Christine KNIPPING, Bremen

Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht – diskursive und epistemologische Herausforderungen

Argumentieren und Beweisen sind mathematische Tätigkeiten, bei denen die Diskrepanz zwischen Bildungsanspruch und unterrichtlicher Realität in der Schule besonders groß ist. Dies ist in der deutschsprachigen und internationalen mathematikdidaktischen Forschung ein Konsens (Brunner 2014, Stylianides, Stylianides & Weber 2017). Welche Gründe dabei ausschlaggebend sind, ist trotz des mittlerweile umfangreichen Forschungsstandes noch nicht abschließend geklärt. In diesem Beitrag werden historische und aktuelle mathematikdidaktische Konzepte zur Realisierung von Argumentations- und Beweistätigkeiten in schulischem Unterricht mit Blick auf diese Diskrepanz hin betrachtet. Dabei wird deutlich, dass die Formate, die unterrichtlich emergieren, auch durch diskursive und epistemologische Herausforderungen bedingt sind. Diese Herausforderungen näher zu fokussieren und vor dem Hintergrund unterrichtlicher Interaktionen neu zu interpretieren, verspricht eine Aussicht auf ein besseres Verstehen der Diskrepanz zwischen Bildungsanspruch und unterrichtlicher Realität

1. Historischer Exkurs

Mathematik ist eine beweisende Disziplin. Durch deduktive Herleitungen lassen sich nach spezifizierten Schlussregeln aus Axiomen und zuvor bewiesenen Sätzen neue mathematische Aussagen deduzieren. Vorbild eines solchen axiomatisch-deduktiven Aufbaus einer mathematischen Theorie war für lange Zeit das Buch „Elemente" von Euklid (Jahnke & Ufer 2015, S. 335). Mitte des 19. Jahrhunderts machten amerikanische Universitäten schulischen Geometrieunterricht zur Zulassungsvoraussetzung, der sich an Euklids Elementen orientierte. Faktisch resultierte dies im Auswendiglernen der Euklidischen Beweise, was nicht der eigentlichen universitären Intention entsprach (Herbst 2002b). Absicht war vielmehr eine gedankliche Schulung gewesen, welche Schülerinnen und Schüler bereits auf der High School auf das mathematische Beweisen an der Universität vorbereiten sollte.

In diesem historischen Kontext entstand das Format des sogenannten „two column proof" (siehe Herbst, 2002b, S. 307). Dies sollte Schülerinnen und Schüler darin unterstützen, die in den Beweisen enthaltenen geometrischen Aussagen und daraus resultierenden deduktiven Schlüsse eigenständig zu formulieren. Bis heute findet dieses Format in US-amerikanischen Schulen eine weite Verbreitung, allerdings meist nicht mit dem damit beabsichtigten Erfolg. Wie Herbst (2002a) in empirischen Studien zeigen konnte, resultiert dieses Format häufig in einer unterrichtlichen Arbeitsteilung, in der Lernende eher Lücken füllen und gerade nicht die Verantwortung für die geometrischen Schlüsse übernehmen. So erwerben sie weder ein Verständnis für die fachlichen Inhalte noch für Beweise.

Wie in anderen Studien bestätigt (Selden & Selden 2003, Ufer et al. 2009), fokussieren Schülerinnen und Schüler auch in diesem Format eher auf Einzelschritte statt auf die Gesamtstruktur eines Beweises. Epistemologisch betrachtet, gelingt in dem didaktischen Beweisformat der Zusammenhang von Formulierungen (Zeichen und Aussagen) – Referenzkontexten (Gründen und Bedeutungen) und Schlüssen (zugrunde liegende Deduktionen) nicht ohne weiteres. Eine diskursive Aushandlung dieses Zusammenhanges und damit verbundener Geltungsansprüche vollzieht sich in diesem Unterrichtsformat zudem meist nicht, so dass sich die oben benannte Diskrepanz zwischen Bildungsanspruch und Unterrichtsrealität beim Beweisen manifestiert.

Alternative Ansätze in der Mathematikdidaktik wie etwa der 'Debattieransatz' (Arsac, Balacheff, & Mante 1992) waren bewusst anders gelagert, um eine Aushandlung von Geltungsansprüchen zu forcieren. Angelehnt an Imre Lakatos quasi empirisches Verständnis von Mathematik und angeregt durch sein Werk ‚Beweise und Widerlegungen' (Lakatos 1976) sollten Lernende ausgehend von einer Problemstellung eigene Hypothesen aufstellen und diese in Auseinandersetzung und Widerstreit miteinander begründen. Dabei zeigte sich allerdings, dass die Schülerinnen und Schüler häufig keine mathematischen Argumente benutzten, um ihre Vermutungen zu rechtfertigen. Stattdessen führten sie persönliche Autoritätsargumente an oder verwiesen auf die soziale Akzeptanz der Aussagen (Arsac, Balacheff, & Mante 1992). Den Lehrpersonen gelang es in diesem Kontext in der Regel nicht, die Rolle eines engagierten Gegenparts (‚committed dissenter', Boero 1999) zu übernehmen, der die Argumente der Lernenden herausfordert und so mathematisch tragfähige Begründungen motiviert. Die bewusste Vermeidung von vorgegebenen Argumentationsformaten hat sich in diesem Kontext als eine zu große diskursive und epistemologische Herausforderung für Lernende und Lehrende erwiesen. Dass Formaten unterrichtlichen Beweisens eine entscheidende Bedeutung zukommt, wird an beiden der hier dargestellten Ansätze somit auf ganz unterschiedliche Weise deutlich. Welche Formate jedoch einen konstruktiven Rahmen für mathematisches Argumentieren im schulischen Kontext bieten können, ist in der Forschung bisher nicht geklärt (Stylianides, Stylianides & Weber, 2017).

2. Mathematische Beweise als Argumente

Unterschiedliche philosophische Traditionen haben das Verständnis von Argumentationen und Beweisen in der Mathematikdidaktik geprägt, was auch Rückwirkungen auf ihre möglichen unterrichtlichen Formate hat. Auf der einen Seite wird in der Mathematikdidaktik an die Tradition einer rhetorischen Auffassung von Argumentationen (Duval 1991; Perelman & Olbrechts-Tyteca 1958) angeknüpft, welche Argumentationen deutlich von Beweisen abgrenzt. Auf der anderen Seite finden sich argumentationstheoretische (Toulmin 1958) und pragmatische philosophische Ansätze (Aberdein 2012), die eine solche Abgrenzung nicht vornehmen. Im Gegenteil gehen diese Ansätze von einem deutlich weiteren Verständnis von Argumentation aus, das mathematische Beweise als spezifische Art von Argumentationen begreift (Knipping 2003, Pedemonte 2007). Mathematiker wie Reuben Hersh (1997) finden sich in einem solchen weiten Verständnis wieder und betonen zudem die Bedeutung sozialer Aushandlungsprozesse von Beweisen innerhalb der mathematischen Community. Damit wird nicht infrage gestellt, dass mathematischen Beweisen eine spezifische Inferenzstruktur zugrunde liegt. Vielmehr geht es nach dieser Auffassung in Beweisen darum, eben diese deduktive Schlussweise argumentativ aufzuzeigen (Azzouni 2004). Aberdein (2012) beschreibt mathematische Beweise daher als Parallelstruktur, in der argumentativ auf die zugrundeliegende Inferenz verwiesen wird. Dieses Verständnis von mathematischen Beweisen macht deutlich, welcher diskursiven Herausforderung unterrichtliches Beweisen gegenübersteht. Argumentativ muss geklärt werden, auf welche Schlüsse der Beweis verweist, welche Annahmen zu Grunde gelegt werden und welche Aussagen daraus gefolgert werden. Das heißt, Annahmen und Schlüsse müssen inhaltlich, aber auch in der Funktion ihrer Aussagen mit Bedeutung belegt, ihre Beziehungen untereinander geklärt werden. Diskursiv und auch epistemologisch stellt dies eine nicht zu unterschätzende Herausforderung dar.

Unterrichtlich sind Aushandlungsprozesse dieser Art auf Argumentations-Formate angewiesen, wie Krummheuer (1992) in seiner interaktionistischen Lerntheorie zeigt. Für den schulischen Unterricht höherer Jahrgangsstufen und die Hochschuldidaktik ist dies bisher aus interaktionistischer Sicht kaum untersucht und in den Blick genommen worden (Knipping 2003). Stattdessen wird in beweisdidaktischen Arbeiten primär auf Beweiskonzepte und didaktische Ansätze fokussiert, ihre epistemologischen Herausforderungen stehen dabei zunächst im Fokus, weniger ihre diskursiven Hürden.

3. Didaktische Beweiskonzepte

Die Natur schulischen Beweisens beschreibt Freudenthal (1973) als lokales Ordnen. „Grob gesagt versteht er darunter die Idee, zunächst anhand eines konkreten Problems die Erkundung eines Beziehungsgefüges zu initiieren. In einer zweiten Phase tritt dann die Frage nach den logischen Beziehungen zwischen den untersuchten Konzepten und ihren Eigenschaften in den Vordergrund (Freudenthal 1973, Bd. 2, S. 423 ff.)" (zitiert nach Jahnke & Ufer 2015, S. 335). Argumentativ bedeutet dies, dass Lokales Ordnen inhaltliche und begriffliche Deutungen voraussetzt, bevor logische Bezüge und deduktive Schlussweisen argumentativ gefasst werden können. Eine solche epistemologische Stufung findet sich in unterschiedlichen didaktischen Beweiskonzepten. Branford (1913) etwa unterscheidet ‘experimentelle Veranschaulichungen‘ von ‚intuitiven‘ und ‚wissenschaftlichen Ableitungen‘. Während Begriffe und spezifische Eigenschaften von mathematischen Gegenständen anhand von Beispielen illustriert und eingesehen werden können (‚intuitives Ableiten‘), gelingt ihre Herleitung und allgemeine Charakterisierung erst durch schlussfolgerndes Argumentieren (‚wissenschaftliches Ableiten‘). Beide Formen der Ableitung erzeugen seiner Auffassung nach „allgemeine und streng gültige Wahrheiten“ (ebd., S. 103). Während jedoch ‚intuitives Ableiten‘ den Rückgriff auf „Postulate der sinnlichen Erfahrung“ als argumentative Basis zulässt, werden beim ‚wissenschaftlichen Beweis‘ ausschließlich deduktive Herleitungen akzeptiert, die allenfalls durch Beweisfiguren angeregt werden. Aus interaktionistischer Sicht bedeutet dies, dass bei ‚experimentellen Veranschaulichungen‘ im Unterricht andere Argumentations-Formate realisiert werden müssen als bei ‚intuitiven‘ oder ‚wissenschaftlichen‘ Ableitungen. Inwiefern solche Formate diskursiv und auch epistemologisch realisierbar sind bzw. Schülerinnen und Schülern eine Partizipation daran ermöglicht werden kann, ist eine empirisch noch nicht geklärte Frage. Diverse Studien zeigen, dass Lernende und auch Lehrpersonen häufig nicht in der Lage sind, Beweise von nicht schlüssigen Argumenten selbständig zu unterscheiden (Alcock & Weber 2005; Schwarz et al 2008). Etwa gelingt ihnen die substanzielle Unterscheidung von ‘experimentellen Veranschaulichungen‘ und ‚intuitiven Ableitungen‘ nicht. Der unterrichtlichen Rahmung durch Argumentations-Formate könnte eine entscheidende Funktion zukommen, um nicht nur epistemologische Hürden, sondern zugleich diskursive Hürden zu nehmen (siehe auch Cramer 2018).

Jahnke (2009) zeigt überzeugend, wie ausgehend von der anschaulichen Hypothese vom Wechselwinkel im schulischen Unterricht deduktiv schlüssig der Winkelsummensatz gefolgert werden kann. Einsichten in Hypothesen und ihre Konsequenzen sind dabei leitend für sein mathematikdidaktisches

Beweiskonzept. Auch Kirsch (1979) demonstriert anhand vielfältiger fachlicher Inhalte, wie ausgehend von konkreten Handlungen inhaltliche Zusammenhänge in prämathematischen Beweisen aufgezeigt und argumentativ verallgemeinert werden können. Ein bekanntes Beispiel ist der Satz, dass der Umfang u eines konvexen Vierecks größer ist als die Summe s der beiden Diagonalenlängen (Kirsch, 1979). Argumentationsbasis sind zunächst Handlungen anhand von Gummiringen, die zunächst längs jeder Diagonalen und dann durch Dehnen über die Eckpunkte des Vierecks gespannt werden. Diese Beispiele zeigen, dass und wie anschauliche Argumentationsbasen, bestehend aus realen bzw. gedachten Objekten und Handlungen, die man mit diesen Objekten vornehmen kann, einen didaktischen Ausgangspunkt darstellen können. So können Lernenden (und auch Lehrenden) epistemologische Brücken hin zum mathematischen Argumentieren und Beweisen angeboten werden. Diesen Ansatz prämathematischen Beweisens haben Blum und Kirsch (1989) als Konzept ‚präformalen Beweisens' weiter ausgearbeitet. Wobei beide beim ‚präformalen Beweisen' dafür plädieren, „der Schüler solle im Mathematikunterricht ‚die Fähigkeit zum Argumentieren üben und ausbilden. Dabei denken wir nicht in erster Linie an formale Beweise, sondern an ein inhaltliches Argumentieren, das durchaus korrekt und ‚intellektuell ehrlich' sein soll. (Blum & Kirsch 1979, S. 7)" (Blum & Kirsch 1989, S. 200). Nicht geklärt ist damit, welche Formate nötig sind, um Lehrende und Lernende nicht nur mit den damit verbundenen epistemologischen, Barrieren, sondern auch bei der Bewältigung diskursiver Herausforderungen und Hürden in diesen Argumentations- bzw. Beweisprozessen zu unterstützen.

Auch in Ansätzen ‚handlungsbezogener Beweise', wie sie etwa Semadeni (1984) vorgeschlagen hat, oder bei ‚operativen Beweisen' im Sinne von Wittmann und Müller (Wittmann & Müller 1988, Wittmann 2014) finden sich diese beiden Herausforderungen. Besonders deutlich wird dies auch in didaktischen Ansätzen, die auf 'generischen Beweisen' aufbauen (siehe etwa Kempen & Biehler 2019; Mason & Pimm 1984; Dreyfus et al. 2012).

> A generic proof aims to exhibit a complete chain of reasoning from assumptions to conclusion, just as in a general proof; however, […] a generic proof makes the chain of reasoning accessible to students by reducing its level of abstraction; it achieves this by examining an example that makes it possible to exhibit the complete chain of reasoning without the need to use a symbolism that the student might find incomprehensible. (Dreyfus et al. 2012, p. 204)

Wie Dreyfus verdeutlicht, bieten generische Beweise das Potenzial Argumentationen zugänglich zu machen, indem durch das Betrachten von Beispielen das Abstraktionsniveau zunächst gesenkt wird. Allerdings ist diese spezifische Art mit Beispielen umzugehen und an konkreten Beispielen die

Allgemeingültigkeit einer mathematischen Aussage zu zeigen nicht ohne weiteres Schülerinnen und Schülern, oder auch Studierenden und angehenden Lehrkräften eingängig und einsichtig (siehe dazu auch Kempen 2019). Das Potenzial dieses Ansatzes ist gleichermaßen mit epistemologischen und diskursiven Herausforderungen verbunden, von denen erstere in der Forschung bereits kritisch diskutiert werden. Die damit verbundenen diskursiven Voraussetzungen haben jedoch bisher wenig Beachtung gefunden. Gila Hanna, welche die mathematikdidaktische Forschung zum Beweisen über Jahrzehnte geprägt hat, betont wie alle anderen hier genannten Autorinnen und Autoren, dass aus didaktischer Sicht mathematische Strenge nur insofern gerechtfertigt ist, wenn diese auch mathematische Einsichten schafft.

> Rigour is a question of degree in any case. In the classroom one needs provide not absolute rigour, but enough rigour to achieve understanding and to convince. An argument presented with sufficient rigour will enlighten and convince more students, who in turn may convince their peers. It is the teacher who must judge when it is worthwhile insisting on more careful proving to promote the elusive but most important classroom goal of understanding. (Hanna 1997, S. 183)

Hanna stellt damit erneut einen zentralen epistemologischen Punkt in den Vordergrund. Die darüber hinaus wirkenden diskursiven Mechanismen, etwa die Aushandlung von ‚Strenge' und ihre Bedeutung beim Verstehen, bleiben damit im Hintergrund. Ein Fokus auf dieses Hintergrundgeschehen und seine Bedeutung könnte grundlegende Einsichten in die tiefer liegenden Wirkmechanismen von unterrichtlichen Beweisprozessen geben, was bisher kaum Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung war. Dies könnte Erkenntnisse liefern, wie nicht nur ‚idealiter Zustände' didaktisch konzipiert, sondern auch unterrichtlich realisiert und in unterrichtliche Argumentationskulturen integriert werden können. Schulisch sind Aushandlungsprozesse dieser Art auf Argumentations-Formate angewiesen, wie dies Krummheuer (1992) in seiner interaktionistischen Lerntheorie aufzeigt. Für den schulischen Unterricht höherer Jahrgangsstufen und die Hochschuldidaktik ist dies bisher wenig untersucht und in den Blick genommen worden.

Fazit und Ausblick

Es besteht ein Konsens, dass mathematisches Argumentieren und Beweisen auch für den Mathematikunterricht bedeutsam sind. Zudem sind in den letzten Jahrzehnten zahlreiche philosophische und wissenschaftstheoretische Arbeiten, wie auch empirische Studien zur Erforschung von Vorstellungen, Einstellungen und Kompetenzen in diesem Bereich durchgeführt worden. Dabei wird deutlich, dass Lernende wie auch Lehrende hier vor großen Herausforderungen stehen. Lernprozesse und Unterrichtsprozesse im Bereich des mathematischen Argumentierens und Beweisens sind bisher primär unter epistemologischen Gesichtspunkten untersucht. Im Vergleich dazu sind diskursive Wirkmechanismen unterrichtlicher Prozesse bisher kaum erforscht und stellen ein Desideratum weiterer Forschung dar. Dies betrifft sowohl den schulischen Bereich als auch den universitären Bereich der Lehrerausbildung. Ansätze curricularer Konzeptionen, welche fachliche, didaktische und genetische Zugänge zum mathematischen Argumentieren und Beweisen zugänglich machen, existieren bereits. Ihre hochschuldidaktische Umsetzung in der universitären Lehrerausbildung und im schulischen Unterricht unter Beachtung diskursiver Momente wäre ein nächster, bedeutender Schritt.

Literatur

Aberdein, A. (2012). The parallel structure of mathematical reasoning. In A. Aberdein & I. J. Dove (Eds.) *The argument of mathematics* (pp. 351-370). Dordrecht: Springer.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125-134.

Arsac, G., Balacheff, N. & Mante, M. (1992), Teacher's Role and Reproducibility of Didactical Situations. *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 23, pp. 5-29.

Azzouni, J. (2004). The derivation-indicator view of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, *12*(2), 81-106.

Blum, W., & Kirsch, A. (1989). Warum haben nicht-triviale Lösungen von f'= f keine Nullstellen?. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), Anschauliches Beweisen (S. 199-209). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, *7*(8). Abgerufen von www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. (Rudolf Schimmack & Hermann Weinreich, Trans.). Leipzig & Berlin: Teubner. (Original work published 1908).

Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 229-249.

Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 191214). Heidelberg: Springer Science + Business Media.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in mathematics*, *22*(3), 233-261.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *18*(2-3), 171-185.

Herbst, P. G. (2002a). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 176–203.

Herbst, P. G. (2002b). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 283–312.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* London: Jonathan Cape.

Jahnke, H. N. (2009). Hypothesen und ihre Konsequenzen: Ein anderer Blick auf die Winkelsummensätze. *Praxis der Mathematik 51*, 26-31.

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 331–355). Springer Berlin Heidelberg.

Kempen, L. (2019). Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kempen, L. & Biehler, R. (2019). Fostering first-year pre-service teachers' proof competencies. *ZDM*, *51* (5), 731-746.

Kirsch, A. (1979). *Beispiele für prämathematische Beweise*. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht* (S. 261–274). Klagenfurt: Hölder-Pichler-Tempsky

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis: Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Knipping, C., & Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. In A. Aberdeen & I. J. Dove (Hrsg.), *The argument of mathematics* (pp. 119-146). Springer, Dordrecht.

Krummheuer, G. (1992). Lernen mit „Format": Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie; diskutiert an *Beispielen mathematischen Unterrichts*. Dt. Studien-Verlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Princeton: Princeton University Press.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1958). *La nouvelle rhétorique: Traité de l'argumentation*. Paris: Presses Universitaires de France.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education. *Research, learning and teaching*. Rotterdam/Boston/Taipei: Sense Publishers

Schwarz, B., Leung, I. K., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J., & Vale, C. (2008). Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM*, *40*(5), 791-811.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of proofs written as texts: Can undergraduate tell whether an argumentation proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-36.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics*, *4*(1), 32-34.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30-54.

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul-und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, *37*, 213-232.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. *Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Bielefeld*, 237-257.