

Aufbau einer Problemrepräsentation im Beweisprozess – Eine Analyse der Aktivitäten in der Verstehensphase

Für eine erfolgreiche Beweiskonstruktion gilt eine systematische und umfassende Analyse der zu beweisenden Aussage als bedeutend (Selden, 2012). Insbesondere Studienanfänger*innen messen diesem ersten Bearbeitungsschritt jedoch häufig einen geringen Wert bei und verwenden entsprechend nur wenig Zeit und Systematik auf das Verstehen der Aussage (Schoenfeld, 1992). Erste Untersuchungen studentischer Beweisprozesse zeigen jedoch auch, dass die Dauer der Verstehens- und Explorationsphase allein nicht entscheidend für eine erfolgreiche Beweiskonstruktion ist (Kirsten, 2018). In dieser Studie sollen daher die einzelnen Aktivitäten eingehender untersucht werden, welche Studierende in der Verstehensphase nutzen.

Theoretischer Hintergrund

Mathematische Problemstellungen werden gemeinhin über Aufgabentexte vermittelt. Ein erfolgreiches Lösen der Aufgabe setzt dabei voraus, dass der Aufgabentext in eine Problemrepräsentation übersetzt wird, die einen kreativen und flexiblen Umgang mit den gegebenen Informationen erlaubt (Reusser, 1997). Kintsch und Greeno (1985) beschreiben eine adäquate Problemrepräsentation als ein zweidimensionales Konstrukt, das zwischen einer propositionalen Textbasis und einem Situationsmodell unterscheidet. Während beim Aufbau der propositionalen Textbasis das textgebundene Verständnis der Aufgabenstellung im Vordergrund steht, beschreibt das Situationsmodell eine vom konkreten Kontext losgelöste Problemrepräsentation. Über das Assoziieren und Folgern weiterer Informationen wird die Aufgabenstellung angereichert und so umstrukturiert, dass relevante Zusammenhänge hervorgehoben werden (ebd.). Eine Repräsentation im Sinne des Situationsmodells erleichtert es, nützliche Strategien zur Problemlösung gezielt auszuwählen und Lösungsschritte zu antizipieren.

Auf welche Weise eine geeignete Problemrepräsentation aufgebaut werden kann, beschreibt u.a. Pólya (1945) in seinen Ausführungen zur Phase *Aufgabe verstehen*. Strategien wie die *Wiedergabe der Aufgabenstellung in eigenen Worten*, die *Wiederholung zentraler Begriffe* oder das *Erstellen einer Zeichnung* sollen dazu beitragen, die Aufgabenstellung mit Bedeutung zu füllen. Neben einer inhaltlichen Aufarbeitung betont Selden (2012) die Notwendigkeit, auch die logische Struktur der Aussage zu untersuchen. Insbesondere bei informal formulierten Aussagen ist die Voraussetzung von der Behauptung zu trennen und die Richtung der Implikation zu bestimmen. Wenngleich die genannten Vorgehensweisen vielfach empfohlen werden,

bleibt zunächst offen, inwiefern sie bereits in studentischen Beweiskonstruktionen Anwendung finden und dazu beitragen, eine geeignete Problemrepräsentation aufzubauen.

Ziele und Methodik

Die Studie ist Teil des Projekts *Apropos*, im Rahmen dessen 21 kooperative Beweisprozesse von Erstsemester-Studierenden auf der Grundlage eines Phasenmodells analysiert wurden (Kirsten, 2018). In der vorgestellten Studie soll nun die erste Phase des Modells *Verstehen der Aussage* fokussiert und durch eine induktive Tiefenanalyse näher untersucht werden. Ziel der Studie ist es, verschiedene Aktivitäten zu identifizieren, die in der Verstehens- und Explorationsphase von studentischen Beweiskonstruktionen auftreten. Über einen Vergleich von erfolgreichen und weniger erfolgreichen Beweisprozessen sollen sodann erste Rückschlüsse darauf gezogen werden, welche dieser Aktivitäten ein Textverständnis im Sinne einer propositionalen Textbasis unterstützen und welche den Aufbau eines geeigneten Situationsmodells fördern. Um erfolgreiche von weniger erfolgreichen Beweisprozessen unterscheiden zu können, wurde die Qualität der entstandenen Beweise nach einer fünfstufigen Skala (*kein Ansatz bis vollständig korrekter Beweis*) bewertet. Die Stichprobenauswahl für die vorliegende Studie erfolgte entsprechend der Auswahlstrategien der Homogenität und der maximalen strukturellen Variation. Es wurden neun Beweisprozesse ausgewählt, die einen ähnlich hohen Anteil an Verstehensaktivitäten (ca. 20% des Beweisprozesses) aufweisen, jedoch unterschiedlich qualitative Beweisprodukte hervorbrachten (0-1P vs. 3-4P.). Von diesen Beweisprozessen werden die dem Verstehen zugeordneten Abschnitte extrahiert und entsprechend der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) charakteristische Aktivitäten innerhalb dieser Phase herausgearbeitet.

Ergebnisse

Insgesamt konnten 12 verschiedene Aktivitäten identifiziert werden, die Studienanfänger*innen in der Verstehensphase der Beweiskonstruktion anwenden (siehe Tab. 1). Im Vergleich der erfolgreichen und weniger erfolgreichen Beweisprozesse zeigen sich Unterschiede insbesondere hinsichtlich der Aktivitäten *Folgern*, *Paraphrasieren*, *Beispielbetrachtung* und *Spezialfallbetrachtung*. Während in erfolgreichen Beweisprozessen bereits Folgerungen aus den Voraussetzungen oder der Behauptung auf inhaltlich-anschaulicher Ebene diskutiert werden, sind in weniger erfolgreichen Beweisprozessen vermehrt das Wiedergeben der Aufgabenstellung sowie die Betrachtung konkreter Beispielfunktionen zu beobachten. Eine Spezialfallbetrachtung tritt ausschließlich bei Studierenden mit hoch bewerteten Beweisen auf.

Tab 1: Übersicht über die identifizierten Aktivitäten in der Verstehensphase

Aktivität	Beschreibung
<i>Extrahieren relevanter Informationen</i>	Hervorheben oder Herausschreiben lösungsrelevanter Angaben
<i>Folgern</i>	Ableiten von impliziten Voraussetzungen und Antizipieren von Beweisschritten
<i>Visualisieren</i>	Erstellen von Skizzen oder Veranschaulichung von Sachverhalten mithilfe von Gesten
<i>Ergänzen von Informationen</i>	Aktivieren von Vorwissen, Nachschlagen von Definitionen, Erinnern ähnlicher Aufgaben
<i>Kritisches Hinterfragen</i>	Überprüfen des Gesagten, Hinterfragen der konkreten Aussagenformulierung, Plausibilitätsprüfungen
<i>Wiederholen</i>	Erneutes Vorlesen der Aufgabenstellung
<i>Paraphrasieren</i>	Wiedergabe der Aussage in eigenen Worten
<i>Transformieren</i>	Übersetzen der Aussage in die Formelsprache
<i>Fokussieren</i>	Einschränkung der Betrachtungen auf einen bestimmten Bereich oder Aspekt
<i>Beispielbetrachtung</i>	Generieren von konkreten Beispielen
<i>Spezialfallbetrachtung</i>	Diskussion von Extrem- oder Spezialfällen
<i>Klassifikation</i>	Beschreibung der Aussage als All- oder Existenzaussage

Die Aktivitäten *Ergänzen von Informationen* und *Kritisches Hinterfragen* finden unabhängig von der Qualität des Beweisprodukts in verschiedenen Beweisprozessen Anwendung. Hier deuten sich jedoch Unterschiede hinsichtlich der konkreten Ausführung an: Während Studierende mit niedrig bewerteten Beweisen in erster Linie Definitionen wiederholen und mit der Aussage assoziiertes Vorwissen benennen, lassen Studierenden mit höher bewerteten Beweisen zudem auch strategisches Wissen aus früheren Aufgabenbearbeitungen mit in ihre Aufgabenanalyse einfließen. Im Bereich des *Kritischen Hinterfragens* unterziehen fast alle Studierende die zu zeigende Aussage einer Plausibilitätsprüfung. In erfolgreichen Beweisprozessen kann darüber hinaus häufig auch eine eingehende Beschäftigung mit der genauen Formulierung von Voraussetzung und Behauptung beobachtet werden.

Diskussion

Die durchgeführte Studie repliziert insofern die Ergebnisse von Schoenfeld (1992), als die von Studierenden mit höher bewerteten Beweisprodukten gewählten Aktivitäten in vielen Fällen ein systematischeres Vorgehen vermuten lassen. So suchen sie gezielt nach strategischem Wissen aus anderen Aufgabenbearbeitungen, hinterfragen die genaue Formulierungen der gegebenen

Aussage und folgern hieraus weitere Informationen. Auf diese Weise kann eine Problemrepräsentation im Sinne des Situationsmodells aufgebaut werden, welche die Wahl geeigneter Lösungsansätze unterstützt. Andere Aktivitäten wie das *Paraphrasieren* oder das *Visualisieren* des gegebenen Sachverhalts, die auch von Pólya (1945) genannt werden, können Studierende darin unterstützen, die Aufgabenstellung mit Bedeutung zu füllen. Sie verbleiben jedoch meist im Kontext der Aufgabenstellung und orientieren sich an deren Struktur. Eine Fokussierung auf derartige Aktivitäten kann die Beweiskonstruktion dadurch erschweren, dass über die propositionale Textbasis hinaus keine geeignete Basis für die Suche nach Lösungsstrategien geschaffen wird. Unterstützungsmaßnahmen zu Studienbeginn können den Aufbau einer geeigneten Problemrepräsentation dadurch unterstützen, dass strategische Hilfestellungen in Tutorien oder Lernzentren nicht auf der Ebene der Aufgabenstellung verbleiben. Vielmehr sollte auch die Bedeutung des strategischen Wissens und das kritische Hinterfragen einzelner Bestandteile der zu zeigenden Aussage hervorgehoben und so der Aufbau eines Situationsmodells gefördert werden.

Literatur

- Kirsten, K. (2018). Theoretical and empirical description of phases in the proving process of undergraduates. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. Hogstad (Hg.), *Proceedings of the second Conference of INDRUM* (S. 326-335). Kristiansand, Norway: INDRUM.
- Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Mayring, P. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press.
- Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen. In F. Winter & A. Helmke (Hg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 141-155). Weinheim: Beltz.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Hg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334-369). New York: Macmillan.
- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna & M. de Villiers (Hg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI-Study* (S. 391-420). Dordrecht: Springer Netherlands.