

Vorstellungsorientierung im Bereich der Potenzen

– Entwicklung eines Diagnoseinstruments –

Christos Itsios & Bärbel Barzel
Universität Duisburg-Essen

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Offen im Denken

Motivation

Vor ungefähr zwei Jahrtausenden war mit Archimedes die Idee geboren, große Zahlen mit Hilfe von hohen 10er Potenzen verkürzt zu erfassen. Die „Unbequemlichkeit“, die wiederholte Multiplikation gleicher Faktoren als nebeneinanderstehende Symbole darzustellen, formulierte auch Euler und schlug als erster das verkürzte Symbol a^n vor. Doch bis heute stellt für Lernende dieses Symbol und die dahinterstehende Operation eine Hürde dar (vgl. Itsios & Barzel 2018).

Theoretischer Hintergrund

Die Theorie der *Grundvorstellungen* beschreibt die Verbindung zwischen Mathematik und Realität auf Vorstellungsebene (vgl. vom Hofe 1992). Es werden zwei zentrale Aspekte identifiziert, einerseits die *normative* Ebene, die den Soll-Zustand bestimmt und andererseits die *deskriptive* Ebene, die den Ist-Zustand darstellt.

Forschungsfragen

- F1:** Welche Grundvorstellungen zu Potenzen sind aus normativer Sicht relevant und sinnvoll?
- F2:** Wie sollte ein Testinstrument konzipiert werden, um den Wissensstand der Lernenden im Bereich der Potenzen zu erheben?
- F3:** Über welche Vorstellungen zu Potenzen verfügen Lernende?

(F1): Grundvorstellungen zu Potenzen

Methode: Sachanalyse, Literatur und Expertenbefragung (n=40)

1. Wiederholtes Vervielfachen (WV)

nach n-maliger Ver-a-fachung entstehen a^n Objekte

zeitlich-sukzessiv (WVz) räumlich-simultan (WVr)



2. Kombinatorische Vorstellung (KV)

n-mal hintereinander a Möglichkeiten $\rightarrow a^n$ Möglichkeiten



3. Strecken um denselben Faktor (ST)

Vergrößerung, ohne Entstehung neuer Objekte

(F2): Entwicklung des Instruments

Methode: Design-Research mit mehreren Zyklen

1. Zyklus: (n=120)

Ziel: Kategorisierung von Fehlertypen, Entwicklung von Distraktoren

Weg: offene Items (Abb. 1)

Auswertung: Übergeneralisierung linearer Zusammenhänge (sog. *illusion of linearity*, vgl. Klinger 2018), Fixierung an multiplikativen Strukturen, Verwechslung von „Basis“ und „Exponent“

2. Zyklus: (n=176)

Ziel: Pilotierung der ersten Fassung des Testinstruments

Weg: geschlossene Items

Auswertung: quantitative Bestätigung der Fehlertypen

3. Zyklus: Vorbereitung der Hauptstudie (aktuell)

Weiterentwicklung des Testinstruments:

- Reduzierung der Anzahl der Items
 - Umformulierung der Items (Expertenvalidierung)
 - zweidimensionale Matrix zur Charakterisierung der Items (Abb. 2)
 - Optimierung der eingesetzten Repräsentationsarten (vgl. Klinger 2018):
situativ-sprachlich (s), numerisch-tabellarisch (n),
graphisch-visuell (g) und formal-symbolisch (f).
- \rightarrow Diagnoseinstrument VoDI^{Pot} (vgl. Abb. 3)
- Itemvalidierung am eindimensionalen Rasch-Modell

Ein Luftballon wird so mit Luft befüllt, dass sich sein Volumen nach jeder Stunde verdoppelt.
Nach 16 Stunden ist der Ballon voll mit Luft. Nach wie vielen Stunden war er nur halb voll? Was ist die Hälfte (bzw. 50%) von 2000?

Wach 8 Styrorden $\nearrow 30000$

Abb. 1: Häufig angegebene falsche Antworten

Abb. 2: Matrix zur Charakterisierung der Items

Mit welchem Term lässt sich das Bild unten beschreiben?

a. $5 \cdot 2$
b. 5^2
c. 2^5
d. $4 \cdot 5$

Ein Passwort besteht aus 8 Großbuchstaben aus dem 26-Buchstabigen Alphabet. Mit welchem Term lässt sich die Anzahl an verschiedenen Passwortern ausrechnen?

a. $8 \cdot 26$
b. 8^{26}
c. 26^8
d. 8^8

Abb. 3: Zwei der 20 Items

Literatur

- Itsios, C. & Barzel, B. (2018). Potenzen und Potenzrechnung – eine Herausforderung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018 (Bd. 2, S. 867–870). Münster: WTM-Verlag.
- Klinger, M. (2018). Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.

Kontakt

Christos Itsios
Didaktik der Mathematik
Universität Duisburg-Essen
christos.itsios@uni-due.de

