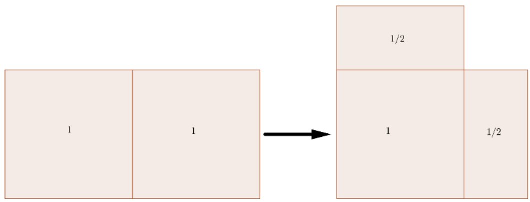
Christoph KIRFEL, Bergen (Norwegen)

Indische Wurzeln – Wurzelziehen mit der Sulbasutra

Die Veden sind uralte indische Sanskrittexte (2000 bis 600 v. Chr.), die religiöse Rituale, Gebete und Gesänge enthalten, die in der vedischen Religion benutzt wurden. Sulbasutra ist ein Teil dieser Veden, wo die Konstruktion von religiösen Altären beschrieben wird. Diese mussten nach mathematischen Regeln gebaut werden. Deshalb enthält die Sulbasutra eine Menge Mathematik. In der Sulbasutra finden wir eine aufsehenerweckende numerische Annäherung an $\sqrt{2}$:

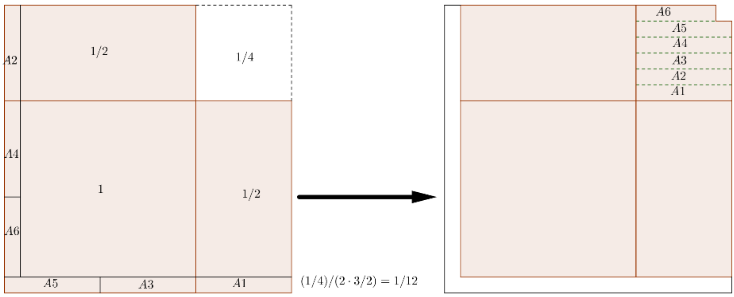
$$\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \cdot 3} - \frac{1}{34 \cdot 4 \cdot 3},$$

was eine imponierend genaue Approximation ist. Die Technik, die hinter diesem Resultat liegt, ist einfach und kann leicht weiterentwickelt werden. Datte B. (1932) und Henderson D. W. (2000) mutmaßen, dass das Rezept folgendermaßen ausgesehen haben kann. Wir starten mit einem Rechteck, das aus zwei Einheitsquadraten besteht. Das eine der beiden teilen wir in zwei Hälften und kleben diese außen an das erste Quadrat. Wir erhalten eine L-förmige Figur mit Flächeninhalt 2.



Sie ähnelt bereits ein wenig einem Quadrat. Wäre es ein perfektes Quadrat, so wäre die Seitenlänge exakt $\sqrt{2}$. Damit ist die Seitenlänge, 3/2, der L-Figur bereits eine erste Näherung an $\sqrt{2}$. Die Idee ist nun, das kleine «fehlende» Quadrat mit *Flächenmaterial* vom Rand der Figur anzufüllen und dabei eine neue L-förmige Figur zu konstruieren, die noch mehr einem Quadrat ähnelt. Die Seite der neuen Figur ist dann eine bessere Approximation an $\sqrt{2}$ als 3/2 . Das kleine weiße Quadrat hat Seitenlänge ½. Der Flächeninnhalt ist also ¼. Schneiden wir nun einen Streifen vom linken und unteren Rand der L-Figur (Länge $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$), so muss der Streifen eine Breite von $\frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$ bekommen, wenn er den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat enthalten soll. Wegen der Überlappung der Streifenteile, ist der Streifen etwas zu kurz, um das gesamte weiße Quadrat auszufüllen und wir bekommen wieder eine L-förmige Figur. Die Überlappung ist wieder ein Quadrat, diesmal mit Seiten- länge 1/12. Dabei ähnelt die neue L-Figur aber schon viel mehr einem

Quadrat als die alte. Die neue Seitenlänge der L-Figur 3/2-1/12 ist deshalb eine wesentlich bessere Approximation an $\sqrt{2}$ als die vorige. Wir hoffen nun diesen Prozess wiederholen zu können und immer neue L-Figuren produzieren zu können, die dann immer mehr einem Quadrat ähneln, so dass deren Seitenlängen immer bessere Annäherungen an $\sqrt{2}$ ergeben. Hier erhalten wir



$\frac{3}{2}-\frac{1}{4\cdot 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$ als Approximation für $\sqrt{2}$. Im nächsten Schritt müssen wir einen Streifen entfernen, der die Breite $\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2}{\left(2\cdot\frac{17}{12}\right)}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 17}$ hat und diesen Flächeninhalt müssen wir dann über das kleine Quadrat verteilen. So erhalten wir dann die Näherung aus der Sulbasutra.

Wie können wir den Prozess mit Formeln beschreiben?

Um $\sqrt{N}$ für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ zu berechnen, wählen wir eine Quadratzahl n^2 ($n \in \mathbb{N}$) unter N, so dass $N = n^2 + R$ mit positivem Rest R ist. Jetzt bauen wir uns wie oben eine L-Figur, die aus einem Quadrat mit zwei angeklebten Rechtecken besteht. Jedes Rechteck repräsentiert die halbe Restfläche R/2. Dann gilt $N = a^2 - b^2$ mit $a = n + R/(2n)$ und $b = R/(2n)$ und wir haben eine L-förmige Startfigur gefunden. Der Flächeninhalt b^2 des fehlenden Quadrates soll nun mit „Material", das wir entlang des unteren und linken Randes (Länge $2 \cdot a$) der L-Figur finden, ausgefüllt werden. Ein Streifen, dieser Länge muss deshalb die Breite $b' = \frac{b^2}{2\cdot a}$ haben, wenn er den Flächeninhalt des kleinen Quadrates b^2 «matchen» soll. Wegen der Überschneidung des horizontalen mit dem vertikalen Streifen können wir zwar nicht den gesamten Leerraum des kleinen Quadrates b^2 ausfüllen, aber immerhin einen Großteil. Der jetzt noch offenstehende Teil ist ein neues „Miniquadrat", wo die Seitenlänge gleich der Streifenbreite $b' = b^2/(2a)$ ist. Die neue Figur hat also wieder L-Form und die Dimensionen der neuen Quadrate sind

$a' = a - b' = a - \frac{b^2}{2 \cdot a}$ und $b' = \frac{b^2}{2 \cdot a}$. Damit haben wir den Übergang algebraisch beschrieben und können nun diese Formeln wieder und wieder benutzen.

Wie schnell konvergiert der Prozess?

Hier möchten wir die Qualität des Algorithmus untersuchen. D. h. wir möchten einen Zusammenhang zwischen $a - \sqrt{N}$ und $a' - \sqrt{N}$ finden. Dieser Zusammenhang beschreibt, wieviel besser die neue Approximation im Vergleich zu der alten ist.

Wir haben $N = a^2 - b^2$ aber auch $N = a'^2 - b'^2$, weil die beiden L-förmigen Figuren denselben Flächeninhalt haben. Damit gilt

$$a'^2 - N = b'^2 \quad bzw. \ (a' - \sqrt{N})(a' + \sqrt{N}) = b'^2$$

$$\begin{aligned} a' - \sqrt{N} &= \frac{b'^2}{a' + \sqrt{N}} = \frac{\left(\frac{b^2}{2a}\right)^2}{a' + \sqrt{N}} = \frac{b^4}{(2a)^2(a' + \sqrt{N})} \\ &= \frac{\left(a - \sqrt{N}\right)^2}{a' + \sqrt{N}} \cdot \left(\frac{a + \sqrt{N}}{2a}\right)^2 < \frac{\left(a - \sqrt{N}\right)^2}{2\sqrt{N}} < \frac{\left(a - \sqrt{N}\right)^2}{2}. \end{aligned}$$

Der letzte Bruch vor dem ersten Ungleichheitszeichen ist nämlich < 1, weil $\sqrt{N} < a$. Das Hauptresultat ist damit $a' - \sqrt{N} < \frac{(a - \sqrt{N})^2}{2}$. Dies nennt man quadratische Konvergenz und ist ein sehr gutes Resultat. Ist die ursprüngliche Annäherung unter 1/1000 so ist die darauffolgende Annäherung bereits unter 1/1000000. Bei jedem Schritt wird sich die Anzahl der korrekten Nachkommastellen mindestens verdoppeln.

Vergleich mit bekannten Algorithmen

Ein gängiger Algorithmus zur Berechnung von Quadratwurzeln ist die sogenannte Heron-Methode. Um $\sqrt{N}$ zu berechnen fängt man mit einem Startwert z.B. $s = 1$ an und berechnet nun lauter neue Annäherungen an $\sqrt{N}$, in dem man folgende «divide and average»-Formel $s' = \frac{\frac{N}{s} + s}{2}$ benutzt. Der neue Wert s' wird dann als Ausgangswert in derselben Formel wiederverwendet. So produziert man ständig bessere Approximationen an $\sqrt{N}$. Starten wir z.B. mit $s = \frac{3}{2}$ als Annäherung an $\sqrt{2}$ so ist $s' = \frac{\frac{2}{3/2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{17}{12}$ eine bessere Annäherung an $\sqrt{2}$. Die Zahlenwerte $s = \frac{3}{2}$ und $s' = \frac{17}{12}$ kommen uns bekannt vor. Sie tauchten bereits bei dem indischen Algorithmus auf und es erhebt sich der

Verdacht, dass die beiden Algorithmen miteinander verwandt sind. Dies ist tatsächlich der Fall.

Wir stellen uns vor, der indische Algorithmus sei bereits bei einer Approximation a bei der Berechnung von $\sqrt{N}$ angekommen, wobei $N = a^2 - b^2$. Wir benutzen nun die Heronsche Formel für diesen Approximationswert a und erhalten

$$a^* = \frac{\frac{N}{a} + a}{2} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a} + a}{2} = \frac{a - \frac{b^2}{a} + a}{2} = a - \frac{b^2}{2a},$$

was ja die Formel aus dem indischen Algorithmus ist. D.h. Herons Formel und der indische Algorithmus produzieren dieselben Zahlenfolgen. Sie sind also äquivalent.

Resümee

In diesem Artikel haben wir gesehen, dass Dattes und Hendersons Deutung eines alten indischen Algorithmus zum Wurzelziehen für beliebige ganze Zahlen generalisiert werden kann. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist quadratisch, was ein erstaunliches Resultat bei einem so alten Algorithmus ist. Es zeigt sich auch, dass die Methode äquivalent zur klassischen Heron-Methode ist. Sie gibt uns damit eine geometrische Deutung der Heronschen Methode, die ja zunächst einmal eine arithmetische Rechenvorschrift ist. Damit können wir geometrische Intuition an die Heronsche Methode knüpfen und erhalten somit einen neuen Zugang zu dieser.

Literatur

Datte, B. (1923). *The Science oft the Sulbas; A Study in Early Hindu Geometry.* Calcutta University Press.

Henderson, D. W. (2000). Square roots in the Sulba Sutra. In C. A. Gorini (red): *Geometry at Work: Papers in Applied Geometry,* MAA Notes Number 53, S. 39-45.