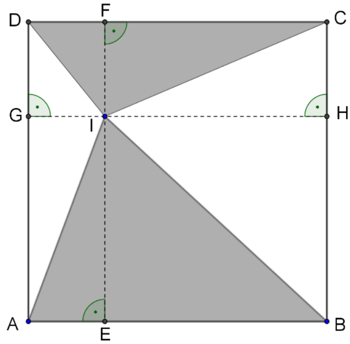
Hans HUMENBERGER, Wien

Flächenausgleich bei regelmäßigen Vielecken und verzerrten Schachbrettern

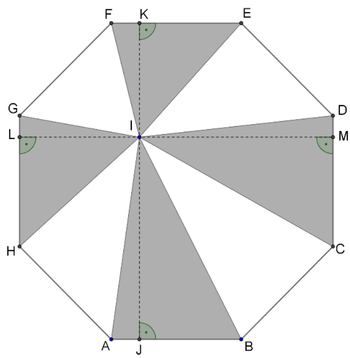


Bei einem Quadrat ist klar: Wenn man von einem beliebigen Punkt *I* im Inneren des Quadrates *ABCD* die Verbindungen zu den vier Ecken zeichnet und zwei einander gegenüberliegende der vier entstehenden Dreiecke schwarz (bzw. grau) färbt, dann ist die Flächeninhaltssumme von Weiß und Grau gleich. Die Begründung ist nicht schwierig, vgl. Humenberger/Schuppar 2016. In einer möglichen und naheliegenden Verallgemeinerung kann man fragen:

- Gibt es noch andere *regelmäßige Vielecke* (außer dem Quadrat), für die dies – mutatis mutandis – auch gilt? Wenn ja, welche? Begründung?

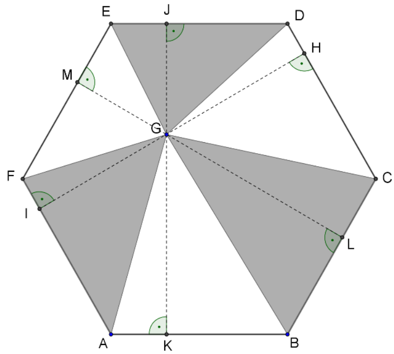
Dieses Problem ist gar nicht so leicht zu lösen, aber man kann mit DGS und den zugehörigen Features zum Messen durchaus explorieren. Man wird feststellen, dass das auch für alle möglichen anderen regelmäßigen Vielecke mit gerader Eckenzahl zu gelten scheint, d. h. auch für die Eckenzahlen $n = 6, 8, 10, 12, \ldots$ (ungerade viele Ecken sind ja bei diesem Phänomen a priori auszuschließen, denn dann gibt es ja nicht einmal gleich viele graue wie weiße Dreiecke). Die Frage, die bleibt, ist jene nach einer Begründung, *warum* das so ist.

Eine erste Schwierigkeit bei der Bearbeitung ist, dass die *Begründung* (natürlich nicht die DGS-Aktivitäten, deren Schwierigkeitsgrad ist natürlich praktisch unabhängig von *n*) beim regelmäßigen Sechseck deutlich schwieriger ausfällt als für das Quadrat (siehe unten), aber $n = 6$ ist wahrscheinlich bei den meisten Lernenden die naheliegende „1. Station" nach dem Quadrat. Wenn Lernende hier nicht alleine weiterkommen, könnte ein Tipp sein: „Betrachtet doch zunächst einmal das regelmäßige Achteck".

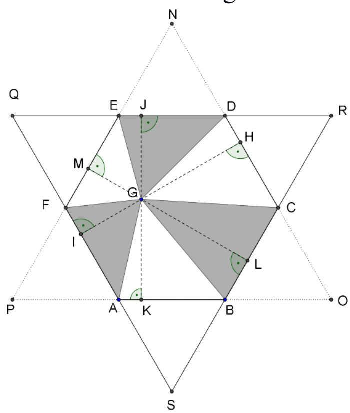


Praktisch dieselbe Begründung wie beim Quadrat lässt sich für alle durch 4 teilbaren n finden, denn da gehören die Dreiecke zu *Gegenseiten* des Vielecks immer zur selben Farbe (weiß oder grau). Und die Summe der zugehörigen Dreieckshöhen ist bei jeder Farbe klarerweise konstant: nämlich $(n/4) \times$Gegenseitenabstand. Wir haben diese Situation am regelmäßigen Achteck veranschaulicht (siehe oben; analog auch für $n = 12, 16, 20, \ldots$).

Nun fehlen also noch die Fälle $n = 6, 10, 14, \ldots$. Hier gehören die Dreiecke der Gegenseiten jeweils leider zu verschiedenen Farben, wir veranschaulichen die Situation am regelmäßigen Sechseck.



Diese Fälle brauchen nun etwas Kreativität („Problemlösen“) und vermutlich einen Hinweis durch die Lehrkraft. Da die Grundseiten der Dreiecke alle gleich lang sind (Seiten des *regelmäßigen* Vielecks), hat man für die Flächengleichheit von Weiß und Grau zu zeigen, dass die Summen der „weißen“ und „grauen Dreieckshöhen“ gleich sind, im Fall des regelmäßigen Sechsecks: $|GH| + |GK| + |GM| = |GI| + |GJ| + |GL|$. Vermutlich liegen im Unterricht auch hier einige mögliche Schwierigkeiten bei der selbständigen Bearbeitung durch Schüler/innen, denn das Umdenken „gleiche Flächensumme“ $\Leftrightarrow$ „gleiche Höhensummen“ liegt nicht für alle Lernenden auf der Hand. Behutsame Hinweise durch die Lehrkraft sind hier gefragt (helfen, aber nicht gleich alles verraten).



Jedenfalls ist die angesprochene Gleichheit der Höhensummen bei Weiß und Grau jetzt leider nicht mehr unmittelbar aus der Figur abzulesen (wie bei den obigen Fällen $4 \mid n$).

Nun ist es aber so, dass die drei „weißen Grundseiten“ zu einem gleichseitigen Dreieck verlängert werden können, und die drei „grauen Grundseiten“ ebenfalls, man erhält klarerweise kongruente gleichseitige Dreiecke. Auch dieses Verlängern kann ggf. ein Hinweis durch die Lehrkraft sein.

Nun erinnert die Situation doch sehr an den *Satz von Viviani*: In gleichseitigen Dreiecken hat jeder Punkt gleiche Abstandssumme von den Seiten, d. h. $|GH|+|GK|+|GM|$ ist für alle Lagen von G konstant und ebenso $|GI|+|GJ|+|GL|$. Diese beiden Summen haben auch denselben Wert, weil die zugehörigen gleichseitigen Dreiecke kongruent sind. D. h. der Beweis für $n=6$ ist erbracht.

Mit diesem Prinzip und dem *verallgemeinerten Satz von Viviani* (in jedem regelmäßigen Vieleck ist die Abstandssumme eines inneren Punktes von den Seiten konstant) kann auch die Begründung für die noch ausstehenden Fälle $n=10,14,18,\ldots$ erbracht werden.

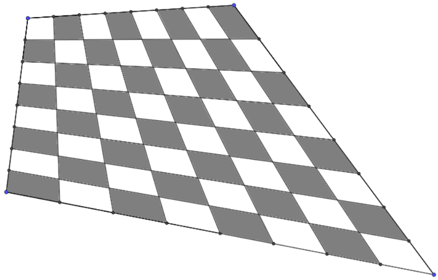
Der Beweis des verallgemeinerten Satzes von Viviani (vgl. Walser/Vargyas 2015) kann ganz analog zum gleichseitigen Dreieck geführt werden: Wenn man einen inneren Punkt X des *regelmäßigen* (es genügt für das Folgende: *gleichseitigen*) Vielecks mit allen Ecken verbindet, hat man die Vieleckfläche in Dreiecke aufgeteilt. Der Flächeninhalt I des regelmäßigen Vielecks kann daher dargestellt werden als Summe von Dreiecksflächeninhalten (Dreiecke mit Grundseitenlänge a und den Höhen h_i): $I=\sum_{i=1}^{n}\frac{a\cdot h_i}{2}$; weil dabei I und a konstant sind, muss für jeden Punkt X des regelmäßigen Vielecks auch $\sum_{i=1}^{n}h_i$ konstant sein. Dieser Beweis[1] ergibt sich unmittelbar aus der Dreieckszerlegung und bedarf kaum eines kreativen Einfalls. Viele Lernende werden diesen auch in selbständiger Arbeit finden können.

Der Satz von Viviani (konstante Abstandssumme eines inneren Punktes zu den Seiten) gilt auch in anderen Verallgemeinerungen. Z. B. in $2n$-Ecken, bei denen alle Gegenseitenpaare parallel zueinander sind, das einfachste Beispiel wären Parallelogramme. Auch hier können wieder zuerst DGS-Experimente gemacht werden, an die sich dann einfache mathematische Beweise anschließen. Wieder eine andere Verallgemeinerung betrifft die *gleichwinkligen* Vielecke, in denen der Satz von Viviani auch gilt. Die zugehörige Begründung ist hier nicht mehr so offensichtlich, aber trotzdem noch elementar (vgl. de Villiers 2005). Alleine der Satz von Viviani bietet also eine Fülle an Möglichkeiten, ausgehend von DGS-Experimenten sich auf die Suche nach logischen Beweisen zu machen und *Mathematik als Prozess* zu erleben.

---

[1] Für den Fall eines *gleichseitigen Dreiecks* gibt es auch noch andere, interessante Beweise.

Verzerrte Schachbretter



Bei einem normalen Schachbrett gibt es genauso viele weiße wie schwarze Felder (kongruente Quadrate), daher ist es klar, dass die Summen der Flächeninhalte aller grauen Felder (in Wirklichkeit oft auch schwarz, wir verwenden hier aber graue) gleich der Flächeninhaltssumme bei den weißen ist. Wie ist das nun bei einem „schiefen“ bzw. „verzerrten“ Schachbrett? Bei einem solchen ist die Ausgangsfigur ein konvexes Viereck und jede Seite wird in 8 paarweise gleich lange Stücke geteilt, dann werden einander entsprechende gegenüberliegende Teilungspunkte verbunden, so dass innen ein „schiefes“ bzw. „verzerrtes“ Gitternetz entsteht. In gewohnter Manier soll wieder die Abwechslung zwischen weißen und grauen Flächen stattfinden.

Eine spannende Frage dabei ist, ob die eben erwähnte Eigenschaft der gleichen Flächeninhaltssummen dabei erhalten bleibt. Klarerweise sind es zwar wieder gleich viele weiße wie graue Flächenstücke, aber sie haben jetzt ganz unterschiedliche Formen, daher ist a priori dabei überhaupt nicht klar, ob die in Rede stehende Flächeneigenschaft bei dieser „Verzerrung“ erhalten bleibt. Für Details verweisen wir auf Humenberger 2018. Wir geben hier nur das Ergebnis an: Ja, diese Eigenschaft bleibt auch bei verzerrten Schachbrettern erhalten, nicht nur bei einem 8×8-Schachbrett, sondern sogar allgemein bei $2m \times 2n$-Schachbrettern. Die Begründung ist für den Fall $2^m \times 2^n$ relativ leicht (eine wiederholte Anwendung der Erkenntnisse aus dem 2×2-Fall).

Literatur

Humenberger, H., Schuppar, B. (2016): Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von Anné und sein Umfeld. In: Der Mathematikunterricht 62, 5, 26–36.

Humenberger, H. (2018): Flächenausgleich bei Weiß und Grau – Regelmäßige Vielecke und verzerrte Schachbretter. In: Der Mathematikunterricht 64, 4, 4 – 16.

De Villiers, M. (2005): Crocodiles and Polygons. In: Mathematics in School 34, 2, S. 2-4. http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vivianigen.pdf

Walser, H., Vargyas, E. (2015): Verallgemeinerung des Satzes von Viviani. In: Mathematikinformation Nr. 63. Zeitschrift des Vereins für Begabungsförderung. http://www.mathematikinformation.info