

Stefan HOCH, Frank REINHOLD, Bernhard WERNER,  
Jürgen RICHTER-GEBERT & Kristina REISS, München

## **Erhebung intuitiver Größenordnungsvorstellungen von Bruchzahlen mit Touchscreen-Geräten**

### **Einleitung**

Forschungsergebnisse aus der Kognitionspsychologie legen nahe, dass Kinder ein Konzept für die Ausdehnung kontinuierlicher Mengen entwickeln, noch bevor sie ein Verständnis für Zahlen und Zählen zeigen (z. B. Feigenson, Carey & Spelke, 2002). Nichtsdestotrotz wird bei der Vermittlung von Bruchzahlkonzepten meist auf zählbare Modelle zurückgegriffen. Die Entwicklung einer Größenordnungsvorstellung – der Bruch  $a/b$  als kontinuierliche Größe für das Verhältnis  $a : b$  – wird meist vernachlässigt (z. B. Meert, Grégoire, & Noël, 2010).

Vorstellungen zur Größenordnung von Bruchzahlen können dabei als ein intuitiver Prozess konzeptualisiert werden: Nach der Darbietung eines schriftlichen oder verbalen Stimulus wird augenblicklich von einer diskreten und symbolischen Darstellungen zweier Zahlen  $a$  und  $b$  hin zu einer – zunächst rein mentalen – ikonischen Repräsentation gewechselt, die auf kontinuierlichen Darstellungen basiert.

Eine solche intuitive Vorstellung zur Größenordnung von Bruchzahlen zu untersuchen ist nicht trivial: diskrete oder diskretisierbare Bruchzahldarstellungen – z. B. vorunterteilte geometrische Ganze – aktivieren meist sofort Zählstrategien (DeWolf, Bassok & Holyoak, 2015), die ohne Größenordnungsvorstellungen auskommen. Die Verwendung von kontinuierlichen Aufgabenformaten (d. h. ohne vorgegebene Unterteilung) in Paper-Pencil-Erhebungen kann ebenso zu Strategien frei von Größenordnungsvorstellungen führen – z. B. das Berechnen von Winkeln im Kreisdiagramm.

Zur Erhebung intuitiver Größenordnungsvorstellungen von Brüchen erscheinen daher andere – neue – Erhebungsmethoden nötig, in denen Lösungen durch Zählen oder Partitionieren nicht oder zumindest nur erschwert möglich sind. Hier erscheint unserer Meinung nach der Einsatz von kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben auf Touchscreen-Geräten wie Tablet PCs vielversprechend, unter anderem weil sie eine Eingabe mit den Fingern und ohne weitere Hilfsmittel ermöglichen.

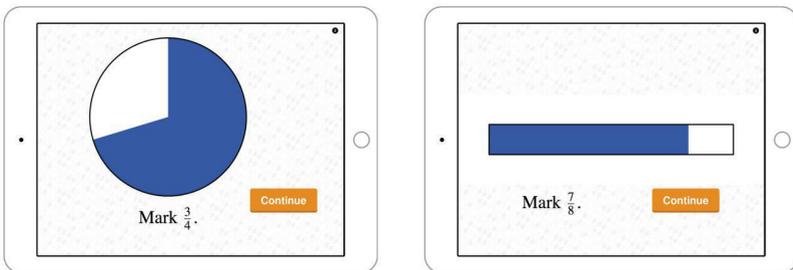
### **Methodik**

Zur Erforschung des Einsatzes von Touchscreen-Geräten zur Erhebung von Forschungsdaten im Schulunterricht arbeiteten im Zuge der

ALICE:Bruchrechnen-Studie Schülerinnen und Schüler in ihrem Mathematikunterricht mit iPads (z. B. Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert, & Reiss, 2018a). In diesem Beitrag betrachten wir eine spezifische Teilerhebung mit 199 Mittelschülerinnen und Mittelschülern zur intuitiven Größenordnungsvorstellung.

Zum Einsatz kamen dabei zwei interaktive Aufgaben, in denen jeweils ein leeres Ganzes (Kreis bzw. Balken) gegeben war. Das Ganze konnte durch das Ziehen des Fingers bis zur gewünschten Stelle kontinuierlich gefärbt werden (vgl. Abb. 1). In beiden Aufgaben waren jeweils 16 Brüche zu markieren:  $1/5$ ,  $1/3$ ,  $2/6$ ,  $3/8$ ,  $2/5$ ,  $4/10$ ,  $3/5$ ,  $6/10$ ,  $5/8$ ,  $2/3$ ,  $4/6$ ,  $3/4$ ,  $6/8$ ,  $4/5$ ,  $4/10$  und  $7/8$ . Sowohl die Reihenfolge der Aufgaben als auch die Reihenfolge der Brüche innerhalb der Aufgaben wurde zufällig festgelegt.

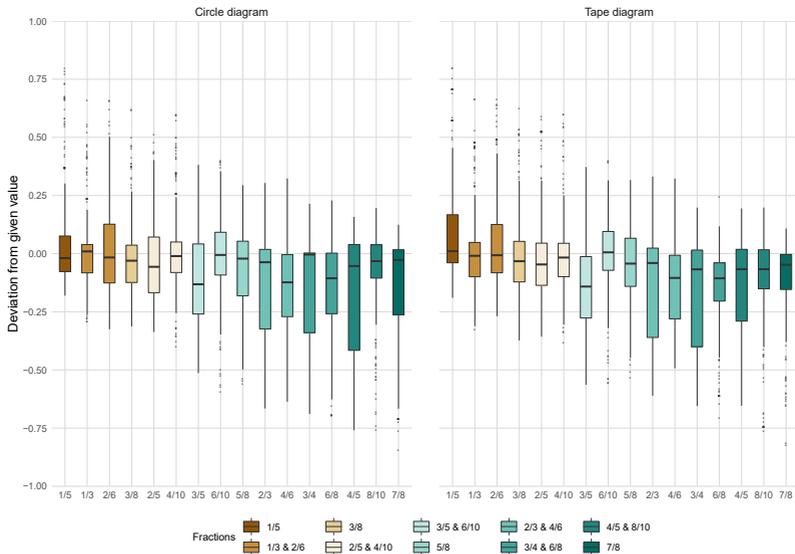
Bei der Arbeit mit den Aufgaben wurden für jede bearbeitete Teilaufgabe die folgenden Daten erfasst: Die Zeit, die zwischen der Anzeige des Stimulus und der Abgabe der Antwort verstrichen war (*time on task*) und der gefragte sowie der markierte Bruchteil, was die Berechnung der *Abweichung* der Eingabe von der exakten Lösung ermöglichte. Zusätzlich wurden die Bewegungen der Finger auf dem Touchscreen während der Bearbeitung aufgezeichnet (siehe Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert, & Reiss, 2018b).



**Abb. 1:** Aufgaben zur Erfassung intuitiver Größenvorstellungen auf Touchscreen-Geräten: „Markiere  $3/4$  am kontinuierlichen Kreisdiagramm“ (links) und „Markiere  $7/8$  am kontinuierlichen Balkendiagramm“ (rechts).

## Erste Ergebnisse & Diskussion

Abbildung 2 zeigt die Abweichungen der Eingaben der Stichprobe von der exakten Lösung für die einzelnen Brüche. Es zeigt sich eine leichte Tendenz der Schülerinnen und Schülern der Stichprobe, die Größe von Brüchen intuitiv eher zu *unterschätzen*, d. h. weniger zu markieren als dem gefragten Bruch entspräche.



**Abb. 2:** Boxplot der Abweichungen vom gefragten Bruch. Braun: Bruch kleiner  $1/2$ . Türkis: Bruch größer  $1/2$ . Möglicher Abweichungsbereich weiß hinterlegt.

Die Ergebnisse deuten an, dass der Einsatz von kontinuierlichen Visualisierungsaufgaben auf Tablet-PCs zur Erfassung der Vorstellung von Schülerinnen und Schüler zur Größenordnung von Bruchzahlen geeignet ist. Durch die Verwendung von Touchscreen-Technologie, bei der die Eingabe mit den Fingern und ohne weitere Hilfsmittel geschieht, sind Zähl- oder Unterteilungsstrategien schwer anzuwenden. Wir vermuten daher, dass dabei eher auf andere – intuitive – Konzepte einer Größenordnung von Bruchzahlen zurückgegriffen wird. Die Ergebnisse der Auswertung der Bearbeitungszeit untermauern diese Vermutung (Reinhold, Hoch, Werner, Richter-Gebert & Reiss, eingereicht).

Die beobachtete Unterschätzung der Größe von Brüchen kann auf eine Überzeugung hindeuten, dass Brüche für die Schülerinnen und Schüler „etwas Kleines“ sind.

Aufbauend auf den dargestellten Ergebnissen stellt sich die Frage nach der Korrektheit einer Antwort. Sie ist für diese Aufgabentypen jedoch nicht ohne weiteres zu beantworten, da eine gewisse Fehlertoleranz nötig erscheint. Je nach Forschungsfrage sind hier unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar. Unserer Meinung nach erscheinen vier Kodierungen sinnvoll, die auf der Abweichung vom gefragten Bruch basieren: (1) bedingungslose Korrektur (Abweichung kleiner als ein absoluter Wert), (2) stichproben-basierte

Korrektur (Abweichung unter einem Anteil der Standardabweichung), (2) item-basierte Korrektur (Abweichung kleiner als ein item-spezifischer Wert, z. B. in Abhängigkeit des Nenners des gefragten Bruches) oder (4) eine Korrektur, die die Art der Erhebung in den Vordergrund rückt (bspw. Abweichung unter „einem Fingerbreit“). Die Wahl der Kodiermethode beeinflusst die Ergebnisse in einem hohen Maße und sollte daher wohlüberlegt getroffen werden: Zur Implementierung von Feedback erscheinen andere Entscheidungskriterien sinnvoll, als für quantitative empirische Bildungsforschung.

Abschließend ist zu sagen, dass das technische Framework zur Datenverarbeitung ohne größeren Aufwand in anderen digitalen Erhebungsinstrumenten eingesetzt werden kann, da es mit Rücksicht auf Wiederverwendbarkeit entwickelt wurde. Dies erlaubt es, zukünftige Studien in ähnlichen oder anderen (mathematischen) Kontexten vereinfacht aufzusetzen und so mathematikdidaktische Fragestellungen nachhaltig digital zu erforschen.

## Literatur

- DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. J. (2015). Conceptual structure and the procedural affordances of rational numbers: Relational reasoning with fractions and decimals. *Journal of Experimental Psychology: General*, *144*(1), 127–150.  
doi:10.1037/xge0000034
- Feigenson, L., Carey, S. & Spelke, E. (2002). Infants' Discrimination of Number vs. Continuous Extent. *Cognitive Psychology*, *44*(1), 33–66.  
doi:10.1006/cogp.2001.0760
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018a). Design and research potential of interactive textbooks: the case of fractions. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 839–848. doi:10.1007/s11858-018-0971-z
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018b). How Do Students Visualize Fractions? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 64). Umeå, Sweden: PME.
- Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244–259.  
doi:10.1016/j.jecp.2010.04.008
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (eingereicht). Assessing and teaching intuitive fraction magnitude sense: an innovative approach using touchscreen devices. *18th Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI)*.