Rainer KAENDERS, Bonn & Ysette WEISS, Mainz

Serendipität und entdeckendes Lernen

Ein blindes Huhn findet auch ein Korn. Hat das Huhn Serendipität erfahren? Für kleine Kinder gibt es keine Serendipität. Zeigt man ihnen ein Kamel, beeindruckt sie das genauso, als wenn sie zum ersten Mal eine Kuh erblicken; mitunter freuen sie sich über eine schöne Muschel wie über ein Goldstück. Wer in einer Bibliothek ein Buch sucht, freut sich über weitere thematisch verwandte Bücher neben dem gesuchten. Menschen, die den Begriff *Eingebung* mit einem Suchfenster assoziieren, schlägt das allmächtige Programm scheinbar zufällig viele Suchergebnisse vor. Informatiker sprechen hier von Serendipität, wenn also in Zusammenhang mit *Information Retrievals* in Datenbeständen und Informationssystemen unbeabsichtigt nützliche Informationen entdeckt werden. Dabei hat der große Bruder Algorithmus mit seiner Schwester Datenbank die Vorschläge gemacht. Wollen wir den Begriff Serendipität für die Mathematikdidaktik nutzbar machen, müssen wir klären – am besten an einem Beispiel – was damit gemeint sein soll.

> „Defining the word is a task that I must leave to the authors, for the word's resistance to precise interpretation represents a crucial aspect of its tale. Serendipity can be about finding something of value while seeking something entirely different or it can be about finding a sought-after object in a place or a manner where it was not at all expected. The word is always about discovery and always about what Walpole called "happy accident," but the exact mixture of wisdom and luck – and the homiletic gloss on each tale of serendipitous discovery – varies as the word is employed in different contexts." (Merton & Barber, 2014, p. XIV)

1. Klärung des Begriffs Serendipität

Eine zufällige Entdeckung macht noch keine Serendipität. Es bedarf dafür eines neugierigen und für das Phänomen offenen Geistes, der sich im Modus der Kategorie bewegt, in der ihm die Entdeckung in den Schoß fällt. Ob es sich überhaupt um eine Entdeckung handelt, ist eine persönliche Sache, die von den Vorerfahrungen, Intentionen und Erwartungen der jeweiligen Person abhängt. Das Huhn muss also mindestens auf der Suche nach Futter sein und Kinder erleben erst dann Serendipität, wenn sie über Vorerfahrungen verfügen, durch die ihnen überhaupt etwas überraschend vorkommen kann. Serendipität hat zudem etwas tatsächlich Zufälliges; man braucht immer auch ein Quäntchen Glück dafür. Es ist nicht zu planen, wann und ob die unvorhergesehene Eingebung einen auf beglückende und ergreifende Weise ereilt. Die Versuchung solche Momente vorzutäuschen, indem man Vorgeschlagenes als zufällig darstellt oder indem man einfach Ostereier versteckt, ist groß und die Manipulationsmöglichkeiten sind vielfältig.

2. Serendipität für den Mathematikunterricht

Serendipität kann als große Kraft in der Entwicklung mathematischen Verstehens und auch der Mathematik selbst begriffen werden. Tut man das, ist das exemplarische Erleben von Serendipität unmissbar für einen Mathematikunterricht, der vom Fach ausgedacht wird. Es sollte daher genauso selbstverständlich erfahren werden, wie das Lösen (kniffliger) mathematischer Aufgaben, das Erlebnis selbst Mathematik treiben und Mathematik hervorbringen zu können, der Umgang mit Routineaufgaben und Routineverfahren, Einsichten in Begriffszusammenhänge und ein der jeweiligen Situation angepasstes (und nicht nur auf Logik begründetes) mathematisches Denken (angelehnt an die „*five intertwined strands of mathematical proficiency*“, vgl. Kilpatrick et al., 2001). Problemlösen und auch entdeckendes Lernen können auf ein Lernziel hin organisiert und realisiert werden. Serendipität entzieht sich dieser Machbarkeit und ist in Zeiten eines auf Output ausgerichteten Mathematikunterrichts zu einem scheuen Reh geworden. Durch Digitalisierung und Algorithmisierung des Mathematikunterrichts verbleibt – anders als in vielen geisteswissenschaftlichen Fächern – wenig Raum für eigene Sichtweisen, subjektiven Geschmack und Haltung.

Entdeckendes Lernen, auf der anderen Seite, hat eine Methodik und findet im Rahmen vorgegebener Denkkategorien statt. Induktives entdeckendes Lernen vollzieht sich meistens über exemplarische Gegenstände, deduktives wendet an anderer Stelle entwickelte Verfahren der Systematisierung auf neue Kontexte an Untersuchungsgegenstände an (vgl. Berendonk, 2015). Auch die Abduktion nach Peirce verlässt nicht die vorgegebene Kategorie des Denkens.

Serendipität entsteht im Wechselspiel zwischen unbedarften, gar naiven Lernenden auf der einen Seite und einer Lehrperson mit konzeptuellem mathematischem Verständnis und Erfahrung auf der anderen. Mehr oder weniger zufällig kommt – in der Regel durch eine Einlassung der Lernenden – eine aus der Sicht der Lehrperson unerwartete Sichtweise ins Spiel, von der keiner weiß, ob und wie sie hier passt, da sie keinen Beitrag zum Unterrichtsziel verspricht. Geht die Lehrperson darauf ein, kann sich für beide Parteien eine Überraschung ergeben: Schülerinnen und Schüler sind in der Lage originelle und abwegige eigene Ideen zu äußern, die von ihnen aber nicht als solche erkannt werden; Lehrer können altbekanntes auf neue Weise sehen – auf eine Weise, für die eine gewisse Naivität geradezu notwendig ist.

Im Mathematikunterricht verläuft die Begriffsentwicklung vielfach über *empirische Logik*, d.h. Verallgemeinern durch Klassenbildung von Objekten mit gleichen Merkmalen und Sprachentwicklung anhand dieser Merkmale (vgl. Dawydow, 1977, S. 112). Durch Sprache und Begrifflichkeiten ist geklärt, was naheliegt und was nicht. Eine überraschende und nicht vorhersehbare Einlassung eines Lernenden muss daher notwendigerweise nicht sogleich verständlich sein. Die anspruchsvolle Aufgabe der Lehrperson besteht darin, sie in das System einzupassen und für die Operationen, die in dem jeweiligen System zulässig oder üblich sind, in Sprache und in Handlungen fassbar zu machen.

Hat nun eine solche plötzliche Verschiebung des Standpunktes einmal stattgefunden, kann man, bevor man zum eigentlichen Anliegen des Unterrichts zurückkehrt, weiter entdeckend fortfahren, die Untersuchung beispielsweise über Pólyas (1954) plausibles Denken – d.h. Induktion, Verallgemeinerung und Analogie – weiterführen.

3. Ein Beispiel für Serendipität im Unterricht

Im Praxissemester berichtete eine Studentin von folgender Situation zur Berechnung der Fläche unter einem Funktionsgraphen. Auf die Frage danach, wie eine solcher Flächeninhalt bestimmbar sein könne, schlugen die Schülerinnen und Schüler zunächst vor: mit Dreiecken oder mit Kreisen. Als die Studentin davon berichtete, bemerkte sie, dass das ja nicht so gehe. Das mache man ja mit Rechtecken. Es sei wohl doch nicht so geschickt gewesen, die Frage so offen im Unterricht zu stellen, fuhr sie mit ihrem Bericht fort. In der Diskussion wurde langsam deutlich, dass hier eine mathematikdidaktisch wertvolle Gelegenheit verpasst worden war.

Die beiden Vorschläge stehen allerdings für zwei unterschiedliche verpasste Gelegenheiten. Der Vorschlag, die Flächen mit Dreiecken zu messen, ist bei der Bestimmung von Flächeninhalten naheliegend, wenn man etwa daran denkt, warum der Flächeninhalt eines Parallelogramms zerlegungsgleich zu dem eines Rechtecks ist. Archimedes hat so die Parabel quadriert und Leibniz hat zum Beispiel die Flächen unter Graphen mit Dreiecken ausgeschöpft und damit die Transmutationsformel entdeckt (vgl. Robson & Stedall, 2009, S. 714). Sicher sollte man also diese Idee im Unterricht nicht verwerfen, gerade weil sie innerhalb der Kategorie von Flächenberechnungen vielfältig vorkommt und schließlich zu einer Lösung des Problems führen kann – ein Beispiel für entdeckendes Lernen.

Aber was ist mit den Kreisen? Das scheint doch eher nicht zu gehen und wenn, dann ist es technisch vergleichsweise schwierig. Diese Idee ist nicht naheliegend und zur Lösung des Problems vielleicht sogar ungeeignet. Mit Kreisen kann man ja nicht die Fläche ausfüllen. Was geschieht, wenn man die Kreise immer kleiner macht? Und da ist er dann: der Moment der Serendipität.

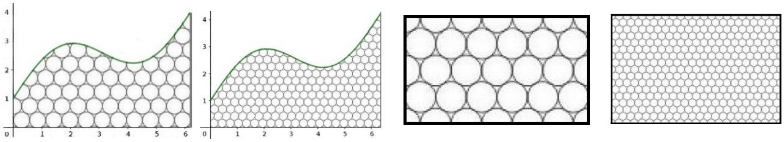

Abb. 1: Ein Schülervorschlag führt nicht immer zum Ziel aber ermöglicht Serendipität.

Schauen wir grob auf die Fläche unter dem Graphen können wir ahnen, dass das Verhältnis von Kreisen und Zwischenräumen gleich bleibt. Beispielsweise bei geeignet ausgeschnittenen Rechtecken, gleichseitigen Dreiecken, Sechsecken werden genau der $\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ te Teil, d.h. etwa 90%, von Kreisen bedeckt. Ein weiterer neuer Begriff bietet sich an: Die Kreispackung hat eine *Dichte* und die ist unabhängig vom Radius der Kreise.

Ein Tor zur Kristallographie und zu neuen Entdeckungen ist aufgestoßen. Doch hilft es bei unserem Problem zur exakten Flächenbestimmung nicht direkt weiter. Aber näherungsweise könnte man die Fläche durch Abzählen der Kreise bestimmen: Die Fläche unter dem Graphen kann mit n hexagonal angeordneten Kreisen ausgeschöpft werden, die etwa eine Fläche des Inhalts $n\, \pi r^2/\rho$ abdecken.

Jetzt sind wir wieder beim entdeckenden Lernen. Hätten wir nicht einfach ein Gitter in die Ebene legen und dann die Gitterpunkte unter dem Graphen zählen können, um sie dann mit einer Referenzfläche, wo wir die Gitterpunkte kennen, zu vergleichen? Müssen die Gitterpunkte regelmäßig angeordnet sein oder könnte man sie auch zufällig – wie in Monte Carlo – verteilen? Aber wir wollten ja die Fläche unter dem Graphen berechnen. Vielleicht geht das doch besser mit Rechtecken…

Literatur

Berendonk, S. (2015). *Wider den mathematikdidaktischen Induktivismus.* Der Mathematikunterricht, Jahrgang 61, Heft 6.

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Logisch-psychologische Probleme des Aufbaus von Unterrichtsfächern.* Beiträge zur Pädagogik, 8, Verlag Volk und Wissen, Berlin.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy of Sciences – National Research Council. Retrieved from http://www.nap.edu/catalog/9822.html.

Merton R. K. & Barber E. (2004). *The Travels and Adventures of Serendipity: A Study in Sociological Semantics and the Sociology of Science.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, Volume I: Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press.

Robson, E., & Stedall, J. (Eds.). (2009). The Oxford handbook of the history of mathematics. Oxford University Press on Demand.