Leander KEMPEN, Paderborn

Beweiskonstruktionen zu verschiedenen Beweisformen vergleichend bewerten? Das geht!

In diesem Beitrag wird die Genese eines Kategoriensystems dargestellt, mit dem es möglich wird, verschiedene Beweiskonstruktionen vergleichend zu bewerten. Das Kategoriensystem wurde verwendet, um die Beweis- und Begründungskompetenzen von Lehramtsstudierenden im Rahmen einer universitären Lehrveranstaltung zu beforschen (s. Kempen, 2019).

Der Kontext der Beweisbewertungen

An der Universität Paderborn wird seit dem Wintersemester 2011/12 die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ für Erstsemesterstudierende des Lehramts (Haupt-, Real- und Gesamtschule) angeboten. Im Kontext dieser Lehrveranstaltung sollen die Studierenden verschiedene Beweis- und Begründungsformen erlernen, die sie bei ihrer späteren Lehrtätigkeit an der Schule verwenden können. Ein Schwerpunkt liegt dementsprechend, neben der Konstruktion „formaler Beweise“, auf der Verwendung sogenannter „generischer Beweise“. Dies sind beispielgebundene Beweise, in denen im Kontext konkreter Beispiele ein allgemeines, beispielübergreifendes (generisches) Argument ausgemacht werden kann, mit dessen Hilfe die gegebene Behauptung allgemeingültig verifiziert werden kann (s. Kempen, 2019). Für die Konstruktion eines vollständigen generischen Beweises wird im Kontext der Lehrveranstaltung von den Studierenden verlangt, dass sie das beispielübergreifende Argument und dessen Allgemeingültigkeit explizieren. Ein vollständiger generischer Beweis zu der Behauptung, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summe $n + n^2$ eine gerade Zahl ist, wäre etwa wie folgt (Kempen, 2019, S. 36):

„$4 + 4^2 = 4 \cdot (1 + 4) = 4 \cdot 5, \quad 7 + 7^2 = 7 \cdot (1 + 7) = 7 \cdot 8$ […]

Wie in den Beispielen deutlich wird, lässt sich die Summe aus einer natürlichen Zahl und ihrem Quadrat immer schreiben als Produkt der natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger. Bei zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer genau eine Zahl gerade, somit werden immer eine gerade und eine ungerade Zahl miteinander multipliziert. Da das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl immer gerade ist, muss das Ergebnis immer gerade sein.“

Um die Lehramtsstudierenden auch im Umgang mit inhaltlich-anschaulichen Darstellungsformen zu schulen, wurden generische Beweise auch mithilfe von Punktmusterdarstellungen konstruiert. Durch die Einbindung „geometrischer Variablen“ (ebd., S. 202; s. Abb. 1) wurde es schließlich möglich, auch im Kontext der Punktmuster Beweise zu konstruieren, die ohne die Betrachtung konkreter Beispiele auskommen.

Abb. 1: Eine geometrische Variable zur Repräsentation einer beliebigen Anzahl von Punkten

Insgesamt können somit vier verschiedene Beweisformen im Kontext der Lehrveranstaltung ausgemacht werden (s. Abb. 2).

	Arithmetik/Algebra	**Punktmuster**
Generischer Beweis	*Generischer Beweis mit Zahlen*	*Generischer Beweis mit Punktmustern*
Beweis mit Variablen	*„Formaler Beweis“ (mit Buchstabenvariablen)*	*Beweis mit geometr. Variablen*

Abb. 2: Die vier Beweisformen der Lehrveranstaltung

Die Beforschung und Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung nach dem Forschungsparadigma des Design-Based Research war das Hauptanliegen der Dissertation des Autors. Um die Passung der Lehrveranstaltung und ihre Auswirkungen erfassen und beschreiben zu können, wurden die Durchführungen der Lehrveranstaltung im Wintersemester 2013/14 und 2014/15 von einem Eingangstest, einem Ausgangstest und einer Modulabschlussprüfung gerahmt. Die bei diesen Messzeitpunkten gesammelten Begründungs- und Beweiskonstruktionen der Studierenden mussten zu Forschungszwecken vergleichend bewertet bzw. kodiert werden. Hierzu wurde ein Kategorienschema erarbeitet, mit dem es möglich war, jegliche vorkommenden Begründungs- und Beweiskonstruktionen der Studierenden zu erfassen.

Die betrachteten Begründungs- und Beweisaufgaben

Im Kontext der Beforschung der Lehrveranstaltung sollten die Studierenden u.a. die folgenden beiden Aufgaben bearbeiten:

Aufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen“ (gestellt in der Eingangsbefragung zur Lehrveranstaltung und in der Modulabschlussklausur; Aufgabenstellung als Zitat kursiv):

Die Summe 11+17 ist eine gerade Zahl. Gilt dies für jede Summe von zwei beliebigen ungeraden Zahlen? – Begründen Sie überzeugend!

Aufgabe „Summe sechs aufeinanderfolgender Zahlen“ (gestellt in der Modulabschlussklausur; Aufgabenstellung als Zitat kursiv):

Wir betrachten die folgende Behauptung: „Die Summe von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer ungerade.“ Beweisen Sie die Behauptung mit: (a) einem generischen Beweis mit Zahlen, (b) einem formalen

Beweis mit Mitteln der Algebra, (c) einem generischen Punktmusterbeweis und (d) einem Punktmusterbeweis mit geometrischen Variablen.

Die Entwicklung des Kategoriensystems

Die Erarbeitung des Kategoriensystems zur Erfassung einer „Qualität der Begründung" erfolgte im Rahmen einer deduktiv-induktiven Kategorienbildung i. S. der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2012).

Ausgangspunkt der Kategorienbildung bildete eine Kombination der Kategoriensysteme von Bell (1976) und Recio und Godino (2001). Diese Ausgangskategorien wurden Anhand von Studierendenbearbeitungen zu der Aufgabe „Summe zweier ungerader Zahlen" (s.o.) induktiv modifiziert und erweitert. Auf diese Weise wurde ein differenziertes Kategoriensystem entwickelt, das im Rahmen einer Pilotierung für die Beschreibung der Begründungskompetenzen von Erstsemesterstudierenden genutzt werden konnte. Im weiteren Verlauf der Forschung sollte das Kategoriensystem allerding auch dazu verwendet werden, die Beweiskonstruktionen der Studierenden bzgl. der vier Beweisformen der Lehrveranstaltung zu untersuchen. Es war hierbei der Einbezug der generischen Beweise, auch unter Verwendung von Punktmusterdarstellungen, der zu einer Modifikation des Kategoriensystems führte. In der folgenden Tabelle wird das so entstandene Kategoriensystem für die Bewertung der studentischen Beweiskonstruktionen dargestellt (vgl. Kempen, 2019, S. 269).

Kategorienbeschreibung	**Spezifizierung für Punktmuster**
K0: Keine Begründung	*- keine Ergänzung -*
K1: „Empirisch" Beispiele werden – ohne weitere (deduktive) Begründung – als Beleg für die allgemeine Gültigkeit der Behauptung angeführt.	*- keine Ergänzung -*
K2: „Pseudo" Die genannten Begründungen bestehen aus Zirkelschlüssen, sind redundant, unpassend oder sachlich falsch.	*Hierzu gehören alle Bearbeitungen, in denen die Punktmuster so dargestellt werden, dass <u>keine nutzbare geometrische Struktur erkennbar</u> ist.*
K3: „fragmentarisch" Es werden relevante Aspekte genannt, die für eine Begründung genutzt	*Hierzu gehören alle Bearbeitungen, in denen die Punktmuster <u>willkürlich</u> so zusammengestellt*

werden könnten, ohne dabei eine Argumentationskette aufzubauen.	*werden, dass eine sinnvolle und nutzbare Anordnung entsteht.*
K4: „Argumentation mit Lücke“ Es wird eine korrekte mathematische Argumentation gegeben, welche allerdings eine Lücke enthält, so dass die Ausgangsbehauptung nicht allgemeingültig verifiziert wird.	*Hierzu gehören alle Bearbeitungen, in denen die Punktmuster nachvollziehbar zusammengefügt werden, sodass eine sinnvolle und nutzbare Anordnung entsteht.*
K5: „Vollst. Argumentation“ Die Gültigkeit der Behauptung wird deduktiv mithilfe valider mathematischer Argumente hergeleitet.	*- keine Ergänzung -*

Tab. 1: Das Kategoriensystem zur vergleichenden Bewertung studentischer Beweiskonstruktionen zu verschiedenen Beweisformen entnommen aus Kempen (2019, S. 269)

Für die Überprüfung der Anwendbarkeit des Kategoriensystems wurden im Wintersemester 2013/14 alle Beweisbearbeitungen der Studierenden zu der Aufgabe „Summe sechs aufeinanderfolgender Zahlen“ doppelt kodiert. Die entsprechenden Interrater-Reliabilitäten (Cohens Kappa) erwiesen sich als gut (generische Beweis mit Zahlen: 0,804; formale Beweis: 0,823; generische Beweis mit Punktmustern: 0,783; Beweis mit geometrischen Variablen 0,756).

Das Kategoriensystem lässt eine normative Sicht auf die Beweiskonstruktionen der Studierenden deutlich werden. Bewertungsgenstände sind hierbei das Vorhandensein von verwendbaren und sachlich korrekten Argumenten und deren Aneinanderfügen zu einer geschlossenen Argumentationskette, die von der ‚Ausgangssituation‘ zu der geforderten Konklusion führt.

Literatur

Bell, A. W. (1976). A study of pupils’ proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim/Basel: Beltz Juventa.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99.