sondern verdeutlichen auch die Bedeutung eines gut gewählten Startwerts in der Umgebung der Nullstelle. Darüber hinaus können die Lernenden den im Schülerarbeitsheft herausgearbeiteten Unterschied zwischen Sekanten- und Newton-Verfahren anschaulich nachvollziehen: Das Sekanten-Verfahren ist nichts anderes als ein näherungsweise durchgeführtes Newton-Verfahren, da die benötigte Ableitung als Steigung einer Tangenten in jedem Iterationsschritt lediglich durch eine Sekantensteigung approximiert wird.

Fazit

Die numerische Seite (insbesondere der angewandten) Mathematik kann unserer Meinung nach in der gymnasialen Oberstufe sowohl praktisch als auch theoretisch beleuchtet werden. Sie spiegelt fundamentale Ideen der Mathematik wider und ist von großer Relevanz in der heutigen Praxis. Wir sind überzeugt, mit dem entwickelten Lernmaterial eine nicht zu komplexe, sondern zugängliche Umsetzung in der Schule ermöglicht zu haben; sodass – auch wenn der zeitliche Spielraum begrenzt ist – eine auszugsweise Behandlung im Regelunterricht sowie eine Behandlung in Zusatzangeboten flexibel möglich wird und mehr SchülerInnen diese Seite der Mathematik kennen und schätzen lernen können.

Literatur

Bruner, J. S. (1974): *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin: Berlin Verlag, Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Dahmen, W., Reusken, A. (2008): *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler.* 2. Aufl. Berlin u. a.: Springer.

Klika, M. (2003): *Zentrale Ideen – echte Hilfen.* In: Mathematik lehren 119. Seelze: Friedrich.

KMK (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Köln: Wolters Kluwer

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.) (2013): *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in NRW – Mathematik.* Heft 4720. 1. Aufl. Düsseldorf.

Schreiber, A. (1979): *Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik*. In: Journal für Mathematik-Didaktik. Heidelberg: Springer.