

Bewertung von Begründungen zu schriftlichen Subtraktionsverfahren

Für die schriftliche Subtraktion gibt es verschiedene Verfahren, die sich durch die Art der Differenzbildung sowie in der Technik der Bewältigung des Stellenübergangs (nötig, wenn in einer Spalte der Ziffernwert des Minuenden kleiner ist als der des Subtrahenden) unterscheiden, z. B. dem Erweitern oder dem Entbündeln. Die Entscheidung für ein Verfahren liegt seit einigen Jahren bei den Lehrkräften. Ein Argument für bzw. gegen ein Verfahren ist unter Berücksichtigung der aktuell vorherrschenden Verständnisorientierung im Mathematikunterricht, inwieweit das jeweilige Verfahren für Kinder gut verstehbar ist. Angenommen wird, dass die Kinder bei Verständnis des Verfahrens ihr Vorgehen nicht nur beschreiben, sondern auch begründen können. Dieser Unterschied zwischen Beschreiben und Begründen wird in den von Klein (2009) beschriebenen Erklärungsarten aufgegriffen. Eine Erklärung fungiert demnach unter anderem als Antwort auf eine *wie*-Frage („auf die Modalität von Prozessen [gerichtet]“, ebd.) – dann wird beschrieben. Erst bei der Antwort auf eine *warum*-Frage („auf kausale Faktoren (Ursachen, Gründe) [gerichtet]“, ebd.) wird begründet. Zu klären ist, woran sich im konkreten Fall der Subtraktionsverfahren der Unterschied zwischen dem Erklären-WIE und dem Erklären-WARUM – also einer Verständnis zeigenden Begründung – festmachen lässt. Beim Erklären-WARUM lassen sich außerdem die Kontexte unterscheiden, in denen unterschiedliche Begründungen zulässig sind, z. B. stellt Klein (2009) das wissenschaftliche und das Alltagserklären gegenüber. Zweiteres erlaubt als Erklären-WARUM auch eine Rechtfertigung (Angabe eines Zwecks, einer Ausgangssituation). Brunner (2014) stellt dieses eher alltagsbezogene Argumentieren als ein Ende des Spektrums von Begründen dem formal-deduktiven Beweis gegenüber. Die Frage ist, wo sich Begründungen zu Subtraktionsverfahren auf diesem Spektrum ansiedeln lassen.

Studie zu schriftlichen Subtraktionsverfahren

Im Rahmen einer explorativen Studie zum „Abziehen mit Entbündeln“ und „Ergänzen mit Erweitern“ mit Kindern aus zwölf vierten Klassen ($N=222$) aus fünf Schulen (je sechs Klassen und Lehrkräfte pro Verfahren: Erweitern $N_E=109$, Entbündeln $N_A=113$) wurde unter anderem mit zwei Aufgaben das Verständnis erhoben. Bei der ersten Aufgabe sollten die Kinder eine Rechnung mit Stellenübergang lösen und ihr eigenes Vorgehen erklären (Erklären-WIE), bei der zweiten anhand einer durchgeführten Rechnung die Schreibweise begründen (Erklären-WARUM; Entbündeln: „Warum wurde

die Sieben durchgestrichen und darüber eine Sechs geschrieben?“; Erweitern analog: „Warum wurde die kleine Eins hingeschrieben?“).

Die Kategorien zur Auswertung der Erklärungsaufgaben

Für die Einordnung der Erklärungen der Kinder wurden die beiden Aufgaben zum Verständnis mit qualitativer Inhaltsanalyse ausgewertet (induktive Kategorienbildung, wobei die Kategorien verfahrensübergreifend formuliert wurden, siehe Tab. 1). Als Verständnis zeigende Begründung wurde dabei gewertet, wenn der jeweils genutzte mathematische Zusammenhang deutlich wurde (beim Entbündeln: Die Größe des Minuenden wird nicht verändert; beim Erweitern: Die Differenz bleibt gleich.). Bei der Analyse wurden zusammenfassend die Textproduktionen jedes Kindes zu beiden Aufgaben in eine Kategorie überführt, da einige Kinder nur in der ersten oder der zweiten Aufgabe eine Begründung durch Bezug auf die entsprechende Gesetzmäßigkeit für ihr Vorgehen lieferten oder sich beide Bearbeitungen ergänzten.

Bei der Kategorienbildung stellte sich heraus, dass qualitativ feinere Differenzierungen nötig waren, um die Unterschiede in der Fähigkeit im Bezug auf die genutzten mathematischen Zusammenhänge abbilden zu können. Es wurde zum einen kodiert, wie das Kind den Stellenübergang in beiden vom Stellenübergang betroffenen Spalten beschrieben hatte. Für die Bewertung dieser Beschreibung wurde auf die *Benennung der Anzahlen und Bündelungseinheiten in beiden Spalten* geachtet (ab Code 1 unter a)). Zum anderen wurde einbezogen, wie sich das Kind zu dem *Zusammenhang zwischen den in zwei benachbarten Spalten vorgenommenen Schritten* äußerte (b)). Die zu diesen beiden Aspekten vergebenen Kodierungen wurden zu einer Gesamtbewertung der Beschreibung der Übergangstechnik zusammengefasst.

Code	Vorgehensweise des Kindes
0	Fehlerhafte Beschreibung: In den Beschreibungen der Vorgehensweise in den Spalten werden Fehler festgestellt (Zahlen/Bündelungseinheiten sind falsch, das Vorgehen ist grundsätzlich falsch beschrieben).
1	Beschreibung der Schreibweise bzw. Rechenweise: a) Das Kind benutzt entweder Anzahlen ohne Bündelungseinheiten oder verwendet Bündelungseinheiten falsch oder bleibt insgesamt unspezifisch (z. B. „etwas weggenommen“). b) Das Kind äußert sich darüber nicht.
2	Sehr ungenaue Beschreibung in Bezug auf die Benennung der passenden Bündelungseinheiten: a) Bleibt sehr ungenau (unspezifische Anzahl wie „etwas“ genannt), Bündelungseinheit falsch verwendet oder es fehlt die Bündelungseinheit in mindestens einer der beiden Spalten. b) Das Kind stellt einen Zusammenhang zwischen den einzelnen Spalten her, ohne dass die Vorstellung einer Zehnerbündelung deutlich wird.
3	Ungenaue Beschreibung mit Nennung der richtigen Bündelungseinheiten, fehlender Zusammenhang zwischen den Bündelungseinheiten: a) Das Kind

	beschreibt die Vorgehensweisen in beiden Spalten mit Nennung der richtigen Bündelungseinheit. b) Wie in Code 2
4	Beschreibung der vollen Übergangstechnik mit Nennung der richtigen Bündelungseinheiten und ihren Anzahlen: a) Das Kind beschreibt die Vorgehensweisen in beiden Spalten mit Nennung der richtigen Bündelungseinheiten und der richtigen Anzahlen. b) Das Kind stellt den Zusammenhang her und geht dabei auf die unterschiedlichen Bündelungseinheiten ein.

Tab. 1: Kategorien für die Bewertung der Erklärungen der Kinder

Ergebnisse

Zunächst lässt sich feststellen, dass die Grenze zwischen Erklären-WIE und -WARUM nicht einfach zu ziehen ist. Bei der ersten Aufgabe sahen alle Kinder eine Aufforderung zur Beschreibung ihres Vorgehens (*wie*), einige lieferten aber auch – z. T. ohne explizite Begründungsbenennung – schon Elemente zur Beantwortung der *warum-geht-das*-Frage mit. Bei der zweiten Aufgabe nannten viele Kinder sprachlich explizite Begründungen für ihr Vorgehen (z.B. angezeigt durch „weil“, „also“, „deshalb“). Dabei fällt auf, dass für viele Kinder als Begründung ausreichend zu sein schien, in der Spalte ohne Übergangstechnik nicht rechnen zu können:

Zuerst habe ich von 5 bis 7 gerechnet. Danach dachte ich: „Von 6 bis 2 geht nicht, also rechnete ich von 6 bis 12.“ Anschließend schrieb ich eine kleine 1 als Übertrag unter die 4. Und $4+1$ ergibt 5, also habe ich dann von 5 bis 7 gerechnet.

Die obere Begründung erscheint eher als Rechtfertigung, wie sie aus Alltagskontexten bekannt ist, als als eine mathematische Begründung für die Zulässigkeit des Vorgehens. Eine solche Erklärung wurde nicht als Begründung gewertet (Code 1), weil das Kind keine mathematische Legitimation für die Benutzung der 12 und keine Erklärung-WARUM für die „kleine 1 als Übertrag“ liefert.

Ab Code 2 werden Erklärungen als Begründungen eingeordnet, die dann in ihrer Qualität unterschieden werden. In den folgenden Beispielen (Code 2) bleiben die Erklärungen „schwammig“ und es ist unklar, ob die mathematischen Zusammenhänge wirklich verstanden wurden:

Warum wurde die kleine Eins hingeschrieben? Wenn man von 8 bis 4 rechnet, geht das nicht. Darum muss man von 8 bis 14 rechnen. Und wegen der 10 kommt dann an die nächste Stelle eine 1.

Warum wurde die Sieben durchgestrichen und darüber eine Sechs geschrieben? Weil man nicht $4-8$ rechnen kann, deswegen streicht man die Sieben durch und darüber schreibt man eine 6 und 10 werden zur 4 gebracht.

Zumindest (im zweiten Fall implizite) Ansätze des Bezugs auf einen mathematischen Zusammenhang werden hierbei geliefert. Die Kategorie 3 unterscheidet sich von der zweiten, indem bei der Darstellung einer Verbindung

zwischen den beiden betroffenen Spalten die richtigen Bündelungseinheiten genannt werden, es fehlt allerdings immer noch der genaue Zusammenhang (z. B. „...ein Zehner zu den Einern rübergegangen“). Ein Beispiel für eine vollständige Begründung (Code 4) ist folgende Beschreibung:

Zuerst habe ich 7-5 gerechnet, das sind 2. Dann war die Aufgabe 2-6, das geht aber nicht. Also muss ich einen von den Hundertern wegnehmen und daraus 10 Zehner machen. 12-6=6. Bei den Hundertern bleiben nur noch 6 übrig und 6-4=2.

Das Kind bezeichnet richtig die passenden Bündelungseinheiten „Hunderter“ und „Zehner“ und beschreibt außerdem den Zusammenhang zwischen den Bündelungseinheiten. Die Erklärung lässt sich auch schon als verallgemeinerbare Regelbeschreibung werten, wie sie bei der Bestimmung der Fähigkeit des Begründens betont wird (Neumann et al. 2009, Brunner 2014).

Diskussion

Zum Unterschied zwischen dem Erklären-WIE und dem Erklären-WARUM lässt sich festhalten, dass eine detaillierte inhaltliche Analyse nötig war, um Unterschiede zwischen den Kindern im Grad ihres gezeigten Verständnisses abbilden zu können.

Brunner (2014) fordert für Grundschul Kinder, dass „die Fähigkeit, schließen zu können, besonders fokussiert werden müsste“ (S. 84). Angesichts der Arten der in der vorliegenden Studie gelieferten Begründungen scheint der Bedarf aber auch zu sein, den Kindern die Art der in der Mathematik geforderten Begründungen aufzuzeigen und sie somit von einem Ende des Begründungsspektrums (Brunner 2014), dem alltagsbezogenen Argumentieren, in Richtung des anderen Endes, dem formal-deduktiven Beweis, zu bringen. Zu untersuchen ist, ob die Kinder durch veränderte Fragestellungen gezielter auf den gemeinten mathematischen Begründungskontext hingewiesen werden können.

Literatur

- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Jensen, S.; Gasteiger, H. (eingereicht). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. In: *Journal für Mathematikdidaktik*.
- Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In: Vogt, R. (Hrsg.). *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven*. Tübingen: Stauffenberg, S. 25–36.
- Neumann, A.; Beier, F. & Ruwisch, S. (2014). Schriftliches Begründen im Mathematikunterricht. In: *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 7(1), S. 113–125.