

# **Nichtreflektierende Rand- und Kopplungsbedingung zur instationären Strömungssimulation von Fluidenergiemaschinen in Anlagen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Dr.-Ing.**

von der Fakultät Maschinenbau  
der Technischen Universität Dortmund  
genehmigte Dissertation

**Dipl.-Ing. Andreas Linkamp**

aus

Hamm

Tag der mündlichen Prüfung: 13.12.2019

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Romuald Skoda

**Dortmund, 2019**

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Fluidtechnik der Technischen Universität Dortmund. Die Unterstützung von vielen Seiten in unterschiedlichsten Arten und Weisen hat mir die Erstellung dieser Arbeit sehr erleichtert wenn nicht überhaupt erst ermöglicht. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Beteiligten dafür herzlich bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer für den Anstoß der behandelten Forschungsfrage sowie die kontinuierliche Betreuung der Entstehung dieser Arbeit. Zahlreiche konstruktive Diskussionen aber auch regelmäßiges Anzweifeln von Arbeitshypothesen haben nicht nur erheblich zu einem erfolgreichen Abschluss meiner Promotion beigetragen, sondern mir auch insgesamt eine fachlich intensive und besonders lehrreiche Zeit am Fachgebiet Fluidtechnik bereitet. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Romuald Skoda für die Übernahme des Koreferats bedanken.

Ein großer Dank geht auch an alle KollegInnen am Fachgebiet Fluidtechnik, die mich in meiner langen Zeit als Mitarbeiter begleitet und unterstützt haben. Die gleichermaßen positive, entspannte wie konstruktive Arbeitsatmosphäre hat wesentlich zu einem angenehmen Arbeitsalltag beigetragen und mich gelehrt, dass ausgeprägte Charaktere gepaart mit weitreichender inhaltlicher und gestalterischer Freiheit zu Wissenschaft auf sehr hohem Niveau führen können. Ein besonderer Dank gilt Hanushan Vasuthevan, Patrick Tetenborg und Christian Lehr für die gemeinsame Bürozeit mit viel Spaß, einigen Partien Prellball und vielen konstruktiven Diskussionen. Ich möchte Außerdem meinen studentischen Hilfskräften Iman Valizadeh und Paul Schlößer für die großartige Unterstützung und ihren Anteil am Gelingen der vorliegenden Arbeit danken.

Abschließend möchte ich meiner Familie für den stetigen Rückhalt, und dabei ganz besonders meiner Frau Anna für die bedingungs- und grenzenlose Unterstützung zu jeder Zeit und meinem Sohn Ferdinand für die ständige Ablenkung in den letzten Jahren der Entstehung dieser Arbeit, danken.

Osnabrück im Februar 2020

Andreas Linkamp



# Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine ganzheitliche Methode zur Simulation der instationären Wechselwirkungen zwischen Fluidenergiemaschinen und Anlagen entwickelt. Diese umfasst eine nichtreflektierende Randbedingung für eindimensionale numerische Domains sowie eine nichtreflektierende Kopplungsbedingung zur zeitlichen Zwei-Wege-Kopplung von eindimensionalen und dreidimensionalen numerischen Domains. Mithilfe der entwickelten nichtreflektierenden Rand- und Kopplungsbedingung lässt sich sowohl der Einfluss akustischer Rückwirkungen angeschlossener Anlagen auf das Betriebsverhalten als auch die Pulsationsanregung von Fluidenergiemaschinen simulieren und analysieren.

Der Bedarf der Entwicklung einer nichtreflektierenden Randbedingung ergibt sich aus der Notwendigkeit bei bisherigen in der Literatur vorhandenen Konzepten, einen Kompromiss zwischen niedrigen Reflexionen einerseits und der Einhaltung eines geforderten Mittelwertes von Strömungsgrößen andererseits zu treffen. Durch Modifikation der etablierten nichtreflektierenden charakteristischen Randbedingung mittels Überlagerung eines geeigneten Filters im Zeitbereich wird eine neue filterbasierte nichtreflektierende Randbedingung entwickelt, mit der sich die beiden genannten Anforderungen gleichzeitig erfüllen lassen. Anhand umfangreicher Variationen der relevanten akustischen bzw. strömungsmechanischen und numerischen Parameter wird gezeigt, dass sich mit der neu entwickelten filterbasierten nichtreflektierenden Randbedingung eine erhebliche Reduktion von Reflexionen im Vergleich zu bisherigen Ansätzen nichtreflektierender Randbedingungen erreichen lässt, wobei gleichzeitig der vorgegebene Wert der Gleichgrößen eingehalten wird.

Die entwickelte nichtreflektierende Kopplungsbedingung wird zur Kopplung detaillierter dreidimensionaler Modelle zur Strömungssimulation von Fluidenergiemaschinen und reduzierter eindimensionaler Modelle zur Strömungssimulation von Rohrleitungssystemen konzipiert. Im Rahmen der Methodentwicklung werden zunächst die grundlegenden Mechanismen zur Entstehung von Reflexionen an den Grenzflächen zwischen unterschiedlich diskretisierten, gekoppelten numerischen Domains anhand leitungsakustischer Betrachtungen theoretisch diskutiert. Es wird die Theorie abgeleitet, die Reflexionen an der Grenzfläche durch Anpassung der spektralen numerischen Fehler und damit der numerischen Impedanzen von gekoppelten Domains zu minimieren.

Zur Validierung der Theorie der numerischen Impedanzanpassung wird im Voraus eine Methode zur numerisch-experimentellen spektralen Fehleranalyse numerischer Schemata entwickelt und anhand analytischer Funktionale validiert. Anschließend wird bei umfassender Parametervariation mit sukzessiver Erhöhung der Komplexität der gekoppelten numerischen Domains der Einfluss der spektralen numerischen Fehler auf die auftretenden Reflexionen an der Kopplungsstelle untersucht. Es wird

---

gezeigt, dass durch gezielte Anpassung numerischer Parameter in den gekoppelten Domains die Reflexionen an einer Kopplungsstelle minimiert werden können.

Abschließend werden generische Testfälle mit Kombination der nichtreflektierenden Rand- und Kopplungsbedingung simuliert. Anhand dieser Testfälle wird das Vorgehen bei der numerischen Impedanzanpassung demonstriert sowie die Anwendung der entwickelten Methoden in praktischen ingenieurtechnischen Problemstellungen veranschaulicht.

# Abstract

In the present work an integral method for simulating transient interactions between fluid machinery and attached plants is developed. This method comprises a nonreflective boundary condition for onedimensional numerical domains as well as a nonreflective coupling condition for time synchronised two-way coupling of onedimensional and threedimensional numerical domains. By means of the developed boundary and coupling condition both the influence of acoustic feedback of attached plants onto the operating behaviour and the pulsation excitation of fluid machinery can be simulated and analysed.

The demand for the development of a new nonreflective boundary condition results from the necessity of existing concepts to make a compromise between low reflections on the one hand and the compliance with specified mean values of flow variables on the other hand. By modifying the established nonreflective characteristic boundary condition through superposition of a suitable filter in the time domain a new filterbased nonreflective boundary condition is developed, which which both above-mentioned requirements can be fulfilled simultaneously. By means of comprehensive parameter variations it is shown that with the newly developed filterbased nonreflective boundary condition a significant reduction of reflections is achieved compared to existing approaches of nonreflective boundary conditions while specified values for the mean flow are closely adhered to at the same time.

The nonreflective coupling method is designed for coupling detailed threedimensional models for the flow simulation of fluid machinery and reduced onedimensional models for the flow simulation of piping systems. Within the scope of method development, at first the basic underlying mechanisms of emergence of reflections at an interface between differently discretised numerical domains are theoretically discussed based on duct acoustical considerations. A theory is derived, which states that reflections at an interface can be minimised by equalising the spectral numerical errors and thus the numerical impedances.

In advance to the validation of the theory of numerical impedance alignment a numerically-experimental method for spectral error analysis is developed and validated by means of analytic functionals. Subsequently the influence of spectral errors onto occurring reflections at an interface between numerical domains is investigated by means of comprehensive parameter variations while the complexity of the coupled domains is gradually increased. It is shown that interface reflections can be minimised by specific adjustment of numerical parameters.

Finally, generic test cases with both the nonreflective boundary and coupling condition combined are simulated. With these test cases the procedure of numerical impedance alignment is demonstrated and the application of the developed methods to practical engineering problems is illustrated.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik . . . . .	3
2.2. Ebene Wellentheorie . . . . .	4
2.2.1. Lineare Wellenausbreitung . . . . .	5
2.2.2. Nichtlineare Wellenausbreitung . . . . .	9
2.2.3. Reflexion ebener Wellen . . . . .	14
2.3. Spektrale Analyse numerischer Fehler . . . . .	15
<b>3. Stand des Wissens</b>	<b>19</b>
3.1. Kopplung numerischer Domains . . . . .	20
3.2. Reflexionsfreie Randbedingung . . . . .	26
<b>4. Motivation und Zielsetzung</b>	<b>29</b>
<b>5. Numerische Schemata</b>	<b>31</b>
5.1. Eindimensionales Schema . . . . .	31
5.2. Dreidimensionales Schema . . . . .	35
<b>6. Reflexionsfreie Randbedingung</b>	<b>39</b>
6.1. Theorie der filterbasierten Randbedingung . . . . .	41
6.2. Implementierung der GMW-filterbasierten Randbedingung . . . . .	44
6.3. Modell zur numerischen Validierung . . . . .	46
6.4. Mittelwert . . . . .	47
6.4.1. Einfluss der Initialisierung der Domain . . . . .	48
6.4.2. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung . . . . .	50
6.4.3. Einfluss der akustischen Machzahl . . . . .	50
6.4.4. Vergleich mit LRT und der klassischen CRB . . . . .	53
6.5. Reflexionsverhalten . . . . .	54
6.5.1. Einfluss der akustischen Machzahl . . . . .	55
6.5.2. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung . . . . .	58
6.5.3. Einfluss von Oberschwingungen . . . . .	59
6.5.4. Kennfelder der nichtreflektierenden Randbedingung . . . . .	62
6.5.5. Vergleich mit der klassischen CRB . . . . .	68



6.5.6. Vergleich mit der LRT-Randbedingung . . . . .	69
6.5.7. Reflexionen bei unangepasstem Filter . . . . .	70
6.5.8. Reflexionen bei kontinuierlich veränderlicher Frequenz . . . . .	71
6.6. Zwischenergebnis . . . . .	73
<b>7. Reflexionsfreie Kopplungsbedingung</b>	<b>75</b>
7.1. Grundlegende Anforderungen an eine 3D/1D-Kopplung . . . . .	75
7.2. Theorie der reflexionsfreien Kopplungsbedingung . . . . .	78
7.2.1. Herleitung der numerischen Dämpfungskonstante . . . . .	80
7.2.2. Einfluss der numerischen Schallgeschwindigkeit . . . . .	84
7.2.3. Einfluss multidimensionaler Domains . . . . .	86
7.3. Systematik der numerischen Impedanzanpassung . . . . .	86
7.4. Analytische Bestimmung spektraler Fehler . . . . .	87
7.5. Experimentelle Bestimmung spektraler Fehler . . . . .	89
7.5.1. Modell und Methodik . . . . .	89
7.5.2. Einfluss der akustischen Machzahl . . . . .	96
7.5.3. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung . . . . .	101
7.5.4. Zwischenergebnis . . . . .	104
7.6. Implementierung der Kopplung . . . . .	106
7.6.1. Rückkopplung durch Flussvorgabe . . . . .	108
7.6.2. Rückkopplung durch Zellzentren und Extrapolation . . . . .	109
7.7. Reflexionsminderung durch numerische Impedanzanpassung . . . . .	115
7.7.1. Anpassung der numerischen Impedanz bei monofrequenter Anregung . . . . .	115
7.7.2. Reflexionen bei reibungsfreier 1DFV/1DCV-Kopplung mit monofrequenter An- regung . . . . .	117
7.7.3. Anpassung der numerischen Impedanz bei Anregung mit Oberschwingungen . .	134
7.7.4. Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen . . . . .	137
7.8. Multidimensionale Kopplung . . . . .	141
7.8.1. Effektive Dämpfungskonstante . . . . .	142
7.8.2. Transformation der Strömungsgrößen zwischen 3D- und 1D-Domain . . . . .	150
7.8.3. Konservativität der 3D/1D-Kopplung . . . . .	153
7.8.4. Reflexionen bei 3DFV/1DCV-Kopplung . . . . .	154
7.8.5. Geschwindigkeitsprofile bei 3DFV/1DCV-Kopplung . . . . .	157
7.9. Zwischenergebnis . . . . .	159
<b>8. Generischer Testfall</b>	<b>161</b>
8.1. Grundlegendes Modell . . . . .	161
8.2. Anforderungen an die 3DFV-Domain . . . . .	163
8.2.1. Strömungsfeld . . . . .	163
8.2.2. Netztopologie . . . . .	163

8.3. Bestimmung der Parameter der 1DCV-Domain . . . . .	164
8.4. Ergebnisse . . . . .	166
8.5. Übertragung auf die gekoppelte Simulation von Fluidenergiemaschinen und Anlagen .	171
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>173</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>175</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>187</b>
A.1. Kennfelder des Grundswingungsgehaltes an der nichtreflektierenden Randbedingung bei Variation von $\sigma_{RB}$ und $\varphi_{num}$ . . . . .	187
A.2. Herleitung der spektralen Fehler für das FV-Schema bei variablem Gewichtungsfaktor der zeitlichen Integration . . . . .	189
A.3. Diffusions- und Dispersionsbeiwerte des FV-Schemas bei Variation der akustischen Machzahl . . . . .	190
A.4. Spektrale Fehler des FV-Schemas bei Variation des Gewichtungsfaktors der zeitlichen Integration . . . . .	192
A.5. Kopplungsparameter bei Anregung mit Oberschwingungen . . . . .	193



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Beschreibung	Einheit
$a$	allgemeine Schallgeschwindigkeit	$m/s$
$a_{nl}$	resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit nichtlinearer Wellen	$m/s$
$a_0$	lineare Schallgeschwindigkeit	$m/s$
$\bar{A}$	Koeffizientenmatrix	–
$B$	nichtlineares Modul	$Pa$
$B_n$	Koeffizienten der Besselfunktion	–
$c$	Strömungsgeschwindigkeit	$m/s$
$c_p$	spez. isobare Wärmekapazität	$J/(kg K)$
$c_v$	spez. isochore Wärmekapazität	$J/(kg K)$
$CFL$	CFL-Zahl	–
$\vec{d}$	Vektor der Inhomogenitäten	–
$E$	Energie	$J$
$\bar{E}$	Matrix der Eigenvektoren	–
$e_t$	spez. Gesamtenergie	$J/kg$
$f$	Riemann-Invariante (positive Richtung)	$Pa$
$f$	Frequenz	$Hz$
$f_A$	Abtastfrequenz	$Hz$
$f_B$	Filterbasisfrequenz	$Hz$
$f_G$	Grundfrequenz der Anregung	$Hz$
$f_{Gr}$	Filtergrenzfrequenz	$Hz$
$f_k$	Laufindex für FV-Zellflächen (faces)	–
$f_x$	spez. Reibkraft	$m/s^2$
$F$	Fluss	–
$g$	Riemann-Invariante (negative Richtung)	$Pa$
$g_J$	Gewichtungsfaktor	–
$G$	Grundswingungsgehalt	–
$\underline{G}$	Verstärkungsfaktor	–
$H$	Übertragungsfunktion	–
$He$	Helmholtzzahl	–
$i$	räumliche Schrittweite	–
$I$	Impuls	$(kg m) / s$

$I$	Einheitsmatrix	—
$I$	Turbulenzintensität	—
$I$	Pulsationsindex	—
$j$	imaginäre Einheit	—
$J_n$	Bessel-Funktion erster Art und n-ter Ordnung	—
$k$	Wärmeleitfähigkeit	$W/(m K)$
$k$	Kreiswellenzahl	$1/m$
$k$	turbulente kinetische Energie	$m^2/s^2$
$K$	Kompressionsmodul	$Pa$
$K$	Konstante des LRT-Ansatz	—
$l$	Länge	$m$
$L_p$	Schalldruckpegel (Bezug: $2 \cdot 10^{-5} Pa$ effektiv)	$dB$
$m$	Masse	$kg$
$m$	Steigung	—
$\overline{Ma}$	Machzahl der Gleichströmung	—
$Ma_{ak}$	akustische Machzahl	—
$\vec{n}$	Normalenvektor	—
$n$	Polytrophenexponent	—
$n$	zeitlicher Index	—
$n_A$	Anzahl der Abtastwerte	—
$N_{kr}$	entdimensionierte kritische Entfernung	—
$p$	Druck	$Pa$
$Pr$	Prandtlzahl	—
$Q$	Quelle	—
$\dot{q}$	spez. Wärmequellstärke	$W/m^3$
$r$	Reflexionskoeffizient	—
$R$	spez. Gaskonstante	$J/(kg K)$
$R$	Reibungsterm	$Pa s/m^2$
$s$	spez. Entropie	$J/(kg K)$
$s$	Schubwellenzahl	—
$S$	Oberfläche	$m^2$
$S_k$	Flächeninhalt	$m^2$
$St$	Strouhalzahl	—
$t$	Zeit	$s$
$t_{ES}$	Einschwingzeit des Filters	$s$
$t_{kr}$	kritische Zeit	$s$
$t_s$	Stoßzeitpunkt	$s$
$T$	Temperatur	$K$
$T$	Periodendauer	$s$
$u$	spez. innere Energie	$J/kg$

$V$	Volumen	$m^3$
$V_j$	diskretes finites Volumen	$m^3$
$\dot{V}$	Volumenstrom	$m^3/s$
$x$	Ortsvariable	$m$
$x_s$	Stoßabstand der Welle	$m$
$x_{kr}$	kritische Entfernung	$m$
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand	—
$Z_0$	spez. Schallkennimpedanz	$kg/(m^2 s)$
$\underline{Z}_S$	komplexe spez. Schallimpedanz	$kg/(m^2 s)$
$\underline{Z}_{S,num}$	numerische Schallimpedanz	$kg/(m^2 s)$

## Griechische Buchstaben

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\alpha$	Dämpfungskonstante	$1/m$
$\beta$	Phasenkonstante	$1/m$
$\beta$	Impulsbeiwert der Stromfadentheorie	—
$\Gamma^\phi$	Diffusionskoeffizient	—
$\Delta$	Verzerrungsgrad pro Wellenlänge	—
$\Delta t$	zeitliches Inkrement	$s$
$\Delta x$	räumliches Inkrement	$m$
$\delta_a$	akustische Grenzschichtdicke	$m$
$\delta_t$	turbulente Strömungsgrenzschichtdicke	$m$
$\delta x$	Abstand der Zellmittelpunkte	$m$
$\epsilon$	Dissipationsrate	$m^2/s^2$
$\epsilon_0$	Nichtlinearitätskoeffizient	—
$\epsilon_A$	Abbruchfehler	—
$\epsilon_d$	Diffusionsfehler bzw. Diffusionsbeiwert	—
$\epsilon_u$	relative Abweichung einer Größe $u$	—
$\epsilon_v$	Dissipationsenergie	$W$
$\epsilon_\phi$	Dispersionsfehler bzw. Dispersionsbeiwert	—
$\zeta_{\overline{Ma}}$	Skalierungskoeffizient des Dispersionsfehlers	—
$\zeta_{a,CV}$	Skalierungskoeffizient der Schallgeschwindigkeit	—
$\eta$	dynamische Viskosität	$Pa s$
$\kappa$	Isentropenexponent	—
$\lambda$	Wellenlänge	$m$
$\Lambda$	Amplitudenverhältnis	—
$\nu$	kinematische Viskosität	$m^2/s$
$\xi_a$	Verhältnis der num. Schallgeschwindigkeiten	—

$\xi_d$	Verhältnis der num. Dämpfungskonstanten	–
$\bar{\Lambda}$	Diagonalmatrix der Eigenwerte	$m/s$
$\pi$	Kreiszahl Pi	–
$\rho$	Dichte	$kg/m^3$
$\sigma$	dimensionsloser Abstand	–
$\Theta$	Gewichtungsfaktor der zeitlichen Integration	–
$\mathcal{T}$	Spannungstensor	$Pa$
$\phi$	Erhaltungsgröße	–
$\varphi$	Phasenwinkel	$rad$ bzw. $^\circ$
$\Phi$	harmonische Testfunktion	–
$\Omega$	Lösungsraum einer numerischen Domain	–
$\omega$	Kreisfrequenz	$Hz$
$\omega$	spezifische Dissipationsrate	$1/s$

## Subskripts

Symbol	Beschreibung
$A$	Stützpunkt A der Charakteristiken
$Anr$	Anregung
$Aus$	Auslass
$B$	Stützpunkt B der Charakteristiken
$BL$	boundary layer
$c$	Schallschnelle
$char$	charakteristisch
$C$	Stützpunkt C der Charakteristiken
$CRB$	klassische charakteristische Randbedingung
$eff$	Effektivwert
$ein$	einlaufend
$eva$	evaluiert
$exakt$	exakt
$exp$	experimentell
$Ein$	Einlass
$ges$	gesamt
$GMW$	gleitender Mittelwert
$i$	räumlicher Gitterpunkt
$init$	initialisiert
$ist$	Istwert
$korr$	Korrekturterm
$LRT$	lineare Relaxationsterme

<i>max</i>	Maximalwert
<i>n</i>	zeitlicher Gitterpunkt
<i>num</i>	numerisch
<i>p</i>	Schalldruck
<i>PD</i>	physikalische Domain
<i>phys</i>	physikalisch
<i>RB</i>	Randbedingung
<i>s</i>	isentrop
<i>S</i>	Oberfläche
<i>soll</i>	Sollwert
<i>V</i>	Volumen
0	Bezugszustand/Ruhezustand

## Superskripts

Symbol	Beschreibung
<i>C</i>	konvektiv
<i>D</i>	diffusiv
<i>n</i>	Zeitpunkt
+	positive Richtung
–	negative Richtung
~	Wechselgröße
–	Gleichgröße bzw. gemittelter Wert
·	Fluss bzw. zeitliche Ableitung
^	Scheitelwerte

## Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
<i>CRB</i>	klassische charakteristische Randbedingung
<i>CV</i>	Charakteristikenverfahren
<i>DGL</i>	Differentialgleichung
<i>DGLS</i>	Differentialgleichungssystem
<i>FD</i>	Finite Differenzen
<i>FG</i>	Fachgebiet
<i>FV</i>	Finite Volumen
<i>GMW</i>	gleitender Mittelwert
<i>LODI</i>	local onedimensional inviscid



<i>LRT</i>	lineare Relaxationsterme
<i>LTI</i>	linear time invariant
<i>nrRB</i>	nicht-reflektierende Randbedingung
<i>PML</i>	perfectly matched layer
<i>RB</i>	Randbedingung
<i>RdE</i>	Rückkopplung durch Zellzentren und Extrapolation
<i>RdF</i>	Rückkopplung durch Flüsse
$\Re$	Realteil einer komplexen Funktion
<i>TP</i>	Tiefpassfilter
<i>1D</i>	eindimensional
<i>3D</i>	dreidimensional

# 1. Einleitung

Die Anforderungen an Fluidenergiemaschinen hinsichtlich Effizienz und Flexibilität nehmen aus ökologischen und ökonomischen Gründen kontinuierlich zu. Viele Maßnahmen zur Effizienzsteigerung von Strömungs- wie auch Verdrängermaschinen - bspw. geringere Spalte - führen jedoch tendenziell zu einer Erhöhung der Pulsationsanregung dieser Maschinen. Ebenso werden üblicherweise stärkere Pulsationen angeregt, wenn eine Fluidenergiemaschine nicht im Auslegungspunkt betrieben wird. Durch instationäre Wechselwirkungen mit angeschlossenen Anlagen können angeregte Pulsationen um ein Vielfaches verstärkt werden. Daraus resultieren anlagenseitig erhöhte Schallemissionen aufgrund erhöhter Rohrleitungsschwingungen. Diese können zu einer Beeinträchtigung bis hin zu einer Schädigung der Anlage führen. Gleichzeitig können erhöhte Pulsationen zu Störungen in der Prozessfassung - bspw. von Gasmengengeräten - führen. Instationäre Wechselwirkungen von Maschinen und Anlagen können aber insbesondere auch Rückwirkungen auf die Maschine selbst ausüben. Teilweise werden diese bewusst ausgenutzt, wie bspw. bei Resonanzaufladung von Motoren. Im Allgemeinen sind derartige Rückwirkungen auf die Maschine jedoch störend, da sie zu unerwünschtem oder unerwartetem Maschinenverhalten bis hin zu Instabilitäten des Gesamtsystems führen können.

Aufgrund der bestehenden Notwendigkeit von Effizienz- und Flexibilitätssteigerungen und den daraus resultierenden erläuterten Problemen leitet sich der Bedarf ab, sowohl die Pulsationsanregung bestehender oder neu entwickelter Maschinen als auch insbesondere die instationären Wechselwirkungen zwischen Maschinen und Anlagen in einem möglichst frühen Entwicklungsstadium einer Maschine oder Anlage zuverlässig vorherzusagen. Die numerische Strömungssimulation ist aufgrund der stetig zunehmenden Verlässlichkeit und Abbildungsgüte numerischer Methoden bei gleichzeitig kontinuierlicher Zunahme von Rechenkapazitäten ein geeignetes Mittel. Gegenüber der experimentellen Untersuchung von Prototypen, zeichnen sich numerische Simulationen durch zeit- und kostengünstige Durchführung aus. Insbesondere bei großen und aufwändigen Maschinen oder komplexen Anlagen ist eine Erprobung von Prototypen mit vertretbarem Aufwand nicht oder kaum möglich.

Auch vor dem Hintergrund der hohen heutigen verfügbaren Rechenressourcen ist bei numerischen Simulationen die rechentechnische Effizienz eine wichtige Komponente. So lassen sich Fluidenergiemaschinen in Anlagen üblicherweise nicht mit vertretbarem Aufwand mit einem vollständig dreidimensionalen Modell simulieren. Ein - in der Literatur verfügbarer - Ansatz besteht darin, die Maschine - und damit die pulsationsanregenden Mechanismen - mit einem detaillierten dreidimensionalen Modell abzubilden, während die Anlage mit einem reduzierten eindimensionalen Modell dargestellt wird.

Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen mit dem Ziel, eine ganzheitliche Methode zur Simulation von Fluidenergiemaschinen und Anlagen unter vollständiger Erfassung der instati-

onären Wechselwirkungen zu entwickeln. Dies umfasst eine nichtreflektierende Kopplungsbedingung zwischen detaillierten dreidimensionalen und reduzierten eindimensionalen numerischen Domains sowie eine nichtreflektierende Randbedingung für numerische Domains.

Gegenüber bisher vorhandenen Ansätzen zur Kopplung multidimensionaler Domains soll die neu entwickelte Kopplungsmethode die Entstehung von numerisch induzierten Reflexionen an der Grenzfläche unterschiedlicher numerischer Domains anhand der ursächlichen Mechanismen vermeiden bzw. minimieren. Daher werden zunächst möglichst allgemeingültige Einflussparameter auf Reflexionen an einer Kopplungsstelle erarbeitet. Die darauf aufbauende Methode soll zudem derart allgemein formuliert sein, dass sie auf beliebige numerische Schemata anwendbar ist. Die zu entwickelnde nichtreflektierende Randbedingung soll minimale Reflexionen bei gleichzeitiger Vorgabe der mittleren Strömungsgrößen am Rand einer numerischen Domain ermöglichen. Diese Anforderung ergibt sich aus der Tatsache, dass eine numerische Domain räumlich begrenzt ist und an den Grenzen Randbedingungen vorgegeben werden müssen. Aufgrund der reflektierenden Eigenschaften von Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen ist eine nichtreflektierende Randbedingung erforderlich, um numerisch induzierte Reflexionen an den Grenzen numerischer Domains zu vermeiden. Die Notwendigkeit bei bisherigen Ansätzen nichtreflektierender Randbedingungen, einen Kompromiss zwischen geringen Reflexionen und einer genauen Vorgabe gemittelter Größen zu treffen, soll möglichst vermieden werden, so dass beide Anforderungen erfüllt werden.

## 2. Grundlagen

Im nachfolgenden Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen der Strömungsmechanik dargelegt. Zunächst werden die vollständigen strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen präsentiert und erläutert. Anschließend werden die in der Akustik üblichen vereinfachenden Annahmen sowie exakte Elementarlösungen der akustischen Grundgleichungen vorgestellt. Des Weiteren werden elementare Zusammenhänge der spektralen Analyse numerischer Ansätze zur approximativen Lösung der vollständigen Erhaltungsgleichungen vorgestellt.

### 2.1. Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik sind Erhaltungsgleichungen. Die Erhaltungsgrößen sind die Masse  $m$ , der (vektorielle) Impuls  $\vec{I}$  sowie die Energie  $E$ . Zunächst wird die integrale Form der Erhaltungsgleichungen in Euler'scher Betrachtungsweise dargelegt.

Die integrale Massenbilanz für ein beliebiges, ortsfestes Kontrollvolumen  $V$  ergibt sich zu

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{c} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.1)$$

Der Term auf der linken Seite beschreibt die zeitliche Änderung der Masse in dem betrachteten Kontrollvolumen. Da Massequellen nicht existieren und Massetransport im Kontinuumsbereich ausschließlich konvektiv stattfindet, befindet sich auf der rechten Seite lediglich ein Term, welcher die konvektiven Massenflüsse über die Grenzfläche  $S$  des Kontrollvolumens  $V$  umfasst. [Hir07]

Ein mit Strömungsgeschwindigkeit transportierter Impuls stellt einen konvektiven Impulstransport dar. Nach Newton sind Impulsquellen als Kräfte aufzufassen, die sich wiederum in interne und externe Kräfte unterscheiden lassen. Interne Kräfte heben sich innerhalb eines Kontrollvolumens gegenseitig auf, so dass Impulsquellen durch den Spannungszustand auf der Oberfläche definiert werden. Die Oberflächenkräfte ergeben sich aus dem hydrostatischen Druck  $p$  sowie dem Spannungstensor  $\mathcal{T}$ , der Normal- und Schubspannungen enthält. Der durch Schubspannungen hervorgerufene Transport von Impuls quer zur Strömungsrichtung lässt sich dabei als Impulsdiffusion auffassen. Die externen Kräfte (oder Volumenkräfte)  $\vec{F}_V$ , wie beispielsweise die Gravitationskraft, wirken im gesamten Volumen und werden daher über das Kontrollvolumen integriert. Somit wird die integrale Impulserhaltung beschrieben durch [Hir07]

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{c} dV = - \oint_S \rho \vec{c} (\vec{c} \cdot \vec{n}) dS - \oint_S p \cdot \vec{n} dS + \oint_S \mathcal{T} \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{F}_V dV \quad (2.2)$$

Energie kann sowohl konvektiv als auch diffusiv transportiert werden. Konvektiver Energiefluss repräsentiert mit dem Fluid transportierte Energie, diffusiver Energiefluss entspricht Wärmeleitung und

tritt (in Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit  $k$ ) auf, falls ein räumlicher Temperaturgradient  $\vec{\nabla}T$  existiert. Da Kräfte in Verbindung mit räumlicher Verschiebung Arbeit verrichten, treten diese als Quellen in der Energierhaltung auf. Unter zusätzlicher Berücksichtigung potentieller Wärmequellen  $\dot{q}$  ergibt sich die Energieerhaltung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e_t dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( u + \frac{\vec{c}^2}{2} \right) dV \\ &= - \oint_S \rho e_t \vec{c} \cdot \vec{n} dS + \oint_S k \vec{\nabla}T \cdot \vec{n} dS + \oint_S (-p \cdot \vec{c} + \mathcal{T} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{F}_V \cdot \vec{c} dV + \int_V \dot{q} dV \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die spezifische Gesamtenergie  $e_t$  lässt sich dabei als Summe aus innerer Energie  $u$  und kinetischer Energie  $\frac{\vec{c}^2}{2}$  ausdrücken.

Mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes lassen sich die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale überführen. Für ein infinitesimal kleines Volumen lässt sich somit die lokale, differentielle Form der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie formulieren [Hir07]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{c} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{c}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{c}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{c} \otimes \vec{c} + pI - \mathcal{T}) = \vec{F}_V \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + (\vec{c} \cdot \vec{\nabla}) \rho u = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{c}) + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla}T) + \epsilon_v + \dot{q} \quad (2.6)$$

In Gl. (2.5) steht das  $I$  für den Einheitstensor. Die Energiegleichung ist in Form der inneren Energie aufgeführt. Der Term  $\epsilon_v$  repräsentiert dabei Dissipation infolge von Reibung.

Um das Gleichungssystem der Erhaltungsgleichungen zu schließen, werden zwei weitere Gleichungen benötigt. Für ideale Gase eignet sich dazu beispielsweise die thermische Zustandsgleichung idealer Gase

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (2.7)$$

sowie die kalorische Zustandsgleichung für ideale Gase

$$du = c_v \cdot dT. \quad (2.8)$$

Dabei steht  $R$  für die spezifische Gaskonstante und  $c_v$  für die isochore Wärmekapazität des betrachteten Gases.

## 2.2. Ebene Wellentheorie

In vielen Teilbereichen der Strömungsmechanik werden vereinfachte Gleichungssysteme betrachtet, wenn einige Effekte dominant und andere Effekte vernachlässigbar sind oder mit Modelltermen abgebildet werden können. Dadurch können in vielen Fällen mit analytischen Mitteln ausreichende Näherungslösungen für gegebene Probleme gefunden werden. In der Akustik kann oft-

mals von einem ebenen Wellenfeld (bspw. Rohrleitung, Fernfeld) ausgegangen werden. Somit lassen sich die Erhaltungsgleichungen auf eine räumliche Dimension reduzieren und ergeben sich unter Vernachlässigung von Volumenkräften, externer Wärmezufuhr bzw. -abfuhr sowie Wärmeleitung zu

$$\text{Masse} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{Impuls} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \quad (2.10)$$

$$\text{Energie} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial c}{\partial x} = -f_x c \quad (2.11)$$

Dabei sind sämtliche viskosen Kräfte unter dem Term  $f_x$  zusammengefasst.

### 2.2.1. Lineare Wellenausbreitung

Im Rahmen der linearen Akustik werden diffusive Effekte (Wärmeleitung und viskose Reibung) üblicherweise vernachlässigt. Weiterhin werden die Zustandsgrößen  $p$ ,  $\rho$  und  $c$  in die Gleichanteile  $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$  und  $\bar{c}$  sowie die veränderlichen Schallfeldgrößen Schalldruck  $\tilde{p}$ , Wechseldichte  $\tilde{\rho}$  und Schallschnelle  $\tilde{c}$  aufgeteilt.

#### Ruhendes Fluid ohne Reibung

Unter der Annahme, dass bei akustischen Vorgängen der Gleichanteil deutlich größer als die Wechseldichte ( $\bar{\rho} \gg \tilde{\rho}$ ) sowie die konvektive Beschleunigung klein gegenüber der lokalen Beschleunigung ist ( $c \frac{\partial c}{\partial x} \ll \frac{\partial c}{\partial t}$ ), ergeben sich aus der differentiellen Form der Massen- und Impulserhaltung Gl. (2.9-2.10) die linearen Euler-Gleichungen, die die Grundlage der linearen Wellentheorie bilden: [MGL04, MN79]

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

Diese Gleichungen sind gültig für kleine Schwankungen. Der qualitative Terminus *kleine Schwankungen* ist nicht eindeutig definiert. Als Richtwert wird in der Literatur beispielsweise ein Schalldruckpegel von  $L_p = 140 \text{ dB}$ <sup>1</sup> angegeben, was einem Effektivwert der Druckschwankung von  $p_{eff} = 200 \text{ Pa}$  entspricht. [LSW09, MN79]

Akustische Vorgänge werden zudem als isentrop angenommen, so dass die Energiegleichung durch die Isentropengleichung

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Das in der Akustik verbreitete Pegelmaß  $L_p$  transformiert Druckschwankungen in den logarithmischen Bereich:

$$L_p = 20 \log \left( \frac{p_{eff}}{p_0} \right) \text{ mit } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa [MN79]}$$

ersetzt werden kann [MN79].

Der nichtlineare Zusammenhang zwischen Druck und Dichte kann für kleine Störungen in Form einer Taylor-Reihe approximiert werden und ergibt sich in Form von Gleich- und Wechselgrößen zu

$$\tilde{p} = p - \bar{p} = \bar{\rho} \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{(\rho=\bar{\rho})} \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \left. \frac{d^2p}{d\rho^2} \right|_{(\rho=\bar{\rho})} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 + \dots \quad (2.15)$$

Der Koeffizient beim linearen Glied wird als Kompressionsmodul  $K$  bezeichnet:

$$K = \bar{\rho} \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{(\rho=\bar{\rho})} \quad (2.16)$$

Der entsprechende Koeffizient beim Glied 2. Ordnung wird nichtlineares Modul  $B$  genannt:

$$B = \bar{\rho}^2 \left. \frac{d^2p}{d\rho^2} \right|_{(\rho=\bar{\rho})} \quad (2.17)$$

Für den isentropen Fall gilt  $K_s = \kappa \bar{p}$  und  $B_s = \kappa(\kappa - 1)\bar{p}$ . [Šut84]

Die Schallgeschwindigkeit  $a$  ist diejenige Geschwindigkeit, mit der sich Störungen in einem Fluid ausbreiten und gegeben durch [MGL04]:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2.18)$$

Unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung Gl. (2.15) ergibt sich die lineare Schallgeschwindigkeit unter Verwendung von Gl. (2.14) zu

$$a_0 = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\bar{\rho}}} = \sqrt{\frac{K_s}{\bar{\rho}}} = \sqrt{\kappa \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}} \text{ mit } K_s = \kappa \bar{p}. \quad (2.19)$$

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung (Gl. (2.7)) ergibt sich ein nur von der Temperatur  $T$  abhängiger Ausdruck für die lineare Schallgeschwindigkeit:

$$a_0 = \sqrt{\kappa R T} \quad (2.20)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.19) in die linearisierte Kontinuitätsgleichung Gl. (2.12) können die linearisierten Eulergleichungen Gl. (2.12-2.13) durch die primitiven Wechselgrößen  $\tilde{p}$  und  $\tilde{c}$  ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \bar{\rho} a_0^2 \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Ein Lösungsansatz für die Schallfeldgrößen einer ebenen, durchlaufenden, harmonischen Welle ist

$$p(x, t) = \Re \left( \underline{\hat{p}} \cdot e^{j\omega \left( t - \frac{x}{a_0} \right)} \right) \quad (2.23)$$

$$c(x, t) = \Re \left( \underline{\hat{c}} \cdot e^{j\omega \left( t - \frac{x}{a_0} \right)} \right). \quad (2.24)$$

Eine Elementarlösung des Gleichungssystems Gl. (2.21-2.22) für harmonische Schwingungen lautet [MGL04]

$$p(x, t) = \Re \left( \underline{\hat{f}} \cdot e^{j(\omega t - kx)} + \underline{\hat{g}} \cdot e^{j(\omega t + kx)} \right) \quad (2.25)$$

$$c(x, t) = \frac{1}{Z_0} \Re \left( \underline{\hat{f}} \cdot e^{j(\omega t - kx)} - \underline{\hat{g}} \cdot e^{j(\omega t + kx)} \right) \quad (2.26)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Wellenzahl  $k = \frac{\omega}{a_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$  sowie der spezifischen Schallkennimpedanz  $Z_0 = \bar{\rho}a_0$ . Die komplexen Amplituden  $\underline{\hat{f}}$  und  $\underline{\hat{g}}$  werden als Riemann-Invarianten bezeichnet und können als Schallwelle in positive bzw. negative Ausbreitungsrichtung aufgefasst werden. Die Riemann-Invarianten stehen in folgender Beziehung zu den primitiven Variablen  $p$  und  $c$  [MGL04]:

$$\underline{\hat{f}} = \frac{1}{2} (\underline{\hat{p}} + Z_0 \cdot \underline{\hat{c}}) \quad (2.27)$$

$$\underline{\hat{g}} = \frac{1}{2} (\underline{\hat{p}} - Z_0 \cdot \underline{\hat{c}}) \quad (2.28)$$

Für den allgemeinen Fall mehrerer Harmonischer wird der Druck  $p$  als Überlagerung von Amplituden sämtlicher auftretender Kreisfrequenzen  $\omega_i$  ausgedrückt:

$$p(x, t) = \sum_i \Re \left( \underline{\hat{f}} \cdot e^{j(\omega_i t - k_i x)} + \underline{\hat{g}} \cdot e^{j(\omega_i t + k_i x)} \right) \quad (2.29)$$

Da bei linearen Systemen das Superpositionsprinzip gilt, kann durch Gl. (2.29) jedes beliebige lineare, ebene Wellenfeld beschrieben werden [MGL04].

### Strömendes Fluid ohne Reibung

Im Fall einer nicht vernachlässigbaren Gleichströmungsgeschwindigkeit  $\bar{c}$  breitet sich der Schall relativ zur Grundströmung des Fluids aus. In den Erhaltungsgleichungen Gl. (2.21-2.22) wird daher anstatt des lokalen Differentials das totale Differential berücksichtigt:

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} + \bar{\rho}a_0^2 \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0 \quad (2.31)$$

Dabei gilt unter der Annahme  $\tilde{c} \ll \bar{c}$  vereinfachend:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.32)$$

Der Schall breitet sich im ortsfesten Bezugssystem mit einer richtungsabhängigen effektiven Schallgeschwindigkeit aus. In Strömungsrichtung beträgt die effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$a_{0,eff}^+ = a_0 + \bar{c} = a_0 \cdot (1 + \overline{Ma}) \quad (2.33)$$

und entgegen der Strömungsrichtung

$$a_{0,eff}^- = a_0 - \bar{c} = a_0 \cdot (1 - \overline{Ma}) . \quad (2.34)$$



Die Mach-Zahl  $\overline{Ma}$  ist dabei definiert als das Verhältnis der Gleichströmungsgeschwindigkeit  $\bar{c}$  und der linearen Schallgeschwindigkeit  $a_0$ :

$$\overline{Ma} = \frac{\bar{c}}{a_0} . \quad (2.35)$$

Entsprechend ergeben sich unterschiedliche Wellenzahlen für eine in positive bzw. in negative Koordinatenrichtung laufende Welle:

$$k^+ = \frac{\omega}{a_0 \cdot (1 + \overline{Ma})} \quad (2.36)$$

$$k^- = \frac{\omega}{a_0 \cdot (1 - \overline{Ma})} \quad (2.37)$$

Die allgemeine Lösung bei linearer Wellenausbreitung Gl. (2.29) erweitert sich unter Berücksichtigung einer mittleren Strömung zu [LSW09]

$$p(x, t) = \sum_i \Re \left( \hat{f} \cdot e^{j(\omega_i t - k_i^+ x)} + \hat{g} \cdot e^{j(\omega_i t + k_i^- x)} \right) . \quad (2.38)$$

### Ruhendes Fluid mit Reibung

Wird viskose Reibung bei linearer Wellenausbreitung berücksichtigt, so erweitert sich die linearisierte Impulsgleichung Gl. (2.22) um einen Reibungsterm  $R \left( = -\frac{f_x}{c} \right)$  zu [MN79]:

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + R c = 0 \quad (2.39)$$

Bei Berücksichtigung von Reibung wird die Wellenzahl komplex und ist definiert durch

$$\underline{k} = \beta - j\alpha . \quad (2.40)$$

Dabei ist  $\beta$  die Phasenkonstante und  $\alpha$  die Dämpfungskonstante, die in folgendem Zusammenhang zu dem Reibungsterm  $R$  stehen [MI86]:

$$\alpha = k \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{R}{\rho\omega} \right)^2} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

$$\beta = k \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{R}{\rho\omega} \right)^2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

In Form des Reibungsterms  $R$  lässt sich die komplexe Wellenzahl  $\underline{k}$  beschreiben durch [MN79]:

$$\underline{k} = k \left( 1 - j \frac{R}{\omega\bar{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

Ist der Quotient  $\frac{R}{\omega\bar{\rho}} \ll 1$ , so ergibt sich näherungsweise [MN79]:

$$\underline{k} \approx k - j \frac{kR}{2\omega\bar{\rho}} = k - j \frac{R}{2\bar{\rho}a_0} = \beta - j\alpha \quad (2.44)$$

Es wird deutlich, dass für kleine Viskositäten der Imaginärteil zu null tendiert und die komplexe Wellenzahl  $\underline{k}$  gegen die reelle Wellenzahl  $k$  läuft. Die entsprechende Lösung eines Wellenfeldes mit Dämpfung ergibt sich zu

$$p(x, t) = \sum_i \Re \left( \underline{\hat{f}} \cdot e^{j(\omega_i t - \beta_i x) - \alpha_i x} + \underline{\hat{g}} \cdot e^{j(\omega_i t + \beta_i x) + \alpha_i x} \right). \quad (2.45)$$

### Strömendes Fluid mit Reibung

Für den Fall einer nicht vernachlässigbaren Gleichströmung und gleichzeitiger Berücksichtigung viskoser Reibung, lassen sich die richtungsabhängigen Kreiswellenzahlen  $k^+$  bzw.  $k^-$  nach Gl. (2.36-2.37) in Gl. (2.41-2.42) einsetzen, so dass sich durch Berücksichtigung der Gleichströmung richtungsabhängige Phasen- und Dämpfungskonstanten ergeben:

$$\alpha^\pm = k^\pm \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{R}{\bar{\rho}\omega} \right)^2} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.46)$$

$$\beta^\pm = k^\pm \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{R}{\bar{\rho}\omega} \right)^2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

Die Lösung eines linearen Wellenfeldes mit Strömung und viskoser Reibung lässt sich entsprechend durch folgenden Ansatz ausdrücken:

$$p(x, t) = \sum_i \Re \left( \underline{\hat{f}} \cdot e^{j(\omega_i t - \beta_i^+ x) - \alpha_i^+ x} + \underline{\hat{g}} \cdot e^{j(\omega_i t + \beta_i^- x) + \alpha_i^- x} \right) \quad (2.48)$$

Durch die konstante Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $a_0$  ergibt sich eine wichtige Eigenschaft linearer Systeme: In linearen Systemen treten immer nur diejenigen Frequenzen auf, mit denen das System angeregt wird. Lineare Systeme, deren akustische Eigenschaften ebenfalls unveränderlich mit der Zeit sind, werden linear zeitinvariant, oder kurz LTI-Systeme (*engl. : linear time invariant*) genannt. LTI-Systeme stellen stets ein approximatives Modell technischer Systeme dar, haben jedoch den Vorteil, dass sich Zustände (in Raum und Zeit) innerhalb eines Systems in der Regel analytisch bestimmen lassen, vorausgesetzt, das System ist eingeschwungen und die Randbedingungen sind bekannt. [Mey11]

#### 2.2.2. Nichtlineare Wellenausbreitung

Die zuvor dargestellten Lösungen der linearen Euler-Gleichungen sind für unendlich kleine Störungen mathematisch exakt. Im ingenieurtechnischen Sinne werden diese Lösungen als ausreichend genau für kleine Schwingungsamplituden angesehen. Zur exakten Beschreibung ebener Wellenausbreitung sind hingegen die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen Gl. (2.9-2.10) zu verwenden. Diese sind im Allgemeinen nicht analytisch lösbar.

Der Einfluss von Nichtlinearitäten kann durch eine Abschätzung der nichtlinearen Glieder verdeutlicht werden. Dazu werden die nichtlinearen Differentiale der Erhaltungsgrößen  $\rho$  aus der Kontinuitätsbeziehung und der Größe  $c$  aus der Impulsgleichung unter Annahme eines harmonischen Verlaufs

$$\left| \tilde{c} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right|_{max} = \frac{\omega \hat{c} \hat{\rho}}{a_0} \quad \text{bzw.} \quad \left| \tilde{c} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} \right|_{max} = \frac{\omega \hat{c}^2}{a_0}$$

in Bezug zu den linearen Differentialen der jeweiligen Erhaltungsgrößen

$$\left| \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|_{max} = \omega \hat{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} \right|_{max} = \omega \hat{c}$$

gesetzt. Es wird deutlich, dass das Verhältnis für beide Gleichungen zu dem selben Ergebnis führt. Das Verhältnis der Schnelleamplitude zur Schallgeschwindigkeit wird als akustische Machzahl bezeichnet:

$$Ma_{ak} = \frac{\hat{c}}{a_0} \quad (2.49)$$

Das quadratische Glied der Taylor-Entwicklung der Zustandsgleichung Gl. (2.15) hat im Verhältnis zum linearen dieselbe Größenordnung [Šut84]. Somit ist in allen drei Gleichungen das Verhältnis des nichtlinearen zum linearen Term bzw. des quadratischen zum linearen Term durch die akustische Machzahl gegeben, die den nichtlinearen Charakter sich ausbreitender Wellen quantifiziert.

Für den Sonderfall einer ebenen, reibungsfreien, durchlaufenden Welle (ohne Reflexionen) ist eine exakte Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.51)$$

unter Annahme eines rein harmonischen Verlaufs gegeben durch [Šut84]:

$$c(x, t) = \Re \left( \hat{c} \cdot e^{j\omega \left( t - \frac{x}{a+c} \right)} \right) \quad (2.52)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich gegenüber demjenigen unendlich kleiner Amplituden Gl. (2.24) lediglich in der resultierenden Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$a_{nl} = a + c(x, t) \quad (2.53)$$

Die resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit bei nichtlinearer Wellenausbreitung  $a_{nl}$  setzt sich aus der Schallgeschwindigkeit  $a$  sowie der lokalen Geschwindigkeit  $c$  zusammen. Im nichtlinearen Fall wird in der Taylor-Approximation der Zustandsgleichung Gl. (2.15) das quadratische Glied ebenfalls berücksichtigt, so dass gilt:

$$\tilde{p} = K \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{B}{2} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 \quad (2.54)$$

Mit dieser Näherung zweiter Ordnung wird die Schallgeschwindigkeit  $a$  nach Gl. (2.18) approximiert durch [Šut84]

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \approx \left( \frac{K}{\bar{\rho}} + \frac{B}{\bar{\rho}} \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \approx a_0 \left( 1 + \frac{B}{2K} \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} \right) = a_0 + \frac{B}{2K} \cdot \tilde{c} \quad (2.55)$$

und ist somit neben der veränderlichen Größe  $\tilde{c}$  von dem Nichtlinearitätsparameter  $B/K$  abhängig. Im letzten Umformungsschritt wurden Gl. (2.15) (nach dem linearen Glied abgebrochen), Gl. (2.19) sowie der Zusammenhang zwischen den Schallfeldgrößen  $\tilde{p} = \bar{\rho} a_0 \tilde{c}$  verwendet. Für isentrope Zustandsänderungen idealer Gase ergibt sich der Nichtlinearitätsparameter zu

$$\frac{B}{K} = \kappa - 1 = \frac{c_p}{c_v} - 1 \quad (2.56)$$

Für Luft ergibt sich mit  $\kappa = 1,4$  ein Nichtlinearitätsparameter von  $B/K = 0,4$ . Die resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit lässt sich schließlich ausdrücken durch [Šut84]

$$a_{nl} = a_0 + \underbrace{\frac{B}{2K}}_{\approx a} \cdot \tilde{c} + \tilde{c} = a_0 + \epsilon_0 \cdot \tilde{c}(x, t), \quad (2.57)$$

wobei der Nichtlinearitätskoeffizient

$$\epsilon_0 = \frac{B}{2K} + 1 \quad (2.58)$$

die Nichtlinearität eines Mediums charakterisiert [Šut84].

Somit lässt sich die Lösung für den Sonderfall einer nichtlinearen, ebenen, durchlaufenden Welle ausdrücken als:

$$c(x, t) = \Re \left( \hat{c} \cdot e \left( j\omega \left( t - \frac{x}{a_0 + \epsilon_0 \tilde{c}(x, t)} \right) \right) \right) \quad (2.59)$$

Die Welle hat also eine phasenabhängige<sup>1</sup> Ausbreitungsgeschwindigkeit, die für die positive Halbwelle größer und für die negative Halbwelle kleiner ist als die lineare Schallgeschwindigkeit  $a_0$ . Dadurch wird die Welle entlang ihrer Ausbreitung verzerrt.

In **Abb. 2.1** ist der Verlauf der Schallschnelle einer ebenen, nichtlinearen Welle über dem Ort  $x$  bzw. der Zeit  $t$  für feste charakteristische Zeit- bzw. Ortspunkte dargestellt. Gleiches gilt äquivalent für den Schalldruck. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  bzw. am Ort  $x = 0$  wird als Randbedingung eine harmonische Welle vorgegeben. Diejenige Entfernung von der harmonischen Quelle, bei der die Wellenfront gerade unendlich steil wird, wird als Schockformationsabstand  $x_s$  bezeichnet. Aus den Bedingungen

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_s} = \infty \quad \text{sowie} \\ \left. \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right|_{x=x_s} = 0$$

<sup>1</sup>Bei periodischen Vorgängen, wie beispielsweise harmonischer Wellenausbreitung, wird die räumliche bzw. zeitliche Lage innerhalb einer Periode durch den Phasenwinkel  $\varphi$  beschrieben. Da eine Periode stets  $360^\circ$  bzw.  $2\pi$  entspricht, gilt für den Phasenwinkel:  $0 \leq \varphi < 360^\circ$  bzw.  $0 \leq \varphi < 2\pi$

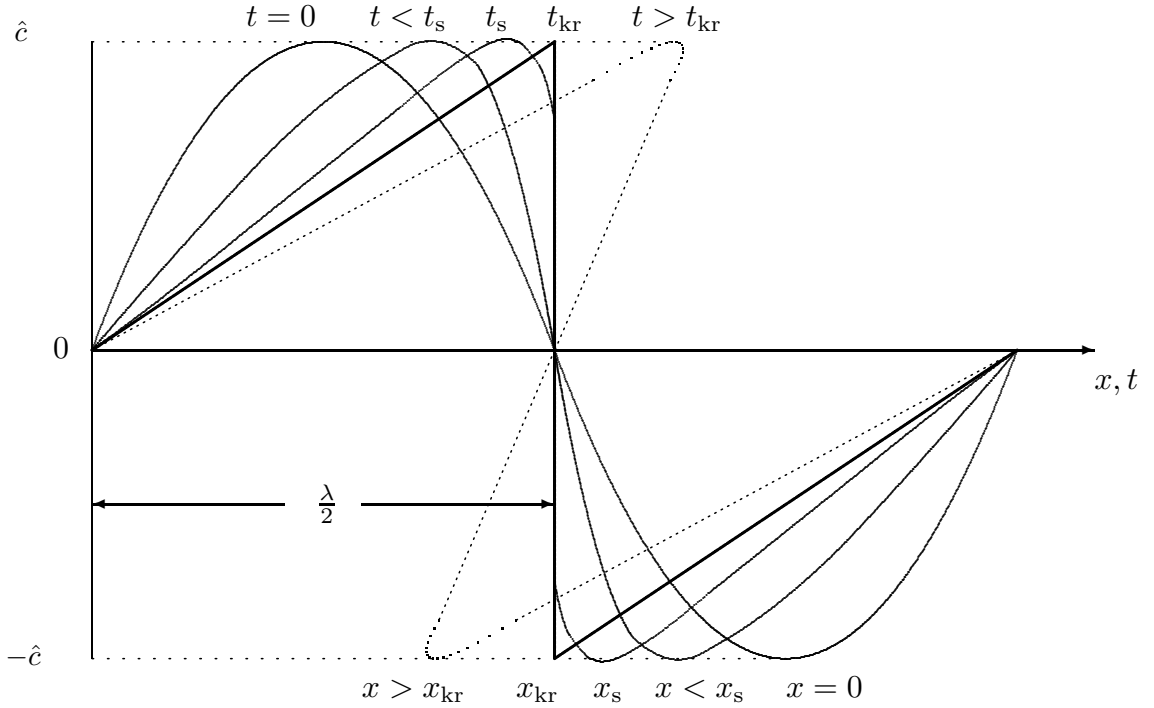


Abbildung 2.1.: Wellenaufteilung bei nichtlinearer Wellenausbreitung aus [LSW09]

ergibt sich durch Differentiation von Gl. (2.59) für den Schockformationsabstand:

$$x_s = \frac{a_0^2}{\epsilon_0 \omega \hat{c}} = \frac{a_0 \lambda}{2\pi \epsilon_0 \hat{c}} = \frac{1}{\epsilon_0 M a_{ak} k} \quad (2.60)$$

In einem realen, viskosen Medium verhindern viskose Effekte im Bereich von  $x_s$  eine weitere Verzerrung der Welle. Der theoretische Punkt

$$x_{kr} = a_0 \cdot t_{kr} = \frac{a_0 \lambda}{4\epsilon_0 \hat{c}}, \quad (2.61)$$

an dem die Welle eine Sägezahnform annimmt und der Wellenberg damit das Wellental einholt, wird kritische Entfernung genannt. Wird die kritische Entfernung durch Bezug auf die Wellenlänge  $\lambda = \frac{a_0}{f}$  bzw. die Periodendauer  $T = \frac{1}{f}$  entdimensioniert, so erhält man die dimensionslose kritische Entfernung:

$$N_{kr} = \frac{x_{kr}}{\lambda} = \frac{t_{kr}}{T} = \frac{a_0}{4\epsilon_0 \hat{c}} \quad (2.62)$$

Wird weiterhin die Grenzverzerrung bei einem Sägezahn als 1 definiert, so folgt der Verzerrungsgrad pro Wellenlänge  $\Delta$  zu:

$$\Delta = \frac{1}{N_{kr}} = 4\epsilon_0 \frac{\hat{c}}{a_0} = 4\epsilon_0 M a_{ak} \quad (2.63)$$

Spektral betrachtet führt die Wellenaufteilung zur Bildung von Höherharmonischen bei gleichzeitiger Abnahme der Amplitude der Grundharmonischen. Eine Fourier-Transformation von Gl. (2.59) führt zu [Šut84]

$$c(x, t) = \hat{c} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n(\omega t - kx)} \quad \text{für } x < x_s \quad (2.64)$$

$$B_n = \frac{2}{n \frac{x}{x_s}} J_n \left( n \frac{x}{x_s} \right). \quad (2.65)$$

Dabei ist  $J_n$  die Bessel-Funktion erster Art und  $n$ -ter Ordnung. Die Ortsabhängigkeit der Koeffizienten  $B_n$  resultiert in der Amplitudenabnahme der ersten Harmonischen und Zunahme der Höherharmonischen.

Zur dimensionslosen Beschreibung der ortsabhängigen Amplituden wird das Amplitudenverhältnis  $\Lambda$  eingeführt:

$$\Lambda_c = \frac{\hat{c}(x)}{\hat{c}(x=0)} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_p = \frac{\hat{p}(x)}{\hat{p}(x=0)} \quad (2.66)$$

Weiterhin wird der dimensionslose Abstand von der Anregung  $\sigma$  definiert

$$\sigma = \frac{x}{x_s} = \epsilon_0 M a_{ak} k x, \quad (2.67)$$

mit Hilfe dessen sich der Amplitudenverlauf für Grund- und Oberschwingungen bei nichtlinearer Wellenausbreitung allgemeingültig darstellen lässt.

In **Abb. 2.2** ist der Verlauf der Amplitudenverhältnisse  $\Lambda_c$  bzw.  $\Lambda_p$  der Grundharmonischen  $f_0$  sowie der ersten drei Höherharmonischen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  als Funktional des dimensionslosen Abstands  $\sigma$  dargestellt. Sowohl die Abnahme der Amplitude der Grundharmonischen als auch die Entstehung der Höherharmonischen ist deutlich zu erkennen. Die Amplitudenzunahme der Höherharmonischen ist dabei umso höher, je niedriger die Ordnung.

Für Betrachtungen nichtlinearer Wellenausbreitung mit überlagerter Gleichströmung ist bei dem dimensionslosen Abstand von der Anregung  $\sigma$  die Gleichströmung in Form der Machzahl zu berücksichtigen (vgl. Gl. (2.36)):

$$\sigma = \frac{x}{x_s} = \epsilon_0 M a_{ak} k^+ x \quad \text{für } \bar{c} > 0 \quad (2.68)$$

$$\sigma = \frac{x}{x_s} = \epsilon_0 M a_{ak} k^- x \quad \text{für } \bar{c} < 0 \quad (2.69)$$

Zur Charakterisierung einer ebenen Welle wird häufig der Grundschwingungsgehalt  $G$  verwendet, der definiert ist durch [Stö00]:

$$G = \frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_{ges}} = \frac{\hat{p}_0}{\sqrt{\hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2 + \dots}} = \frac{\hat{p}_0}{\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \hat{p}_i^2}} \quad (2.70)$$

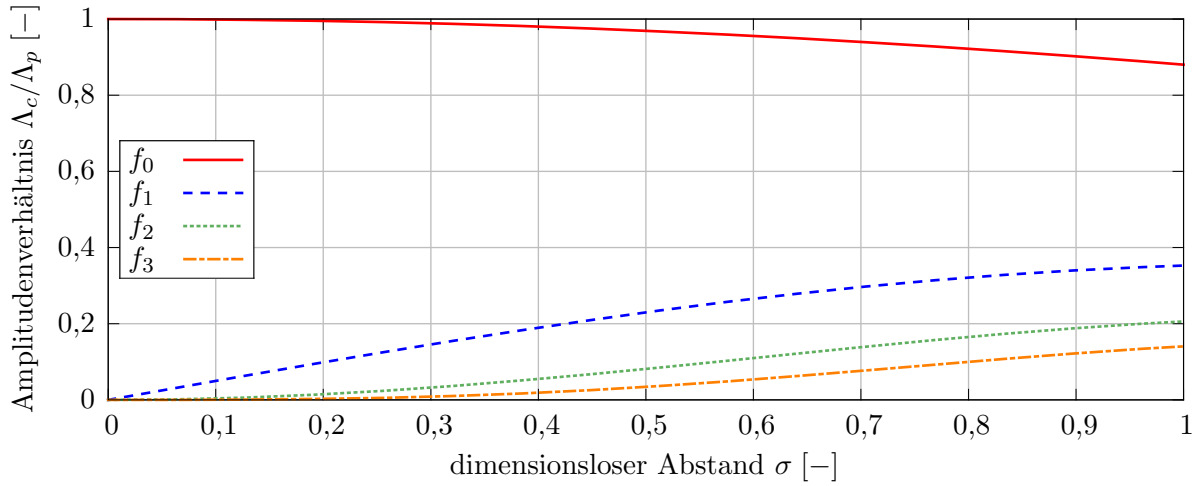


Abbildung 2.2.: Amplitudenverlauf von Grundharmonischer  $f_0$  und Oberschwingungen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3$  bei nichtlinearer Wellenausbreitung

### 2.2.3. Reflexion ebener Wellen

Die Wellenausbreitungseigenschaften eines leitenden Mediums werden durch die spezifische Schallimpedanz  $\underline{Z}_S$  charakterisiert. Diese im allgemeinen komplexe Größe ist definiert als das Verhältnis einer komplexen Druckamplitude  $\hat{p}$  und der entsprechenden Schnelleamplitude  $\hat{c}$  [MN79]:

$$\underline{Z}_S = \frac{\hat{p}}{\hat{c}} = \frac{\hat{p} \cdot e^{j\varphi_p}}{\hat{c} \cdot e^{j\varphi_c}} \quad (2.71)$$

Die bereits eingeführte Schallkennimpedanz  $Z_0$  ist ein Spezialfall der spezifischen Schallimpedanz für ungedämpfte Wellenausbreitung. Für den allgemeinen Fall, unter Berücksichtigung von Dämpfungseffekten, kann  $\underline{Z}_S$  ausgedrückt werden durch (vgl. Gl. (2.43)) [MN79]

$$\underline{Z}_S = \bar{\rho} a_0 \frac{k}{k} = \bar{\rho} a_0 \frac{\beta - j\alpha}{k} \quad (2.72)$$

Es wird ersichtlich, dass  $\underline{Z}_S$  mit abnehmender Dämpfung gegen  $Z_0$  tendiert.

An der Grenzfläche zweier beliebiger wellenleitender Domains (1/2) mit den Impedanzen  $\underline{Z}_{S,1}$  bzw.  $\underline{Z}_{S,2}$  wird eine Welle reflektiert, wenn  $\underline{Z}_{S,1} \neq \underline{Z}_{S,2}$ , vgl. **Abb. 2.3**.

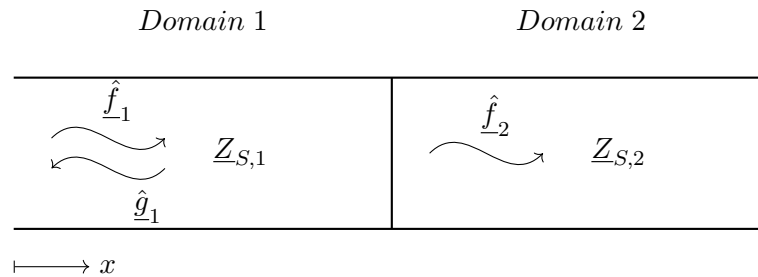


Abbildung 2.3.: Zwei verbundene Domains

Der komplexe Reflexionskoeffizient an der Grenzfläche von Domain 1 zu Domain 2  $r_{12}$ , definiert durch das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Welle, kann über die Impedanzen ausgedrückt werden [MN79]:

$$r_{12} = \frac{\hat{g}_1}{\hat{f}_1} = \frac{\underline{Z}_{S,2} - \underline{Z}_{S,1}}{\underline{Z}_{S,2} + \underline{Z}_{S,1}} \quad (2.73)$$

Es zeigt sich, dass bei gleichen Impedanzen der verbundenen Domains ( $\underline{Z}_{S,1} = \underline{Z}_{S,2}$ ) der Reflexionskoeffizient zu null wird und akustische Wellen die Grenzfläche somit reflexionsfrei passieren.

Die Grenzfälle der spezifischen Schallimpedanz werden durch ein akustisch geschlossenes ( $\underline{Z}_{S,2} = \infty \Rightarrow r = 1 \cdot e^{j0} = 1$ ) bzw. akustisch offenes Ende ( $\underline{Z}_{S,2} = 0 \Rightarrow r = 1 \cdot e^{j\pi} = -1$ ) dargestellt. In beiden Fällen tritt eine Vollreflexion auf. [MN79]

## 2.3. Spektrale Analyse numerischer Fehler

Da für die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen Gl. (2.4-2.6) keine allgemeine Lösung existiert, können diese, mit Ausnahme von Sonderfällen (vgl. Abs. 2.2.2), nur mit numerischen Methoden approximiert werden. In der numerischen Strömungsmechanik sind Finite-Differenzen-Verfahren (FD) und insbesondere Finite-Volumen-Verfahren (FV) die am weitesten verbreiteten Methoden [Hir07, LeV02].

Die Abbildungsgüte eines numerischen Schemas, Diskretisierungsfehler genannt, im Raum/Zeit-Bereich wird durch die Größenordnung der räumlichen und zeitlichen Auflösung  $\Delta x$  bzw.  $\Delta t$  und Potenzen derselben beschrieben. Eine allgemeingültige Quantifizierung des Diskretisierungsfehlers ist jedoch nicht möglich.

Werden hingegen periodische Verläufe von Strömungsgrößen betrachtet, so lässt sich der Diskretisierungsfehler eines numerischen Schemas quantifizieren: Die diskrete Approximation kontinuierlicher periodischer Signale führt zu einer fehlerhaften Abbildung der Amplitude. Bei den meisten stabilen Schemata nimmt die Amplitude der numerischen Lösung ab, man spricht daher von numerischer Dämpfung. Des Weiteren wird die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit durch die Diskretisierung verfälscht, wobei die Abweichung zwischen kontinuierlichem und diskretem System in der Regel frequenzabhängig ist. Das bedeutet, dass die numerische Approximation selbst von nichtdispersiven Fluiden zu einem dispersiven diskreten System führt.

Im Frequenzbereich kann der numerische Fehler daher in Form eines Amplituden- und eines Phasenfehlers ausgedrückt werden [VB82]. Zur Erläuterung der spektralen Fehler werden folgende Arten von akustischen Größen definiert:

1. exakt: exakte Größen beschreiben eine analytische Lösung einer analytischen Modellgleichung und dienen als Referenz für die Quantifizierung der numerischen Fehler.



Beispiele:

- $\hat{p}_{exakt}$ : die exakte (reelle) Amplitude einer linearen, ungedämpft fortschreitenden Welle ist konstant
  - $a_{exakt}$ : die exakte lineare Schallgeschwindigkeit entspricht der exakten Lösung der analytischen Modellgleichung und ist entweder explizit im numerischen Modell definiert oder durch eine Bestimmungsgleichung (bspw. Gl. (2.20)) gegeben
2. numerisch (num): numerische Größen beschreiben die numerische Lösung einer analytischen Modellgleichung
  3. physikalisch (phys): physikalische Größen beschreiben ein reales physikalisches System, welches durch die analytischen Modellgleichungen approximiert wird

Der numerische Amplitudenfehler  $\epsilon_d$  wird als Diffusionsfehler bezeichnet und ist definiert als das Verhältnis der Amplitude der numerischen Lösung  $\hat{p}_{num}$  und der Amplitude der exakten Lösung  $\hat{p}_{exakt}$  pro Zeitschritt [VB82]

$$\epsilon_d = \frac{\hat{p}_{num}}{\hat{p}_{exakt}} . \quad (2.74)$$

Der numerische Phasenfehler  $\epsilon_\phi$  wird Dispersionsfehler genannt und ist definiert als das Verhältnis von numerischer zu exakter Schallgeschwindigkeit

$$\epsilon_\phi = \frac{a_{num}}{a_{exakt}} . \quad (2.75)$$

Diese spektralen Fehler sind charakteristisch für ein numerisches Schema und abhängig von der CFL-Zahl, der Wellenzahl  $k$  sowie der räumlichen Diskretisierung  $\Delta x$ . Die CFL-Zahl ist definiert durch [Hir07]

$$CFL = a_{exakt} (1 + \overline{Ma}) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2.76)$$

und beschreibt den zurückgelegten Weg einer Information (oder Welle) im Zeitschritt  $\Delta t$  bezogen auf die räumliche Schrittweite  $\Delta x$ . Für eine gegebene CFL-Zahl können der Diffusions- und Dispersionsfehler als Funktion des numerischen Phasenwinkels  $\varphi_{num}$  ausgedrückt werden. Dieser ist definiert als

$$\varphi_{num} = k \cdot \Delta x = 360^\circ \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 360^\circ \cdot \frac{f}{a_{exakt}} \cdot \Delta x \quad (2.77)$$

Ein numerisches Schema kann somit in Form von Verläufen für den Diffusionsfehler  $\epsilon_d(\varphi_{num})$  sowie den Dispersionsfehler  $\epsilon_\phi(\varphi_{num})$  in Abhängigkeit der CFL-Zahl charakterisiert werden. Für die spektrale Fehleranalyse bei vorhandener Gleichströmung ist der numerische Phasenwinkel mit der Machzahl zu kompensieren, es ergibt sich:

$$\varphi_{num} = 360^\circ \cdot \frac{f}{a_{exakt} (1 + \overline{Ma})} \cdot \Delta x \quad (2.78)$$

Eine spektrale Fehleranalyse numerischer Schemata wird in der Literatur gewöhnlich für lineare Systeme durchgeführt [Hir07, VB82, LeV02]. Für lineare Anfangswertprobleme kann der spektrale Fehler eines Schemas üblicherweise analytisch hergeleitet werden. Mit Hilfe der von Neumann-Stabilitätsanalyse wird der frequenzabhängige Verstärkungsfaktor eines numerischen Schemas bestimmt. Von dem komplexen Verstärkungsfaktor lassen sich der Diffusionsfehler  $\epsilon_d$  und der Dispersionsfehler  $\epsilon_\phi$  ableiten [Hir07, VB82].

Für nichtlineare Systeme kann eine spektrale Fehleranalyse nicht analytisch durchgeführt werden. Die Untersuchung der Übertragbarkeit der spektralen Fehler linearer Systeme auf das Verhalten nichtlinearer Systeme ist Teil der vorliegenden Arbeit.



### 3. Stand des Wissens

Im Folgenden wird der Stand des Wissens bezüglich der in dieser Arbeit behandelten numerischen Methoden dargelegt. Zunächst wird dabei ein Überblick über die etablierten Diskretisierungsverfahren für die relevanten strömungsmechanischen Problemstellungen gegeben. Anschließend werden Ansätze und Methoden zur Kopplung und simultanen Simulation numerischer Domains für kompressible Strömungsprobleme erläutert. Dies umfasst sowohl die Kopplung von Domains, die mit unterschiedlichen numerischen Schemata diskretisiert werden, als auch die Kopplung von Domains mit unterschiedlichen Anzahlen an räumlichen Dimensionen. Weiterhin werden reflexionsfreie Randbedingungen numerischer Domains erläutert und ein umfassender Überblick über die verfügbare Literatur zu diesem Thema gegeben.

Die Finite-Volumen-Methode ist heute das am weitesten verbreitete Verfahren in der numerischen Strömungsmechanik. Ein wichtiger Vorteil von FV-Verfahren ist die problemlose Anwendbarkeit bei mehrdimensionalen, unstrukturierten und ungleichförmigen Gittern. Durch die integrale Formulierung ist die Konservativität des Schemas bei einer entsprechenden Diskretisierung per Definition gewahrt. Weiterhin können Stoßfronten akkurat abgebildet werden, da keine stetige Differenzierbarkeit der gesuchten Lösung vorausgesetzt wird [Hir07, LeV02, Tor97]. Finite-Volumen-Verfahren sind sowohl zur Simulation von Verdrängermaschinen, bspw. [PHB<sup>+</sup>17, SKHS15, AHB<sup>+</sup>16, KSS07, DJ17, BLK17], als auch von Turbomaschinen, bspw. [KLA<sup>+</sup>14, LS17a, LS17b, AAE15, TCD16], etabliert.

Zur Simulation eindimensionaler Wellenausbreitungsprobleme werden heute oftmals FD-Löser basierend auf dem Charakteristikenverfahren verwendet. Das Charakteristikenverfahren ist eine Methode zur Überführung eines partiellen Differentialgleichungssystems (DGLS) in ein gewöhnliches DGLS (die Normalform) [LR57, MGL04]. Angewendet auf das System der differentiellen Erhaltungsgleichungen Gl. (2.9-2.11) ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die numerische Lösung gewöhnlicher DGL ist einfach zu implementieren und numerisch robust sowie effizient [GB83, SW93]. Ein weiterer wichtiger Vorteil Charakteristik-basierter Verfahren ist die einfache Implementierung charakteristischer Randbedingungen, bspw. nichtreflektierender Randbedingungen [Hed79, GE13]. In der Literatur wird der Begriff Charakteristikenverfahren häufig synonym mit Finite-Differenzen-Lösern basierend auf der Normalform der Euler-Gleichungen verwendet. Dieser Terminus wird in dieser Arbeit übernommen, so dass sich im Folgenden "Charakteristikenverfahren" (CV) auf die numerische Implementierung bezieht.

Da im eindimensionalen Raum der signifikante Teil der viskosen Reibung resultierend aus Querdiffusion von Impuls aufgrund der nicht vorhandenen Querableitungen in den eindimensionalen Gleichungen nicht erfasst werden kann, wird diese oftmals durch Modellterme berücksichtigt [Tri75, Ibe86, Wah15].

Charakteristische FD-Verfahren haben sich etabliert zur Auslegung und Simulation von Rohrleitungssystemen [TGS10, VS89, BEL12, HI98, DGW<sup>+</sup>13, SMRR15, DAB14]. Weiterhin werden auch gesamte Systeme mit reduzierten eindimensionalen Modellen von Pumpen oder Kompressoren mit CV-Verfahren modelliert und simuliert [Ibe86, LB13, LB14, Hus98, BR06].

### 3.1. Kopplung numerischer Domains

Im Folgenden werden bisherige Ansätze zur Kopplung unterschiedlicher numerischer Domains dargestellt und erläutert. In der Literatur vorhandene Methoden und Ansätze lassen sich unterscheiden zwischen der Kopplung von Domains unterschiedlicher räumlicher Dimensionen mit dem gleichen numerischen Schema und der Kopplung numerischer Domains mit grundlegend unterschiedlichen Diskretisierungsansätzen.

Ein Ansatz zur multidimensionalen Kopplung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen wurde von Formaggia et. al zur Simulation von Blutströmungen bei Fluid-Struktur-Interaktion vorgestellt [FNQV99, FGNQ01]. Trotz angenommener Inkompressibilität des Fluids ergibt sich durch die Fluid-Struktur-Interaktion mit elastischer Wand ein gemischt hyperbolisch-parabolisches Gleichungssystem wie die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Die Kopplungsstelle ist schematisch in **Abb. 3.1** dargestellt. Das System wurde numerisch mit der Finite-Elemente-Methode gelöst.  $\Omega_{3D}$  steht für die dreidimensionale Domain und  $\Omega_{1D}$  entsprechend für die eindimensionale Domain.  $\Gamma_a$  ist die Grenzfläche zwischen beiden Teilbereichen, die sich an der axialen Koordinate von  $z = a$  befindet.

Als Kopplungsbedingungen an der Grenzfläche wurden die Erhaltung der Fläche  $A$ , des hydrostatischen Drucks  $p$ , des Volumenflusses  $\dot{V}$  sowie der einlaufenden Charakteristik in die 1D-Domain  $f(a^+)$  formuliert [FGNQ01]:

$$A(a^+) = A(a^-) \tag{3.1}$$

$$p(a^+) = \bar{p}(a^-) \tag{3.2}$$

$$\dot{V}(a^+) = \dot{V}(a^-) \tag{3.3}$$

$$f(a^+) = \bar{c}(a^-) + 2\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{\bar{p}(a^-) - p_{ext} + p^*} - \sqrt{p^*} \right) \tag{3.4}$$

Dabei steht  $(a^-)$  für Strömungsgrößen auf Seiten der 3D-Domain und  $(a^+)$  für Strömungsgrößen auf der eindimensionalen Seite. Der Druck  $p$  und die Geschwindigkeit  $c$  werden für die Kopplungsbedingung auf der dreidimensionalen Seite über den Querschnitt gemittelt ( $\bar{p}, \bar{c}$ ). Der Druck außerhalb der Domain wird mit  $p_{ext}$  und der Referenzdruck bei unverformter Struktur mit  $p^*$  bezeichnet. Die Riemann-Invarianten (charakteristische Variablen für die kompressiblen Erhaltungsgleichungen) werden in der Literatur mitunter auch auf die Schnelle normiert statt auf den Druck wie in Gl. (2.25-2.26), so dass  $f = c + \frac{p}{\rho a}$  (vgl. bspw. [PWM06]). Der erste Term der charakteristischen Variablen

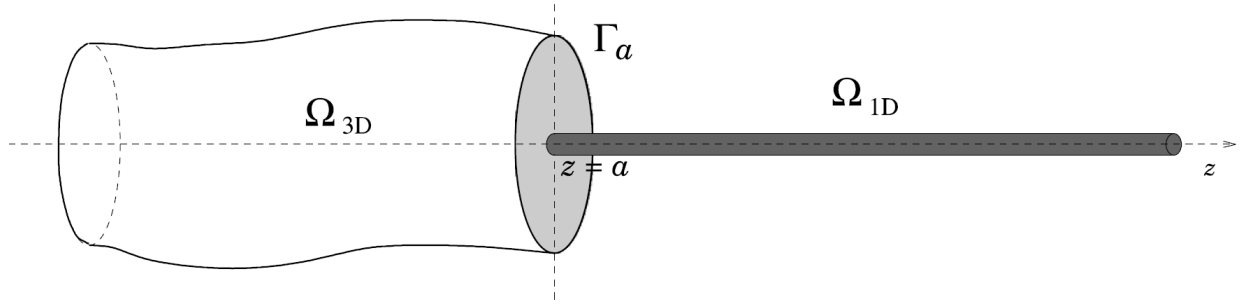


Abbildung 3.1.: Schema der Kopplungsstelle zwischen eindimensionaler und dreidimensionaler Domain nach [FGNQ01].

in Gl. (3.4) entspricht demjenigen der Riemann-Invariante. Die Formulierung des zweiten Terms der rechten Seite resultiert aus der Tatsache, dass die inkompressiblen Erhaltungsgleichung bei Fluid-Struktur-Interaktion gelöst werden. Der Druck (und damit die charakteristische Variable  $f$  in Gl. (3.4)) ist daher von der momentanen lokalen Querschnittsfläche sowie dem Spannungszustand in der umgebenden Struktur abhängig. Zur Herleitung siehe [FGNQ01].

Die Kopplung wurde zur Minimierung der Reflexionen am Ende der 3D-Domain entwickelt und eingesetzt. Mit Hilfe der gekoppelten Domain wurde eine erhebliche Reduktion von Reflexionen erreicht [FGNQ01]. Die Kopplungsmethode wurde in einer Reihe von Arbeiten für die Anwendung in Blutströmungen verwendet [UBVF06, Nob2]. Des Weiteren wurden einige Variationen der Kopplungsparameter entwickelt und die Stabilitätsgrenzen des Ansatzes tiefgehend ausgearbeitet [FMN07, DO13].

Der Kopplungsansatz wird anhand der Abweichungen zwischen gekoppelten 2D/1D- bzw. 3D/1D-Simulationen sowie Referenzsimulationen evaluiert. Die über die mehrdimensionale Domain gemittelten Abweichungen von Druck und Geschwindigkeit zwischen gekoppelter und Referenzsimulation liegen im Bereich weniger Prozent [FGNQ01, UBVF06]. Eine dezidierte, quantitative Analyse der Reflexionen an der Kopplungsstelle sowie systematische Untersuchungen zu den Einflussparametern auf die Abweichungen werden nicht durchgeführt.

Ein weiterer Ansatz zur Kopplung unterschiedlicher Domains mit dem gleichen Schema wurde von Godlewski zur simultanen Simulation physikalisch unterschiedlicher Domains, bspw. mit unterschiedlichen Stoffmodellen, entwickelt [GR04, GLR05]. Die numerische Lösung wird mit einem Finite-Differenzen-Verfahren basierend auf Godunov-Flüssen umgesetzt. Der Fluss über das Kopplungs-Interface wird dabei zweimal berechnet, für jede der an das Interface angrenzenden Zellen mit der Flussfunktion der entsprechenden Domain. In die Flussfunktion gehen entsprechend Strömungsgrößen beider Domains ein. Durch die unterschiedlichen Flüsse an einem Interface ist das Kopplungsschema nicht konservativ. Es wird jedoch eine glatte Lösung an dem Interface ohne Oszillationen erreicht. Eine quantitative Analyse der Reflexionen an der Kopplungsstelle wird wiederum nicht durchgeführt [GR04, GLR05].

Der Ansatz von Godlewski wurde von Hérard und Hurisse auf die Kopplung von ein- und zweidimensionalen Euler-Gleichungen übertragen. Dabei werden ebenfalls zwei Flüsse berechnet. Auf der Seite der eindimensionalen Domain wird der quer zum Interface gerichtete Impulsfluss, der in eindimensionalen Systemen nicht existiert, zu null gesetzt. Es werden zwei Kopplungsansätze untersucht: durch eine konservative und eine nicht-konservative Formulierung der Querflüsse des Impulses auf der zweidimensionalen Seite wird eine konservative und eine nicht-konservative Kopplung realisiert. Die nicht-konservative Kopplung weist bei Testfällen deutlich geringere Abweichungen zu einer Referenzsimulation als die konservative Kopplung auf. Auftretende Reflexionen an der Kopplungsstelle werden nicht quantifiziert. [HH07,HH10]

Eine Weiterentwicklung dieser Kopplungsmethode für kavitierende Strömungen in zwei und drei Dimensionen wurde von Friedrich et al. und Deininger et al. vorgestellt. Dabei erstreckt sich das Kopplungs-Interface über eine Vielzahl von zwei- bzw. dreidimensionalen Zellen, vgl. **Abb. 3.2**. Da in der eindimensionalen Domain nur ein Satz an Strömungsgrößen existiert, werden sogenannte "ghost-cells" (Geisterzellen) verwendet. Diese Zellen stellen eine beidseitige Erweiterung der numerischen Domain über das Interface hinaus dar, so dass die mehrdimensionalen Geisterzellen sich mit den an das Interface grenzenden Zellen der eindimensionalen physikalischen Domain räumlich überlappen, siehe Abb. 3.2.

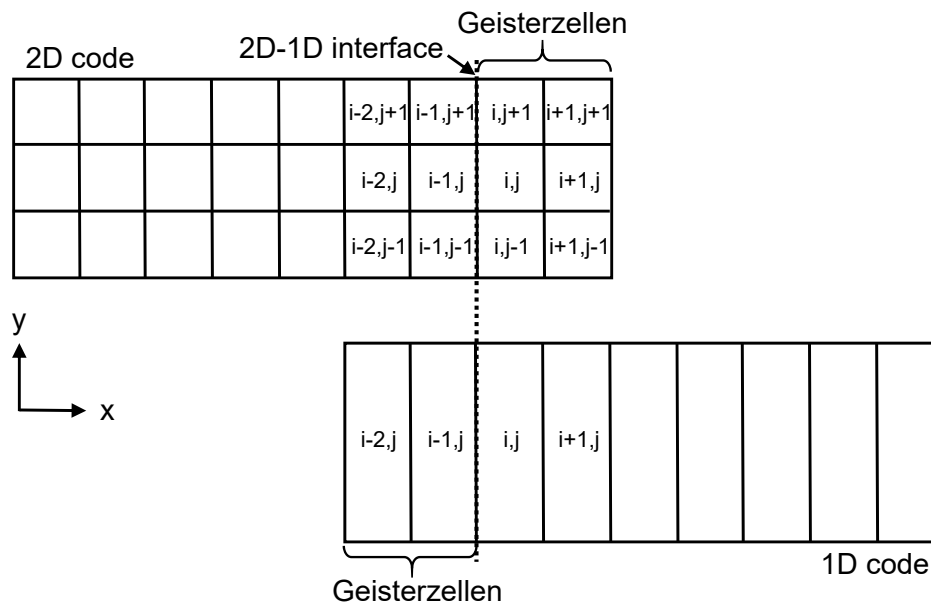


Abbildung 3.2.: Prinzip der 2D-1D-Kopplung mit überlappenden Domains und Geisterzellen nach [FMS<sup>+</sup>12].

Zur Bestimmung der lokal unterschiedlichen Flüsse auf der mehrdimensionalen Seite des Interfaces wird zunächst das Strömungsprofil in Form primitiver Variablen in die angrenzenden Geisterzellen übertragen. Das Profil in den Geisterzellen wird nun derart verschoben, dass der Mittelwert dem Wert

der eindimensionalen Domain entspricht. Es gilt für die Strömungsgeschwindigkeit orthogonal zum Interface  $c$ :

$$c_{2D,i,j} = c_{1D,i,j} + (c_{2D,i-1,j} - \bar{c}_{2D,i-1}^*) \quad (3.5)$$

Dabei entspricht  $\bar{c}_{2D,i-1}^*$  einer über der Kopplungsfläche gemittelten Geschwindigkeit, die berechnet wird nach

$$\bar{c}_{2D,i-1}^* = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} (c_{2D,i-1,j} - c_{2D,i-1,j-1}) \cdot \left( \frac{y_{2D,i-1,j} - y_{2D,i-1,j-1}}{2} \right)}{\sum_{j=1}^{n_y} (y_{2D,i-1,j} - y_{2D,i-1,j-1})} \quad (3.6)$$

und den Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeiten in den 2D-Geisterzellen an die entsprechende Geschwindigkeit der 1D-Domain anpasst. Anschließend werden die Flüsse der einzelnen Zellen der mehrdimensionalen Domain unter Verwendung der modifizierten Strömungsgrößen nach Gl. (3.5) in den Geisterzellen berechnet. Der Fluss in die eindimensionale Zelle ergibt sich entsprechend aus der Summe der Flüsse aus den mehrdimensionalen Zellen am Interface. [FMS<sup>+</sup>12, DJSH12, Dei15]

Anhand von Testfällen wird gezeigt, dass die kumulierte relative Massenabweichung zwischen gekoppelten 2D/1D-Simulationen und 2D-Referenzsimulationen in der Größenordnung von  $10^{-5}$  liegt und damit vernachlässigbar klein ist. Die relative Abweichung des Impulses liegt bei maximal 6 % im Bereich der Kopplungsstelle für die präsentierten Testfälle. Durch die Kopplung über Flüsse ist die Konservativität des Schemas sichergestellt. Gleichzeitig ist dadurch die Kopplung jedoch auf FV-Schemata beschränkt. [FMS<sup>+</sup>12, DJSH12, Dei15]

Eine ähnliche, ebenfalls auf der Verwendung von Geisterzellen basierende Herangehensweise wurde von Montenegro et al. untersucht. In diesem Fall werden die konservativen Variablen zwischen den Domains übergeben. Die Variablen in der eindimensionalen Geisterzelle werden dem Mittelwert der räumlich überlappenden dreidimensionalen Zellen gleichgesetzt. Die Werte der konservativen Variablen in den dreidimensionalen Geisterzellen werden mit den Werten der überlappenden eindimensionalen Zelle belegt, so dass sich ein konstantes Profil ergibt. Die Kopplung erfolgt ebenfalls über die Flüsse zwischen 1D- und 3D-Domain. Eine quantitative Analyse des Einflusses der Kopplung auf die Lösung wird nicht durchgeführt [MOD13]

Die Kopplungsansätze in [GR04, GLR05, HH07, HH10, FMS<sup>+</sup>12, DJSH12, MOD13] wurden stets mit Riemann-Lösern und damit in Form von Godunov-Flüssen umgesetzt. Grundsätzlich sind diese Methoden jedoch auch mit anderen Lösern anwendbar. Durch die Kopplung anhand von Flüssen sind die Ansätze in dieser Form jedoch auf FV-Verfahren beschränkt.

Eine Vielzahl von Arbeiten zu gekoppelten multidimensionalen Simulationen mit unterschiedlichen numerischen Schemata ist in der Literatur zu finden. Dabei werden eindimensionale Domains zumeist mit Finite-Differenzen-Verfahren und dreidimensionale Domains in der Regel mit Finite-Volumen-Verfahren gelöst. Galindo et al. entwickelten eine Kopplungsmethode für den kommerziellen Löser FLUENT (3DFV) und den in-house-Löser OpenWAM (1DFD), siehe **Abb. 3.3** [Ans18].



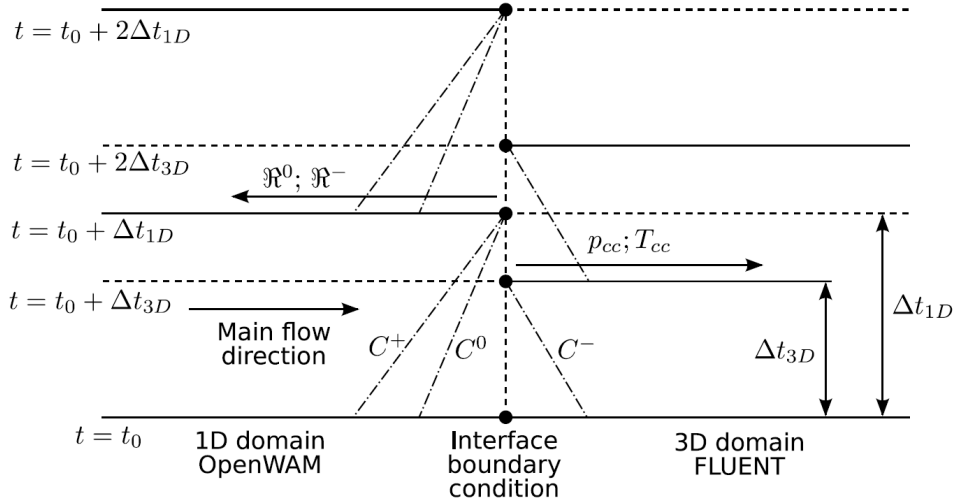


Abbildung 3.3.: Prinzip der Kopplung von OpenWAM (1D) und FLUENT (3D) mit unterschiedlichen Zeitschritten  $\Delta t$  [GTFN11].

Der eindimensionale Löser basiert auf dem Charakteristikenverfahren. Daher werden am Interface die charakteristischen Variablen bzw. Riemann-Invarianten ( $\mathfrak{R}$  in Abb. 3.3) übergeben. Als Randbedingung für die eindimensionale Domain werden dazu die primitiven Variablen der dreidimensionalen Domain in Riemann-Invarianten überführt. Entsprechend werden die Riemann-Invarianten aus der 1D-Domain in primitive Variablen zur Übergabe als Randbedingung der 3D-Domain überführt. Wie in Abb. 3.3 mit  $\Delta t_{3D}$  und  $\Delta t_{1D}$  verdeutlicht, erfolgt die Lösung der unterschiedlichen Domains in unterschiedlichen Zeitskalen, so dass eine Interpolation zwischen Zeitschritten am Interface erforderlich ist. Die Validierung des Ansatzes anhand grundlegender Testfälle, wie dem Stoßwellenproblem (vgl. [Sod78]) oder einer Impulsanregung zeigen gute Übereinstimmung mit analytischen Lösungen, kleine Störungen, die in beiden angrenzenden Domains fortschreiten, sind jedoch sichtbar. [GTFN11]

Zur multidimensionalen Simulation von Verdrängermotoren mit innerer Verbrennung wurden ebenfalls 1DFD-Schemata mit 3DFV-Lösern gekoppelt. Wanker et al. koppelten eine dreidimensionale Simulation des Zylinders anhand der kommerziellen 3DFV-Software FIRE mit der eindimensionalen Simulation des Abgastraktes über die kommerzielle 1DFD-Software BOOST [AVL18a, AVL18b, WWPT04]. An der Kopplungsstelle wurden primitive Variablen ausgetauscht. Fokus der Untersuchungen ist die Simulation der Abgasnachbehandlung, so dass die Zielgrößen Abgastemperatur, Sauerstoffgehalt und Rußgehalt zur Validierung betrachtet wurden.

Eine gekoppelte 1D-3D-Simulation eines Abgaskatalysators wurde von Štěpánek et al. durchgeführt. Der Katalysator wird von Ein- bis Austritt modelliert, wobei das Ein- und Austrittsgehäuse zur Berücksichtigung mehrdimensionaler Strömungseffekte dreidimensional simuliert wird. Die Katalysatorkanäle werden hingegen eindimensional modelliert und simuliert. Zur Lösung der dreidimensionalen Domain wurde der kommerzielle 3DFV-Löser StarCD verwendet [Sie18]. Die 1D-Domains wurden mit einem in-house-1DFD-Verfahren berechnet. Primitive Variablen werden direkt am Interface zwischen

den Domains übergeben. Zielgrößen für die Validierung waren ebenfalls Temperatur und Stoffkonzentration, so dass der Einfluss des Interfaces auf die Ausbreitung akustischer Wellen nicht analysiert wird. [ŠKMK12]

Die gekoppelte Simulation von Arbeitsraum und Einspritztrakt von Dieselmotoren wird ebenfalls in einer Reihe von Arbeiten behandelt [KM04, JASG08, BMPB09, ČST<sup>+</sup>09]. Kolade et al. verwenden das kommerzielle 1DFD-Simulationstool GT-Power zur Lösung des eindimensional modellierten Common-Rail-Einspritzsystems [Gam18]. Primitive Variablen werden als Randbedingung zwischen der 1D-Domain und dem dreidimensional modellierten Arbeitsraum übergeben. Dieser wird mit der kommerziellen 3DFV-Software KIKA-3V gelöst [Los18]. Die unterschiedlichen Domains werden mit unterschiedlichen Zeitschritten berechnet. Eine Interpolation zwischen Zeitschritten ist dabei jedoch nicht erforderlich, da der größte Zeitschritt stets ein ganzzahliges Vielfaches kleinerer Zeitschritte darstellt. In Domains mit kleineren Zeitschritten werden mehrere Zeitschritte mit konstanten Randbedingungen berechnet. Anschließend wird die Domain mit dem größten Zeitschritt gelöst. Die gekoppelten Simulationen wurden mit voll dreidimensionalen Simulationen hinsichtlich der Zielgrößen Zylinderdruck und  $NO_x$ -Gehalt validiert und zeigten gute Übereinstimmung. [KM04]

Bei den aufgeführten Kopplungsansätzen für Verdrängermotoren werden qualitative Vergleiche zwischen gekoppelten und Referenzsimulationen präsentiert. Es werden keine quantitativen Analysen der Reflexionen an bzw. des Einflusses der Kopplungsstelle durchgeführt.

Im Bereich von Turbomaschinen wurden gekoppelte Simulationen von Maschine und angeschlossenem Rohrleitungssystem durchgeführt [WLW<sup>+</sup>12, YCWY15]. Wu et al. koppelten dazu den kommerziellen 3DFV-Löser FLUENT mit dem kommerziellen 1DFD-Code Flowmaster [Ans18, Men18]. Die Übergabe der Randbedingungen zwischen den Domains erfolgt in Form von primitiven Variablen. Die Kopplung wurde zur Simulation einer Kreiselpumpe in einem geschlossenen Kreislauf verwendet. Der Fokus der Arbeit liegt dabei auf dem Konvergenzverhalten des Gesamtmodells, welches unter Variation diverser physikalischer und numerischer Parameter bei transienten und stationären Simulationen gezeigt wurde. Eine Validierung unter physikalischen Gesichtspunkten wird nicht durchgeführt. [WLW<sup>+</sup>12]

Ein ähnlicher Ansatz wurde von Yang et al. zur Untersuchung der Auswirkungen eines Joukowsky-Stoßes auf das Strömungsfeld in einer Kreiselpumpe vorgestellt. Die dreidimensionale Domain wurde mit dem kommerziellen 3DFV-Code FLUENT gelöst [Ans18]. Das saug- und druckseitig angeschlossene Rohrleitungssystem wurde mit einem 1DFD-Löser basierend auf dem Charakteristikenverfahren berechnet. Nach einem Zeitschritt der eindimensionalen Domain wird iterativ eine Lösung der 3D-Domain bestimmt, die den Randbedingungen, aufgeprägt durch das Rohrleitungssystem, genügt. Ergebnisse der gekoppelten Modells wurden mit Ergebnissen aus reinen 1D-Simulationen verglichen, bei denen ein reduziertes eindimensionales Ersatzmodell für die Kreiselpumpe verwendet wurde. Weiterhin wurde der Einfluss der Schließzeit eines hochdruckseitigen Ventils numerisch untersucht [YCWY15].

In den vorgestellten bisherigen Ansätzen zur multidimensionalen Kopplung werden quantitative Betrachtungen zum Einfluss des Kopplungsansatzes lediglich anhand einzelner Testfälle durchgeführt. Untersuchungen zu allgemeingültigen Einflussparametern auf Reflexionen an der Kopplungsstelle wurden bisher nicht durchgeführt. Entsprechend sind die Kopplungsbedingungen zumeist spezifisch auf die betrachteten numerischen Schema zugeschnitten und allgemeingültige Kopplungsbedingungen werden nicht formuliert.

## 3.2. Reflexionsfreie Randbedingung

Der Begriff der reflexionsfreien Randbedingung wird in der Literatur nicht ausschließlich für exakt reflexionsfreie Abschlüsse verwendet, die per Definition einen Reflexionskoeffizienten akustischer Wellen von  $r_{RB} = 0$  aufweisen. Praktisch sämtliche Ansätze zur Reduktion akustischer Reflexionen an Rändern numerischer Domains werden als reflexionsfreie oder nicht-reflektierende Randbedingung bezeichnet. Tatsächlich ist vollständige Reflexionsfreiheit in der Literatur bisher nur für Sonderfälle erreicht worden [PWM06]. Im Folgenden werden relevante Ansätze nicht-reflektierender Randbedingungen (nrRB) aufgeführt.

Grundsätzlich lassen sich nrRB für ebene Wellenausbreitungsprobleme in zwei Kategorien unterteilen: nicht-reflektierende Randschichten und nicht-reflektierende (räumlich) lokale Randbedingungen. Reflexionsfreie Randschichten gehen auf die Arbeit von Berenger zurück und werden als *perfectly matched layer* (=ideal angepasste Schicht) oder *PML* bezeichnet [Ber94]. Die physikalische Domain wird dabei um eine absorbierende Domain erweitert, innerhalb derer einlaufende Wellen gedämpft und Reflexionen dadurch minimiert werden. Die PML-Methode wurde von Berenger zur numerischen Lösung der Maxwell-Gleichungen entwickelt und von Hu auf die instationäre Gasdynamik übertragen und als Randbedingung einer Domain, in der die zweidimensionalen linearisierten Euler-Gleichungen gelöst werden, angewendet [Hu96]. Die ideale Anpassung bezieht sich auf die Schallimpedanz der physikalischen Domain  $Z_{S,PD}$  und der PML  $Z_{S,PML}$ . An Impedanzsprüngen werden akustische Wellen reflektiert (vgl. Abs. 2.2.3). Daher müssen die Impedanzen am Eintritt in die PML ideal aneinander angepasst sein, um Reflexionen zu vermeiden. Innerhalb der absorbierenden Schicht wird die Dämpfung durch dissipative Terme kontinuierlich erhöht. Am Austritt der Dämpfungsschicht wird schließlich eine klassische Randbedingung (Dirichlet- oder Neumann-RB) aufgeprägt. Durch die starke Dämpfung innerhalb des dissipativen Layers werden Reflexionen in der physikalischen Domain minimiert bzw. eliminiert [Ber94, Hu96].

Das PML-Konzept wurde von Hayder auf die nichtlinearen Euler-Gleichungen angewendet [HH99]. In einer Reihe von Arbeiten wurden alternative bzw. optimierte Funktionale für den Dämpfungsterm innerhalb des PML entwickelt [RZCN04, Hu05, DJ06, AK07, ZW10]. Ein wesentlicher Nachteil von PML-Randbedingungen ist beispielsweise die in der Regel unerwünschte künstliche Erweiterung der physikalischen Domain. Um eine ausreichende Dämpfung durch künstliche Dissipation in dem PML zu erreichen, ist eine räumliche Ausbreitung der Dämpfungsschicht über mehrere Wellenlängen

der zu dämpfenden Wellen erforderlich. Diese Notwendigkeit ist insbesondere bei niederfrequenten Wellenausbreitung hinsichtlich der Effizienz ungünstig. Ein weiteres Problem, das bei mehrdimensionaler Simulation zum Tragen kommt, ist die Tatsache, dass sich die PML-Schicht nur für senkrecht einfallende Wellen ideal anpassen lässt. Der Reflexionskoeffizient ist somit ein Funktional des Einfallswinkels. Bei der Simulation nichtlinearer Systeme ist es weiterhin problematisch, die Strömungsgrößen am Austritt der Dämpfungsschicht zu formulieren, da diese nicht zwangsläufig den gewünschten Strömungsgrößen am Austritt der physikalischen Domain entsprechen [Col04, Giv04, MGLS12, GE13].

Das zweite weit verbreitete grundsätzliche Konzept sind sogenannte charakteristische Randbedingungen. Diese Randbedingungen basieren auf einer Formulierung der Erhaltungsgleichungen in Normalform und damit in Form einer herauslaufenden Charakteristik (Welle)  $f$  und einer in die Domain hineinlaufenden Charakteristik  $g$ , wodurch sich die Amplitude der einlaufenden Welle und damit der Reflexionsfaktor zu null setzen lässt, vgl. Abs. 2.2. Charakteristische Randbedingungen gehen auf die Arbeiten von Engquist und Majda [EM77], Hedstrom [Hed79] und Giles zurück [Gil90]. Das Konzept wurde von Thompson auf mehrdimensionale Simulationen erweitert [Tho87, Tho90]. Poinot und Lele entwickelten eine charakteristische Randbedingung zur Anwendung mit den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen und führten die lokal eindimensionalen und reibungsfreien Beziehungen (local onedimensional inviscid = LODI) ein [Poi92]. Dabei wird das Gleichungssystem an der nrRB lokal eindimensional und reibungsfrei gelöst, was zu einer einfachen Implementierung der Randbedingung führt.

Bei Anwendung charakteristischer Randbedingungen zur Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen, wie auch der nichtlinearen Euler-Gleichungen, tritt ein Problem bezüglich der Gleichanteile der Strömung auf. Dadurch, dass alle einlaufenden Amplituden inklusive des Gleichanteils zu null gesetzt werden, ist das Problem mathematisch nicht wohlgestellt, da die Gleichgrößen am Austritt nicht definiert sind. Dies führt zu einem Drift der Gleichanteile an der Randbedingung [Poi92, Tho90]. Zur Unterdrückung dieses Drifts wurden in einer Reihe von Arbeiten Korrekturterme für den mittleren Druck an der Randbedingung eingeführt [Poi92, Tho90, RS80, SNP04, PWM06]. Diese Korrekturterme berücksichtigen den lokalen Druck in zwei Zeitebenen und werden daher als lineare Relaxationsterme (LRT) bezeichnet. Mit Hilfe von LRT werden die Abweichungen des Momentandruckes von einem gewünschten mittleren Druck in die Bestimmung des Druckes miteinbezogen und somit der mittlere Druck an der Randbedingung in Richtung des gewünschten Mittelwertes korrigiert.

Durch Überlagerung des LRT ist jedoch die ursprüngliche Reflexionsfreiheit der charakteristischen Randbedingung nicht mehr gegeben. Die Relaxationsterme wirken durch die Berücksichtigung von zwei Zeitebenen wie Tiefpass-Filter, wodurch insbesondere niederfrequente Schwankungen stark reflektiert werden [PWM06, Hue15]. Huet entwickelte eine Randbedingung mit Unterdrückung des Drifts der Gleichanteile unter Verwendung eines LRT bei gleichzeitiger Vorgabe einer akustischen Anregung an derselben Randbedingung. Durch Verwendung nichtlinearer Riemann-Invarianten werden die Re-

flexionseigenschaften einer LRT-Randbedingung beibehalten, während die Anregung kaum gedämpft wird, was bei Verwendung linearer Riemann-Invarianten der Fall ist. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Randbedingung ist, dass sämtliche Gleichgrößen an der Randbedingung im Voraus bekannt sind [Hue15].

Bei Verwendung der bisher ausgeführten Arten charakteristischer Randbedingungen ist stets ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Einhaltung einer geforderten Gleichgröße ( $\bar{p}$  bzw.  $\bar{c}$ ) und der Unterdrückung von Reflexionen zu treffen. Eine charakteristische Randbedingung, die eine genaue Einhaltung der Gleichgröße bei vernachlässigbar kleinen Reflexionen realisiert, ist in der Literatur bisher nicht vorhanden. Gleichzeitig lässt sich der Frequenzgang der (üblicherweise verwendeten) LRT-Randbedingung in seiner grundlegenden Charakteristik (Tiefpass-Filter) nicht ändern, sondern lediglich entlang der Frequenzachse skalieren. Das beschränkt insbesondere die Anwendung auf niederfrequente Problemstellungen.

## 4. Motivation und Zielsetzung

Das übergeordnete Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer integralen Methode zur gekoppelten drei- und eindimensionalen Simulation von Pulsationen in Rohrleitungssystemen. Um eine effiziente Simulation bei gleichzeitiger Erfassung der relevanten Wechselwirkungen zu realisieren, wird der Ansatz verfolgt, die Anregung mit einer detaillierten dreidimensionalen Simulation abzubilden und diejenigen Bereiche, in denen (quasi-)eindimensionale Strömungs- und Wellenausbreitungsvorgänge vorhanden sind, mit einem reduzierten eindimensionalen Modell zu simulieren. Diese Bereiche umfassen Rohrleitungen, Rohrkrümmer und T-Stücke, bei denen Sekundärströmungseffekte keinen signifikanten Einfluss auf die auftretenden Pulsationen haben.

Für die integrale Simulation derartiger Systeme mit dem gekoppelten Ansatz sind zwei Komponenten erforderlich:

- reflexionsfreie Kopplungsbedingung zur zeitlichen 2-Wege-Kopplung der detaillierten dreidimensionalen Domain und der reduzierten eindimensionalen Domain
- reflexionsfreie Randbedingung zum Abschluss der numerischen Domain ohne unphysikalische, numerische Reflexionen.

Basierend auf dem Stand des Wissens lassen sich bestehende Problemstellungen bzw. Optimierungsbedarfe sowohl hinsichtlich einer reflexionsfreien Kopplungs- als auch einer reflexionsfreien Randbedingung formulieren. Daraus werden im Folgenden die konkreten Zielsetzungen der vorliegenden Arbeit abgeleitet.

Wie im Stand des Wissens ausgeführt, ist eine Vielzahl von Ansätzen und Implementierungen zur Kopplung numerischer Domains in der Literatur verfügbar. Eine dezidierte Analyse von Ursachen für Reflexionen an der Kopplungsstelle ist bisher nicht veröffentlicht. Daraus resultierend ist dem Verfasser keine Arbeit bekannt, in der der Entstehungsmechanismus für Reflexionen am Kopplungsinterface eruiert und relevante Einflussparameter erarbeitet werden. Ein Kopplungskonzept, das auf der Minimierung bzw. Eliminierung der Reflexionsursachen basiert, ist dementsprechend in der aktuellen Literatur nicht verfügbar.

Hinsichtlich reflexionsfreier Randbedingungen ist für den vorliegenden Anwendungsfall ebenfalls kein befriedigendes Konzept in der Literatur vorhanden. Da die Pulsationsanregung von Fluidenergiermaschinen stark vom Betriebspunkt abhängig ist, der durch die zeitlich gemittelten Größen definiert wird, müssen diese an den Domain-Rändern vorgegeben werden können. Bei bisherigen Konzepten reflexionsfreier Randbedingungen mit Vorgabe der Gleichgrößen muss stets ein Kompromiss zwischen genauer Vorgabe der zeitgemittelten Größen und niedrigen Reflexionen getroffen werden.

Im ersten Teil der Arbeit wird daher eine Randbedingung für eindimensionale, pulsierende Strömungen entwickelt, die eine genaue Vorgabe der Gleichgrößen bei gleichzeitiger Realisierung niedriger Reflexionen ermöglicht. Die Einflussparameter auf vorhandene Restreflexionen werden untersucht und die Randbedingung im Vergleich mit vorhandenen Ansätzen evaluiert.

Im nachfolgenden Teil dieser Arbeit wird zunächst eine Theorie zur grundlegenden Beschreibung der Entstehung von Reflexionen an Kopplungsstellen numerischer Domains erarbeitet. Basierend darauf wird ein Konzept zur Minimierung von Reflexionen an der Kopplungsstelle entwickelt. Die Einflussparameter sowie das Potential und die Grenzen der erarbeiteten Methode werden anhand generischer Testfälle möglichst allgemeingültig bewertet.

Abschließend werden exemplarische Simulationen mit kombinierter Anwendung der Kopplung- und Randbedingung durchgeführt. Dabei werden sämtliche Mechanismen, die bei praktischen Anwendungen auftreten, wie Wandreibung und Turbulenzen, berücksichtigt, so dass anhand dieser Testfälle die Übertragbarkeit auf die ingenieurtechnische Praxis untersucht wird.

## 5. Numerische Schemata

Die eindimensionalen Simulationen in der vorliegenden Arbeit werden mit dem am FG Fluidtechnik entwickelten CV-Löser FLOAT durchgeführt. Für die dreidimensionalen Simulationen wird das Open-Source-Simulationspaket OpenFOAM verwendet, welches auf dem FV-Verfahren basiert und im Wesentlichen aus der Arbeit von Weller hervorgeht [WTJF98, Ope11]. Die zu Grunde liegenden numerischen Schemata werden im Folgenden erklärt.

### 5.1. Eindimensionales Schema

Die Erhaltungsgleichungen in differentieller Form (Gl. (2.9-2.11)) gelten für eindimensionale, adiabate Strömungen mit konstantem Querschnitt. Der Term  $f_x$  repräsentiert Reibkräfte und lässt sich für Rohrströmungen nach dem Hagen-Poiseuille-Gesetz wie folgt ausdrücken [Sig09]:

$$f_x = -\frac{\lambda c |c|}{d} \frac{c}{2} \quad (5.1)$$

Die Rohrreibungszahl  $\lambda$  wird mit dem Gesetz nach Blasius bestimmt [Sig09]. Das negative Vorzeichen in Gl. (5.1) macht deutlich, dass die Reibkraft stets entgegen der Strömungsrichtung wirkt.

Die obigen Gleichungen stellen ein hyperbolisches Gleichungssystem dar. Ein hyperbolisches Gleichungssystem ist gekennzeichnet durch rein reelle Eigenwerte und lässt sich mit dem Charakteristikenverfahren in die Normalform überführen [LR57]. Zunächst wird mit Hilfe der Definition der Schallgeschwindigkeit Gl. (2.18) ein Wechsel der abhängigen Variablen vorgenommen, so dass das System in Matrixform geschrieben werden kann als

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} + \vec{d} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{mit dem Lösungsvektor } \vec{\phi} = \begin{pmatrix} p \\ c \\ u \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$\text{der Koeffizientenmatrix } \bar{A} = \begin{pmatrix} c & \rho a^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & c & 0 \\ 0 & \frac{p}{\rho} & c \end{pmatrix} \quad (5.4)$$



$$\text{und dem Vektor der Inhomogenitäten } \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_x \\ cf_x \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Die Normalform lautet:

$$\bar{E} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \bar{\Lambda} \bar{E} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} + \bar{E} \vec{d} = 0 \quad (5.6)$$

Dabei steht  $\bar{E}$  für die Matrix der Eigenvektoren und  $\bar{\Lambda}$  für die Diagonalmatrix der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix  $\bar{A}$  [LeV02]. Die Eigenwerte des Systems sind

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & (c+a) & 0 \\ 0 & 0 & (c-a) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Die Matrix der Eigenvektoren ergibt sich entsprechend zu

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} -p & 0 & (\rho a)^2 \\ 1 & \rho a & 0 \\ 1 & -\rho a & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Das Gleichungssystem (5.6) lautet nach Normierung des lokalen Differentials des Druckes in Gleichungsschreibweise:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{(\rho a)^2}{p} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} - c \frac{(\rho a)^2}{p} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(\rho a)^2}{p} cf_x = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a \frac{\partial c}{\partial t} + (c+a) \frac{\partial p}{\partial x} + (c+a) \rho a \frac{\partial c}{\partial x} - \rho a f_x = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho a \frac{\partial c}{\partial t} + (c-a) \frac{\partial p}{\partial x} - (c-a) \rho a \frac{\partial c}{\partial x} + \rho a f_x = 0 \quad (5.11)$$

Die Überführung in ein gewöhnliches DGLS, bei der die Gültigkeit auf die jeweilige charakteristische Ausbreitungsrichtung der Gleichungen reduziert wird, führt zu

$$\frac{dp}{dt} - \frac{(\rho a)^2}{p} \frac{du}{dt} - \frac{(\rho a)^2}{p} cf_x = 0 \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad (5.12)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{dc}{dt} - \rho a f_x = 0 \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = c + a \quad (5.13)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{dc}{dt} + \rho a f_x = 0 \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = c - a \quad (5.14)$$

Die Differentialquotienten lassen sich näherungsweise als Differenzenquotienten ausdrücken, deren Steigung der jeweiligen Charakteristik entspricht, vgl. **Abb. 5.1**:

$$\text{Charakteristik A: } \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = c + a \quad (5.15)$$

$$\text{Charakteristik B: } \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = c \quad (5.16)$$

$$\text{Charakteristik C: } \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x_C}{\Delta t} = c - a \quad (5.17)$$

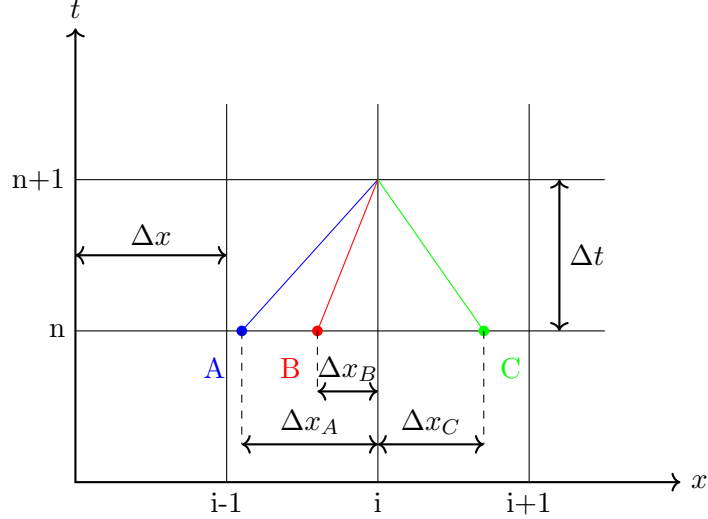


Abbildung 5.1.: Raum-Zeit-Gitter des eindimensionalen Schemas mit den Stützpunkten der Charakteristiken A/B/C.

Die Umstellung von Gl. (5.12) nach dem totalen Differential der inneren Energie und die explizite Zeit-Integration der Gleichungen Gl. (5.12-5.14) führt zu den Differenzgleichungen

$$\frac{u_i^{n+1} - u_B}{\Delta t} - \frac{p_i^n}{(\rho_i^n a_i^n)^2} \frac{p_i^{n+1} - p_B}{\Delta t} + c_B f_{x,i}^n = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_A}{\Delta t} + (\rho a)_i^n \frac{c_i^{n+1} - c_A}{\Delta t} - (\rho a)_i^n f_{x,i}^n = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_C}{\Delta t} - (\rho a)_i^n \frac{c_i^{n+1} - c_C}{\Delta t} + (\rho a)_i^n f_{x,i}^n = 0 \quad (5.20)$$

Durch Einsetzen und Umformen ergeben sich die Bestimmungsgleichungen zu

$$p_i^{n+1} = \frac{1}{2} ((\rho a)_i^n (c_A - c_C) + (p_A + p_C)) \quad (5.21)$$

$$c_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\rho a)_i^n} (p_A - p_C) + (c_A + c_C) \right) + f_{x,i}^n \Delta t \quad (5.22)$$

$$u_i^{n+1} = u_B + \frac{p_i^n}{(\rho_i^n a_i^n)^2} (p_i^{n+1} - p_B) - c_B f_{x,i}^n \Delta t \quad (5.23)$$

Die Indizes A/B/C beziehen sich dabei auf die Stützpunkte der Charakteristiken, vgl. Abb. 5.1. Diese werden zwischen den Gitterpunkten  $i-1, i, i+1$  in der Zeitebene  $n$  linear interpoliert und damit räumlich erster Ordnung diskretisiert. Dafür sind wiederum die zunächst unbekanntenen Positionen der Basispunkte erforderlich, die von der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  sowie der Schallgeschwindigkeit  $a$  im jeweiligen Stützpunkt abhängig sind. Gemäß der expliziten Upwind-Diskretisierung erster Ordnung gelten entlang der Charakteristik die Größen im Stützpunkt, so dass bspw. für den Stützpunkt A gilt:

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x} = \frac{(c_A + a_A) \Delta t}{\Delta x} \quad (5.24)$$

wobei

$$c_A = c_i^n - \frac{\Delta x_A}{\Delta x} (c_i^n - c_{i-1}^n) \quad \text{sowie} \quad (5.25)$$

$$a_A = a_i^n - \frac{\Delta x_A}{\Delta x} (a_i^n - a_{i-1}^n) . \quad (5.26)$$

Das Vorgehen ist für die übrigen Stützpunkte analog, so dass sich für die Stützpunktpositionen ergibt:

$$\Delta x_A = \left( \frac{(c_i^n + a_i^n)}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (c_i^n - c_{i-1}^n + a_i^n - a_{i-1}^n)} \right) \cdot \Delta x \quad (5.27)$$

$$\Delta x_B = \left( \frac{c_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (c_i^n - c_{i-1}^n)} \right) \cdot \Delta x \quad (5.28)$$

$$\Delta x_C = \left( \frac{(c_i^n - a_i^n)}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (c_{i+1}^n - c_i^n - a_{i+1}^n + a_i^n)} \right) \cdot \Delta x \quad (5.29)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Gasströmungen betrachtet. Zur Schließung des Systems Gl. (5.21-5.23) werden daher die thermische (Gl. (2.7)) und kalorische Zustandsgleichung (Gl. (2.8)) für ideale Gase verwendet. Die Schallgeschwindigkeit wird über die diskretisierte Form der allgemeinen Definition der Schallgeschwindigkeit (Gl. (2.18)) bestimmt

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} . \quad (5.30)$$

Dabei wird die Differenz entlang der Energiecharakteristik im vorherigen Zeitschritt gebildet, so dass das System weiterhin explizit bleibt. Durch diese allgemeingültige Formulierung ergibt sich für rein akustische und reibungsfreie Probleme die Schallgeschwindigkeit nach Gl. (2.20). Für stark dissipative Strömungen tendiert die Schallgeschwindigkeit gegen die isotherme Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{nRT} \quad \text{mit } n = 1 . \quad (5.31)$$

Für den Fall  $\Delta \rho = 0$  wird die lineare Schallgeschwindigkeit  $a_0$  nach Gl. 2.20 verwendet. Da Gl. (5.30) - abgesehen von der Linearisierung - keine vereinfachenden Annahmen zu Grunde liegen, ist der Zusammenhang allgemein gültig. [Tet17]

An den Rändern der numerischen Domain kann mindestens eine Charakteristik nicht gelöst werden, da die Informationen außerhalb der Domain fehlen, vgl. **Abb. 5.2**. Für ein „linkes Ende“ betrifft dies Gl. (5.19), für ein „rechtes Ende“ entsprechend Gl. (5.20). Um das dadurch reduzierte Gleichungssystem zu schließen muss somit eine Randbedingung vorgegeben werden. Üblicherweise wird der Druck oder die Strömungsgeschwindigkeit vorgegeben, da auf diese Weise die Grenzen physikalisch definiert werden. Durch die starke Kopplung der Schallcharakteristiken ergibt sich bei Vorgabe des Druckes die Strömungsgeschwindigkeit zu:

$$c_i^{n+1} = c_C + \frac{1}{(\rho a)_i^n} (p_i^{n+1} - p_C) + \Delta t f_{x,i}^n \quad \text{„linkes Ende“ bzw.} \quad (5.32)$$

$$c_i^{n+1} = c_A + \frac{1}{(\rho a)_i^n} (p_A - p_i^{n+1}) + \Delta t f_{x,i}^n \quad \text{„rechtes Ende“} \quad (5.33)$$

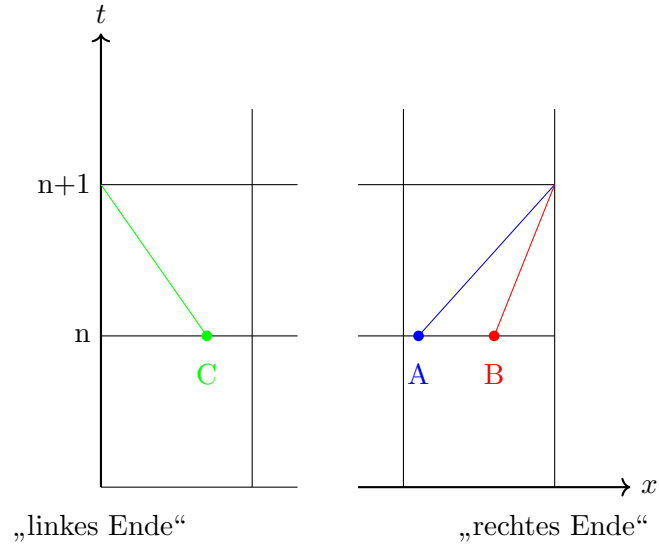


Abbildung 5.2.: Raum-Zeit-Gitter mit Charakteristiken an den Rändern der Domain für positive Strömungsgeschwindigkeit

Entsprechend ergibt sich bei Vorgabe der Strömungsgeschwindigkeit der Druck am Rand der Domain zu

$$p_i^{n+1} = p_C + (\rho a)_i^n (c_i^{n+1} - c_C) - \Delta t f_{x,i}^n \quad \text{„linkes Ende“ bzw.} \quad (5.34)$$

$$p_i^{n+1} = p_A + (\rho a)_i^n (c_A - c_i^{n+1}) + \Delta t f_{x,i}^n \quad \text{„rechtes Ende“} \quad (5.35)$$

Die Energiecharakteristik Gl. (5.18) ist nur schwach mit den Schallcharakteristiken durch die Dichte  $\rho$  sowie die Schallgeschwindigkeit  $a$  gekoppelt und wird daher nach Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  und des Druckes  $p$  gelöst. An einem Einströmrand („linkes Ende“ in Abb. 5.2) muss eine energetische Randbedingung vorgegeben werden, was üblicherweise in Form einer Temperatur geschieht. Am Ausströmrand („rechtes Ende“ in Abb. 5.2) ergibt sich die energetische Information aus dem Inneren der Domain.

## 5.2. Dreidimensionales Schema

Im Folgenden wird die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen in integraler Form dargelegt. Die Beiträge der unterschiedlichen physikalischen Mechanismen werden bei integraler Bilanzierung separat betrachtet, so dass sich unter Verwendung von Finite-Volumen-Diskretisierung für den konvektiven bzw. diffusiven Fluss sowie die Quellterme unterschiedliche Diskretisierungsmethoden verwenden lassen. In der semi-diskretisierten Form einer Erhaltungsgleichung sind die räumlichen Terme diskret formuliert, die zeitliche Integration allerdings noch nicht durchgeführt. Daher wird anhand der semi-diskretisierten Erhaltungsgleichung die Diskretisierung der Flüsse

unabhängig von einem zeitlichen Integrationsschema, welches im Rahmen der vorliegenden Arbeit variiert wird, erläutert. Die transiente semi-diskretisierte integrale Erhaltungsgleichung einer skalaren Erhaltungsgröße  $\phi$  über ein unveränderliches Volumen  $V_J$  lautet [MDM16]:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\overline{\rho\phi})}{\partial t} V_J dt + \int_t^{t+\Delta t} \sum_k F_{f_k}^C dt + \int_t^{t+\Delta t} \sum_k F_{f_k}^D dt = \int_t^{t+\Delta t} Q_J V_J dt \quad (5.36)$$

Der Ausdruck  $\overline{\rho\phi}$  beschreibt die über das Zellvolumen  $V_J$  gemittelte Erhaltungsgröße und entspricht dem Zellmittelpunktswert  $(\rho\phi)_J$ . Die konvektiven Flüsse  $F^C$  und die diffusiven Flüsse  $F^D$  werden jeweils über sämtliche zellbegrenzenden Flächen  $f_k$  aufsummiert. Da in OpenFOAM die Impulsgleichung in jede Raumrichtung separat gelöst wird, ist die skalare Gleichung Gl. (5.36) repräsentativ für jede der zu lösenden Erhaltungsgleichungen.

Anhand der skizzierten benachbarten Zellen in **Abb. 5.3** werden nun die in der vorliegenden Arbeit verwendeten diskreten Formen der unterschiedlichen Terme in Gl. (5.36) vorgestellt. Der Mittelpunkt der betrachteten Zelle ist  $J$ , die Mittelpunkte der benachbarten Zellen  $W$  bzw.  $E$ . Die Mittelpunkte der Zellflächen  $f_w$  und  $f_e$  werden mit  $w$  bzw.  $e$  bezeichnet. Dabei sind  $S_w$  bzw.  $S_e$  die Flächeninhalte der jeweiligen Zellflächen.  $\Delta x$  ist die Größe der Zelle in x-Richtung und  $\delta x$  der Abstand der Zellmittelpunkte in x-Richtung.

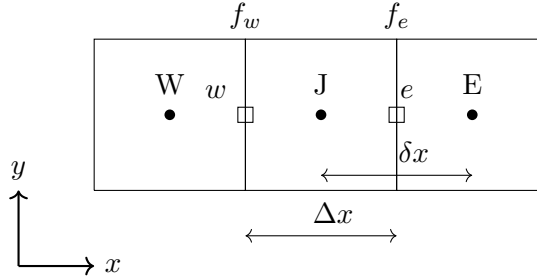


Abbildung 5.3.: Benachbarte FV-Zellen mit entsprechender Notation

Der diffusive Flussterm wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit linearer Interpolation diskretisiert und ergibt sich somit für die Fläche  $S_e$  zu [Ruo16, MDM16]

$$F_e^{\phi,D} = -\Gamma_e^\phi S_e \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e = -\Gamma_e^\phi S_e \frac{\phi_E - \phi_J}{\delta x} . \quad (5.37)$$

Dabei repräsentiert  $\Gamma^\phi$  den Diffusionskoeffizienten der Erhaltungsgröße  $\phi$ .

Die konvektiven Flüsse werden ebenfalls mit zentralen Differenzen gebildet und ergeben sich damit zu [Ruo16, MDM16]

$$F_e^{\phi,C} = (\rho c)_e S_e \phi_e = \left( (\rho c)_J + \frac{(\rho c)_E - (\rho c)_J}{\delta x} (x_e - x_J) \right) S_e \left( \phi_J + \frac{\phi_E - \phi_J}{\delta x} (x_e - x_J) \right) . \quad (5.38)$$

Für äquidistante Netze ( $\Delta x = \delta x = const$ ) gilt zudem folgender Ausdruck:

$$F_e^{\phi,C} = \left( \frac{(\rho c)_E + (\rho c)_J}{2} \right) S_e \left( \frac{\phi_E + \phi_J}{2} \right) \quad (5.39)$$

Von einigen Strömungsgrößen wird der Gradient benötigt. Dies gilt beispielsweise für den Druck oder die Querdiffusion in der Impulsgleichung. In der Bilanzierung werden diese Terme als Quellen behandelt. Ein weit verbreiteter und ebenfalls in OpenFOAM verwendeter Ansatz zur Bestimmung des Gradienten ist das Green-Gauss-Theorem, welches in diskreter Form unter Verwendung des Mittelwert-Theorems folgende Bestimmungsgleichung für den Gradienten am Zellmittelpunkt  $J$  ergibt [Ruo16,MDM16]:

$$\nabla\phi_J = \frac{1}{V_J} \sum_k \phi_{f_k} \vec{n}_{f_k} S_{f_k} \quad (5.40)$$

Die Größen auf den Zellflächen  $f_k$  werden linear interpoliert, so dass bspw. für die Fläche  $f_e$  gilt

$$\phi_e = g_J \phi_J + (1 - g_J) \phi_E, \quad (5.41)$$

wobei  $g_J$  die Gewichtung der Abstände von den Zellmittelpunkten zu den Zellflächenmittelpunkten darstellt. Für die Approximation des Gradienten am Zellmittelpunkt  $J$  des eindimensionalen, äquidistanten Gitters in Abb. 5.3 gilt somit

$$\nabla\phi_J = \frac{\phi_e - \phi_w}{\Delta x} = \frac{\frac{\phi_E + \phi_J}{2} - \frac{\phi_J + \phi_W}{2}}{\Delta x} = \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x}. \quad (5.42)$$

Zur Bestimmung von Gradienten auf Zellflächen wird wiederum linear interpoliert, so dass bspw. für die Fläche  $e$  in Abb. 5.3 gilt:

$$\nabla\phi_e = g_J \nabla\phi_J + (1 - g_J) \nabla\phi_E \quad (5.43)$$

Die angeführten Formen der Diskretisierungsvorschriften sind uneingeschränkt gültig für kartesische sowie, wenn angegeben, äquidistante Gitter. Im Allgemeinen sind diese Eigenschaften bei FV-Gittern, insbesondere bei komplexen Geometrien, nicht gegeben, so dass eine Reihe von Korrekturen, bspw. zur Nicht-Orthogonalität, bei diversen Interpolationsoperationen erforderlich werden. Zu weiteren Informationen dieser grundsätzlich wichtigen, bei den weiteren Analysen dieser Arbeit jedoch nicht relevanten, Korrekturtermen, sei auf die Literatur verwiesen, bspw. [Ruo16,MDM16,Hir07,Sch13].

Zur Lösung der diskretisierten Gleichungssysteme wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit der Löser *rhoPimpleFoam* verwendet. Dieser Solver für transiente, kompressible Strömungsprobleme kombiniert den kompressiblen SIMPLE<sup>1</sup>- sowie den kompressiblen PISO<sup>2</sup>-Algorithmus. [Ope17]

---

<sup>1</sup>Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

<sup>2</sup>Pressure-Implicit Split-Operator



## 6. Reflexionsfreie Randbedingung

Im folgenden Abschnitt wird die entwickelte reflexionsfreie Randbedingung für periodische Probleme mit Vorgabe eines zeitlichen Mittelwertes für den eindimensionalen CV-Löser vorgestellt. Zunächst wird die zu Grunde liegende Theorie erläutert. Die Formulierung der Randbedingung wird im Frequenzbereich, und damit basierend auf der Annahme linearer Wellenausbreitung, hergeleitet. Die entwickelte Theorie wird auf die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen angewendet und die diskreten Bestimmungsgleichungen für die Implementierung abgeleitet. Anschließend wird die implementierte Randbedingung hinsichtlich Einhaltung des geforderten Mittelwertes sowie der Reflexionseigenschaften umfassend evaluiert. Dabei werden möglichst allgemeingültige Einflussparameter abgeleitet. Zudem wird ein Vergleich mit in der Literatur verfügbaren Konzepten durchgeführt. Um weitere Einflüsse bei den Untersuchungen der Randbedingung auszuschließen, werden Reibungsterme im Folgenden vernachlässigt.

Die reflexionsfreie Randbedingung wird zur Implementierung im eindimensionalen CV-Löser entwickelt. Ein naheliegendes Lösungskonzept ist daher eine charakteristische Randbedingung, vgl. Abs. 3.2. Um einen Drift der mittleren Größen zu vermeiden, ist ein Korrekturterm zu entwickeln, der folgende Kriterien erfüllt:

- Gewährleistung eines konstanten, definierbaren Mittelwertes für Druck oder Geschwindigkeit
- möglichst keine Beeinflussung des angestrebten Reflexionsverhaltens

Eine charakteristische Randbedingung basiert darauf, dass die Amplitude der von außerhalb der Domain einlaufenden Charakteristik zu Null gesetzt wird. In physikalischer Hinsicht wird dadurch postuliert, dass keine in die Domain einlaufende Schallwelle oder Störung existiert. Diese Zusammenhänge sind für ein „rechtes Ende“ (Ausströmrand) bei positiver Strömungsgeschwindigkeit in **Abb. 6.1** anhand des Raum-Zeit-Gitters illustriert.

Die Strömungsgrößen am Stützpunkt  $C$  werden in den Bestimmungsgleichungen der Schallfeldgrößen (5.21-5.22) durch die Größen im Raumpunkt  $i$  zum bekannten Zeitpunkt  $n$  ersetzt. Die Bestimmungsgleichungen der klassischen charakteristischen Randbedingung ( $CRB$ ) lauten [Hed79]

$$p_{CRB}^{(n+1)} = \frac{1}{2} (\rho_i^n a_i^n (c_A - c_i^n) + (p_A + p_i^n)) \quad (6.1)$$

$$c_{CRB}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_i^n a_i^n} (p_A - p_i^n) + (c_A + c_i^n) \right) . \quad (6.2)$$

Die Schallcharakteristiken sind nur über die Schallgeschwindigkeit  $a$ , die Dichte  $\rho$  sowie den Druck  $p$  mit der Energiecharakteristik gekoppelt. Dies wird deutlich bei einer Betrachtung von Gl. (5.23), da



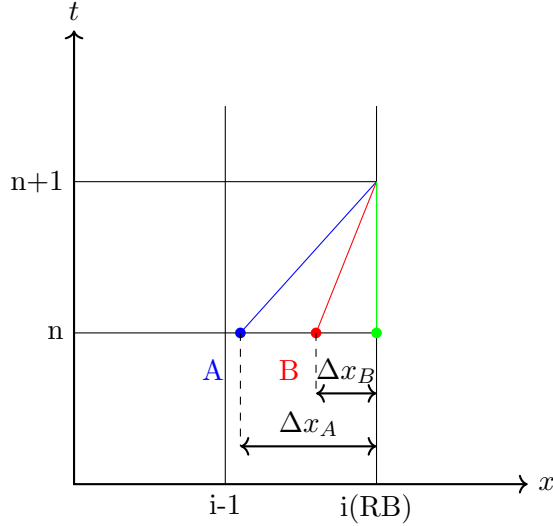


Abbildung 6.1.: Raum-Zeit-Gitter des eindimensionalen Schemas an einer charakteristischen nicht-reflektierenden Randbedingung.

die Größen der Stützpunkte der Schallcharakteristiken nicht enthalten sind. Da die Modifikation der einlaufenden Schallcharakteristik (Verschiebung des Stützpunktes  $C$  für ein "rechtes Ende") die einzige Änderung der Bestimmungsgleichungen an der charakteristischen Randbedingung darstellt, ändert sich die Behandlung der Energie gegenüber den Ausführungen in Abs. 5.1 nicht. Im Kontext der nicht reflektierenden Randbedingung für die Schallcharakteristiken ohne signifikante Temperaturgradienten ist die innere Energie somit von untergeordneter Relevanz und wird in diesem Kapitel nicht weiter betrachtet.

Soll die Randbedingung zusätzlich zur Reflexionsfreiheit weitere Eigenschaften hinsichtlich des Druckes aufweisen oder sollen die Reflexionseigenschaften auf eine beliebige Art modifiziert werden, so kann zu der Formulierung der klassischen charakteristischen Randbedingung ein (zunächst nicht näher definierter) Druckkorrekturterm  $p_{korr}$  addiert werden, so dass:

$$p_{RB}^{(n+1)} = p_{CRB}^{(n+1)} + p_{korr} = \frac{1}{2} (\rho_i^n a_i^n (c_A - c_i^n) + (p_A + p_i^n)) + p_{korr} \quad (6.3)$$

Analog dazu kann zur Modifikation der Strömungsgeschwindigkeit  $c$  anstelle von Gl. (6.1) die Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit Gl. (6.2) um einen Geschwindigkeitskorrekturterm  $c_{korr}$  erweitert werden zu

$$c_{RB}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_i^n a_i^n} (p_A - p_i^n) + (c_A + c_i^n) \right) + c_{korr} . \quad (6.4)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll mit Hilfe eines Korrekturterms eine Vorgabe von zeitlich gemittelten Größen an der Randbedingung realisiert werden. Dazu ist ein mittlerer Vorgabewert  $\bar{p}_{RB,soll}$  bzw.  $\bar{c}_{RB,soll}$  zu definieren und der entsprechende Korrekturterm in Abhängigkeit dieser Größe zu formulieren:

$$p_{korr} = f(\bar{p}_{RB,soll}) \quad \text{bzw.} \quad (6.5)$$

$$c_{korr} = f(\bar{c}_{RB,soll}) \quad (6.6)$$

In der verfügbaren Literatur wird der Korrekturterm zur Vorgabe einer gemittelten Größe in Form eines linearen Relaxationsterm (LRT) formuliert, vgl. Abs. 3.2. Im Rahmen des LRT-Ansatzes wird üblicherweise ein mittlerer Soll-Druck vorgegeben. Der Druckkorrekturterm wird dabei zu jedem Zeitpunkt  $t$  proportional zu der Differenz des Druckes der klassischen charakteristische Randbedingung  $p_{CRB}(t)$  und des geforderten mittleren Druckes  $\bar{p}_{RB,soll}$  gebildet:

$$p_{korr,LRT}(t) = \Delta t K (\bar{p}_{RB,soll} - p_{CRB}(t)) \quad (6.7)$$

Dabei ist  $K$  eine Konstante, die in der Literatur oftmals anhand der Geometrie der Domain oder dimensionsloser Kennwerte wie bspw. der Machzahl festgelegt wird. Rudy und Strikwerda formulierten  $K$  wie folgt [RS80]:

$$K = \sigma \left(1 - \overline{Ma}^2\right) \left(\frac{a_0}{l}\right) \quad (6.8)$$

Dabei steht  $l$  für die Länge der numerischen Domain und  $\sigma$  ist ein Parameter, der hinsichtlich der Einhaltung der geforderten Gleichgrößen sowie der Reflexionseigenschaften optimiert wird. In der Literatur werden Werte von bspw.  $\sigma_{opt} = 0,58$  oder  $\sigma_{opt} = 0,27$  vorgeschlagen [RS80, Poi92]. Selle et al. geben optimale Werte von  $0,2 < \sigma < \pi$  an [SNP04]. Polifke et al. verwenden einen Wert von  $K = 165$ , welcher gerade groß genug ist, um eine Drift der Gleichgrößen zu unterbinden [PWM06].

## 6.1. Theorie der filterbasierten Randbedingung

Die Herleitung des Korrekturterms für die im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte nichtreflektierende Randbedingung wird im Folgenden exemplarisch für die Vorgabe eines mittleren Druckes durchgeführt. Gleiches gilt analog für die Vorgabe einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Die zu entwickelnde Randbedingung wird zur Anwendung bei periodischen Schwankungen konzipiert. Es bietet sich daher an, die Problemstellung im Frequenzbereich zu betrachten, da auf diese Weise das Frequenzverhalten des Druckkorrekturterms gezielt modifiziert werden kann.

Das zu lösende System der eindimensionalen Erhaltungsgleichungen Gl. (5.12-5.14) ist nichtlinear, verhält sich jedoch für kleine akustische Machzahlen ( $Ma_{ak} \rightarrow 0$ ) näherungsweise linear. Im eingeschwungenen Zustand verhält sich das System zudem zeitinvariant, so dass Gl. (6.3) unter den genannten Annahmen ein diskretes LTI-System beschreibt. Da für LTI-Systeme das Superpositionsprinzip gilt, lässt sich die Fourier-Transformation der Bestimmungsgleichung der charakteristischen Randbedingung mit Druckkorrekturterm (Gl. (6.3)) wie folgt ausdrücken [Mey11]:

$$\mathcal{F}(p_{RB}(t)) = \mathcal{F}(p_{CRB}(t) + p_{korr}(t)) = \mathcal{F}(p_{CRB}(t)) + \mathcal{F}(p_{korr}(t)) \quad (6.9)$$

Unter der vereinfachenden Annahme linearer Wellenausbreitung kann also ein allgemein gültiger Ausdruck für den Druckkorrekturterm entwickelt werden, dessen Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}(p_{korr}(t))$  der Fourier-Transformierten der klassischen charakteristischen Randbedingung  $\mathcal{F}(p_{CRB}(t))$  überlagert

wird. Diese beiden Terme werden dazu im Folgenden im Frequenzbereich analysiert. Die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}$  eines harmonischen Signals entspricht einer komplexen Amplitude. Die Fouriertransformierte eines linearen Operators entspricht einer komplexen Übertragungsfunktion  $\underline{H}(\omega)$ .

Im eingeschwungenen Zustand lässt sich das lokale Verhalten der klassischen charakteristischen Randbedingung (Gl. 6.1) unter Annahme einer harmonischen Lösung des Druckes und linearer Wellenausbreitung im Frequenzbereich darstellen als

$$\hat{p}_{CRB} = \underline{H}_{CRB}(\omega, \Delta t) \cdot \hat{p}_A . \quad (6.10)$$

Dabei ist  $\hat{p}_A$  die akustische Welle, die sich am Stützpunkt A aus dem Inneren der Domain ergibt, vgl. Abb. 6.1. Nach Gl. (6.1) ist die lokale Lösung des Druckes außerdem von der Schnelle  $c_A$  am Stützpunkt A sowie der Lösung am Punkt i abhängig. Für den reflexionsfreien Fall sind jedoch Druck und Schnelle in Phase und über die Impedanz proportional:

$$\hat{p}_A = \rho_A a_A \cdot \hat{c}_A \quad (6.11)$$

Weiterhin entsprechen die Strömungsgrößen am Randpunkt i den Größen im Stützpunkt A und sind lediglich um ein zeitschrittabhängiges Inkrement  $\Delta\varphi(\omega, \Delta t)$  phasenversetzt. Gl. (6.10) ist somit unter Annahme von Reflexionsfreiheit an der Randbedingung sowie einer harmonischen Lösung eine äquivalente Formulierung zu Gl. (6.1). Unter der weiteren Annahme linearer Verhältnisse erweitert sich die Gültigkeit zudem auf beliebige periodische Signale, wobei  $\hat{p}_{CRB}$  jeweils eine Frequenzkomponente repräsentiert.

Unter den genannten Annahmen lässt sich Gl. (6.9) in Form von Übertragungsfunktionen ausdrücken:

$$\hat{p}_{RB} = \underline{H}_{CRB}(\omega, \Delta t) \cdot \hat{p}_A + \underline{H}_{korr}(\omega, \Delta t) \cdot \hat{p}_A \quad (6.12)$$

Eine Formulierung für den Korrekturterm  $p_{korr}(t)$ , die den oben genannten Zielkriterien genügt, kann nun anhand einer Übertragungsfunktion  $\underline{H}_{korr}(\omega, \Delta t)$  bestimmt werden, die die Übertragungsfunktion der klassischen charakteristischen Randbedingung  $\underline{H}_{CRB}(\omega, \Delta t)$  geeignet ergänzt.

Der Phasengang der klassischen charakteristischen Randbedingung ist ausschließlich abhängig von der numerischen Zeitschrittweite  $\Delta t$  und gegeben durch

$$\varphi_{\underline{H}_{CRB}} = \Delta t \cdot \omega . \quad (6.13)$$

Die Amplitude der lokalen Lösung ändert sich im eingeschwungenen Zustand nicht. Daher ist der Amplitudengang der charakteristischen Randbedingung (unter Vernachlässigung numerischer Diffusion) für sämtliche Frequenzen

$$|\underline{H}_{CRB}| = const = 1 . \quad (6.14)$$

Die Amplituden sämtlicher Harmonischer - einschließlich des Gleichanteils - werden von der Lösung im Inneren der Domain bestimmt. Aufgrund der fehlenden definierten Konstant-Randbedingung existiert für das Anfangsrandwert-Problem, das mathematisch-physikalische Modell der gesamten Domain, keine eindeutige Lösung, woraus der Drift des Gleichanteils resultiert [PWM06].

Um den Gleichanteil des Druckes an der Randbedingung  $p_{RB}(t)$  auf einen geforderten Wert  $\bar{p}_{RB,soll}$  bringen zu können, muss dieser zunächst bekannt sein und daher kontinuierlich aus der numerischen Lösung extrahiert werden. Als Ansatz für das Übertragungsverhalten des Korrekturterms  $\underline{H}_{korr}$  wird daher das eines Tiefpass (TP)-Filters gewählt. Das einfachste TP-Filter ist der gleitende Mittelwert (GMW). Der Amplitudengang eines diskreten GMW-Filters ist in **Abb. 6.2** dargestellt. Die Frequenzachse ist dabei auf die Grenzfrequenz  $f_{Gr} = \frac{f_A}{2}$  normiert, wobei  $f_A$  die Abtastfrequenz des Filters darstellt. Es ist zu erkennen, dass der Mittelwert bzw. Gleichanteil ( $f = 0$ ) stets ungedämpft bleibt. Zudem kann der Amplitudengang durch die Anzahl der bewerteten Abtastwerte  $n_A$  (Fensterbreite des Filters) derart „kalibriert“ werden, dass eine definierte Grundfrequenz sowie deren Höherharmonischen vollständig herausgefiltert werden.

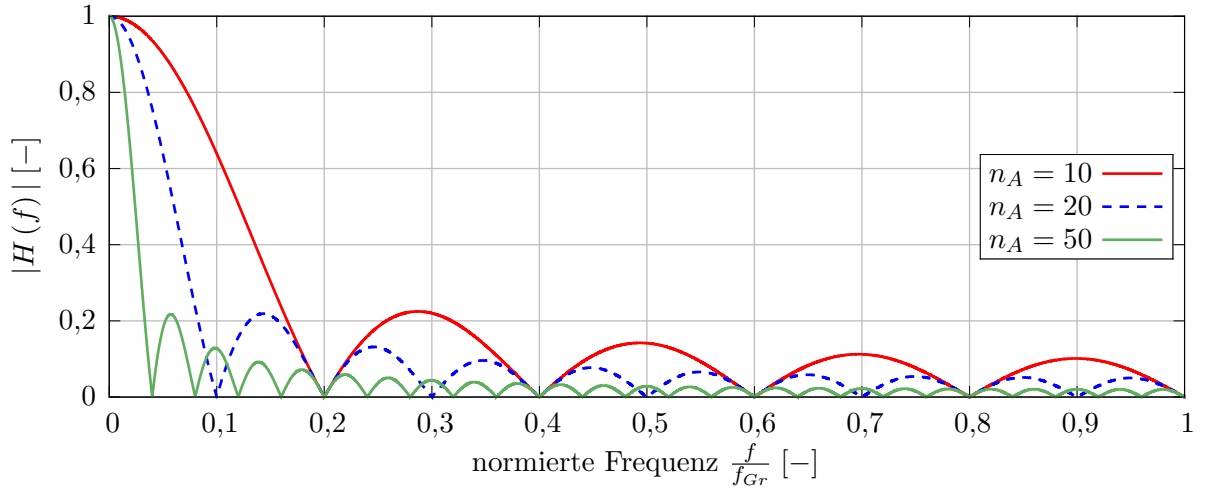


Abbildung 6.2.: Normierter Amplitudengang des gleitenden Mittelwerts bei exemplarischen Anzahlen an Abtastwerten  $n_A$

Der Amplitudengang eines diskreten GMW-Filters ist gegeben durch [Smi99]:

$$|\underline{H}_{GMW}(f)| = \left| \frac{1}{n_A} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_{Gr}} \cdot n_A\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_{Gr}}\right)} \right| = \left| \frac{1}{n_A} \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{f}{f_A} \cdot n_A\right)}{\sin\left(\pi \cdot \frac{f}{f_A}\right)} \right| \quad (6.15)$$

Die kleinste vollständig gefilterte Frequenz (bspw.  $\frac{f}{f_{Gr}} = 0,1$  für  $n_A = 20$  in Abb. 6.2), die Filterbasisfrequenz  $f_B$ , ergibt sich zu

$$f_B = \frac{f_A}{n_A}. \quad (6.16)$$

Wird nun ein GMW-Filter bei der Simulation einer pulsierenden Strömung derart an die Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  angepasst, dass gilt

$$f_B = f_G \quad (6.17)$$

und auf die Lösung an der Randbedingung angewendet, so ergibt sich - unter der Voraussetzung, dass ausschließlich ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $f_G$  auftreten - der Mittelwert der Lösung. Es gilt:

$$\bar{p}_{RB,ist} = \underline{H}_{GMW}(\omega) \mathcal{F}(p_{RB}(t)) \quad (6.18)$$

Der Phasengang - bei nicht-rekursiven Filtern wie dem GMW stets linear - ist irrelevant [Mey11], da sämtliche Schwankungskomponenten aus dem Signal gefiltert werden und der Konstantanteil keine Phase besitzt.

## 6.2. Implementierung der GMW-filterbasierten Randbedingung

Zur Einhaltung eines geforderten Mittelwertes  $\bar{p}_{RB,soll}$  muss nun die Differenz zwischen Soll- und Ist-Wert berücksichtigt werden. Für die Anwendung in dem verwendeten Zeitschrittverfahren muss dazu das Filter zunächst im Zeitbereich formuliert werden. Das Ausgangssignal eines diskreten GMW-Filters mit der Anzahl an Abtastwerten  $n_A$  ist - übertragen auf die Größen an der Randbedingung - gegeben durch [Mey11]:

$$p_{GMW}(t) = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} p_{RB}(t - i\Delta t) \quad (6.19)$$

Anhand von Gl. (6.16) und Gl. (6.17) lässt sich folgender Zusammenhang zur Anpassung der Anzahl der Abtastwerte  $n_A$  an die Grundfrequenz der simulierten periodischen Schwankungen  $f_G$  bei einem numerischen Zeitschritt<sup>1</sup> von  $\Delta t$  ableiten:

$$n_A = \frac{f_A}{f_G} = \frac{1}{\Delta t \cdot f_G} \quad (6.20)$$

Bei einer nach Gl. (6.20) gewählten Anzahl an Samples  $n_A$  ist Gl. (6.17) erfüllt, so dass die Filterbasisfrequenz  $f_B$  identisch mit der Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  ist. Dies entspricht der üblichen Konfiguration des Filters für praktische Anwendungen, da die Anregungsgrundfrequenz in diesem Fall mit der minimal erforderlichen Anzahl an Filterabtastwerten vollständig herausgefiltert wird. An dieser Stelle sei die normierte Anregungsgrundfrequenz eingeführt, die definiert ist als das Verhältnis der Grundfrequenz der Anregung und der Filterbasisfrequenz:

$$f_{G,n} = \frac{f_G}{f_B} \quad (6.21)$$

Bei einer Auslegung des Filters nach Gl. (6.20) ist  $f_{G,n} = 1$ . Im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen der Einflussparameter wird die normierte Anregungsgrundfrequenz variiert. Es sei darauf hingewiesen, dass eine vollständige Filterung der Anregungsgrundfrequenz sowie deren Höherharmonischen ausschließlich für  $f_{G,n} \in \mathbb{N}^+$  erzielt werden kann.

---

<sup>1</sup>Der numerische Zeitschritt einer Simulation entspricht dem Reziprok der Abtastfrequenz des Filters  $f_A = \frac{1}{\Delta t}$ , da jeder Abtastwert bewertet wird.

Für ein angepasstes Filter mit  $f_{G,n} \in \mathbb{N}^+$  gilt:

$$p_{GMW}(t) = \bar{p}_{RB,ist} \quad (6.22)$$

Da die Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  und die Abtastfrequenz des Filters  $f_A$  üblicherweise vorgegeben sind und daher nicht vorausgesetzt werden kann, dass  $f_A$  einem ganzzahligen Vielfachen von  $f_G$  entspricht, gilt allgemein:

$$p_{GMW}(t) \approx \bar{p}_{RB,ist} \quad (6.23)$$

Ein reflexionsfreies Ende bei Vorgabe des zeitlich gemittelten Druckes kann somit mit Gl. (6.3) und folgendem Druckkorrekturterm realisiert werden:

$$p_{korr}(t) = \frac{\bar{p}_{RB,soll} - p_{GMW}(t)}{n_A} \quad (6.24)$$

Ein reflexionsfreies Ende mit Vorgabe einer zeitlich gemittelten Strömungsgeschwindigkeit kann analog dazu mit Gl. (6.4) und einem Korrekturterm für die Geschwindigkeit umgesetzt werden:

$$c_{korr}(t) = \frac{\bar{c}_{RB,soll} - c_{GMW}(t)}{n_A} \quad (6.25)$$

Der Nenner des Ausdrucks dient als Relaxations-Koeffizient, der die Anpassung der Lösung an den geforderten Gleichanteil glättet. Dies ist insbesondere bei sprunghaften Änderungen des Gleichanteils von Vorteil, da dadurch Instabilitäten oder z. B. die Anregung von akustischen Eigenfrequenzen im System vermieden werden.

Der Korrekturterm und damit die filterbasierte Randbedingung ist nicht auf die Anwendung bei zeitlich konstanter Anregungsfrequenz  $f_G$  beschränkt, sondern kann auch bei der Simulation von Frequenzrampen, wie bspw. bei Pulsationsstudien, verwendet werden. In diesem Fall ist die Anregungsgrundfrequenz eine Funktion der Zeit. Für eine lineare Frequenzrampe mit konstanter Steigung der Anregungsfrequenz  $m_{f_G}$  und einer initialen Anregungsgrundfrequenz von  $f_{G,0}$  gilt bspw.:

$$f_G(t) = f_{G,0} + m_{f_G} \cdot t \quad (6.26)$$

Nach Gl. (6.20) ist damit auch Anzahl der Abtastwerte  $n_A$  zeitlich variabel. Für die theoretische Anzahl an Abtastwerten bei einer linearen Frequenzrampe ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$n_{A,th} = \frac{1}{\Delta t \cdot (f_{G,0} + m_{f_G} \cdot t)} \quad (6.27)$$

Da die Anzahl der Abtastwerte  $n_A$  stets einer ganzen Zahl entsprechen muss, kann das theoretische Optimum von  $n_{A,th}$  bei kontinuierlich veränderlicher Anregungsfrequenz in der Regel nicht genau erreicht werden. Daher wird eine Näherung durch Runden auf die nächste ganze Zahl gewählt, so dass gilt:

$$n_A = \lfloor n_{A,th} + 0,5 \rfloor \quad (6.28)$$

Bei einer Rampe mit positiver Steigung nimmt dabei die Anzahl an Abtastwerten ab, bei negativer Steigung - und damit abnehmender Frequenz - nimmt  $n_A$  zu.

Nach dem Einschwingvorgang des Filters stellt der Korrekturterm  $p_{korr}$  bzw.  $c_{korr}$  eine frequenzunabhängige Konstante dar, die ausschließlich den Gleichanteil der Lösung verändert. Bei Betrachtung von Gl. (6.9) wird deutlich, dass dadurch (unter der vereinfachenden Annahme linearer Zusammenhänge) der Frequenzgang der neu entwickelten Randbedingung dem Frequenzgang der klassischen charakteristischen Randbedingung entspricht, wobei zusätzlich der Gleichanteil der Lösung  $\bar{p}_{RB,ist}$  bzw.  $\bar{c}_{RB,ist}$  identisch mit dem geforderten Gleichanteil  $\bar{p}_{RB,soll}$  bzw.  $\bar{c}_{RB,soll}$  ist.

Die Auswirkungen der Annahme linearer Verhältnisse bei der Lösung der nichtlinearen Erhaltungsgleichungen Gl.(2.9-2.11) wird in den nachfolgenden Abschnitten untersucht. Dabei ist die akustische Machzahl  $Ma_{ak}$ , die den nichtlinearen Charakter einer Welle quantifiziert, von besonderem Interesse.

### 6.3. Modell zur numerischen Validierung

Im Rahmen der Validierung der neu entwickelten GMW-filterbasierten reflexionsfreien Randbedingung (im Folgenden: GMW-Randbedingung) wird zunächst die grundsätzliche Funktionalität, die Anpassung des Gleichanteils der Lösung an einen geforderten Wert, gezeigt. Anschließend wird anhand monofrequenter Testfälle der Einfluss von überlagerter Gleichströmung und damit der Machzahl  $\overline{Ma}$  sowie der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$  auf das Reflexionsverhalten der Randbedingung untersucht. Basierend auf den ermittelten Einflussparametern werden dimensionslose Kennfelder der Randbedingung entwickelt und analysiert, die das Reflexionsverhalten der entwickelten Randbedingung allgemeingültig darstellen. Schließlich wird das Reflexionsverhalten der Randbedingung bei einer Anregung mit mehreren überlagerten Harmonischen analysiert sowie ein Vergleich mit bisherigen Ansätzen charakteristischer nichtreflektierender Randbedingungen vorgenommen.

Das generische Modell zur Validierung der GMW-Randbedingung ist in **Abb. 6.3** dargestellt und besteht aus einer eindimensionalen Domain der Länge  $l$ , die variabel ist und daher im Folgenden jeweils bei den entsprechenden Ergebnissen definiert wird. Am Einlass wird eine Neumann-Randbedingung in Form einer Geschwindigkeit  $c_{Ein}(t)$  vorgegeben (vgl. Abs. 5.1), soweit nicht anders angegeben. Am Auslass wird die GMW-Randbedingung aufgeprägt.

Sämtliche Simulationen werden mit Luft als ideales Gas durchgeführt. Weiterhin wird eine reibungsfreie Strömung angenommen. Die gesamte Domain wird, soweit nicht anders angegeben, mit einem Druck von  $p_{init} = 10^5 \text{ Pa}$ , einer Strömungsgeschwindigkeit von  $c_{init} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sowie einer Temperatur von  $T_{init} = 293,15 \text{ K}$  initialisiert. Das geometrische Modell wird, soweit nicht anders angegeben, mit einer räumlichen Schrittweite von  $\Delta x = 0,002 \text{ m}$  diskretisiert. Die zeitliche Schrittweite beträgt  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$ , so dass sich eine CFL-Zahl von  $CFL \approx 0,17$  ergibt.

Die Initialisierungsgeschwindigkeit  $c_{init}$  wird im Rahmen der Untersuchungen der Einflussparameter anhand der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  variiert. Der Mittelwert bzw. Gleichanteil der Eintrittsgeschwindigkeit  $\bar{c}_{Ein}(t)$  entspricht dabei immer der Initialisierungsgeschwindigkeit. Der Speicher für die Abtastwerte des Filters wird stets mit dem geforderten Zieldruck  $\bar{p}_{RB,soll}$  bzw. der geforderten Zielgeschwindigkeit  $\bar{c}_{RB,soll}$  initialisiert.



Abbildung 6.3.: Eindimensionales Modell zur Validierung der GMW-Randbedingung

## 6.4. Mittelwert

Die grundlegende Funktionalität der GMW-Randbedingung wird anhand eines Modells der Länge  $l = 5\text{ m}$  demonstriert. In **Abb. 6.4** sind die Zeitsignale von Druck und Strömungsgeschwindigkeit während des Einschwingvorgangs bei einer Anregungsfrequenz von  $f_G = 20\text{ Hz}$  und  $\overline{Ma} = 0$  dargestellt. Die akustische Machzahl beträgt  $Ma_{ak} = 0,01$  ( $\hat{p} \approx 1412\text{ Pa}$  für Luft bei Umgebungsbedingungen). Als Zieldruck wird ein Wert von  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5\text{ Pa}$  vorgegeben. Die Anzahl der Abtastwerte ergibt sich entsprechend Gl. (6.20) zu  $n_A = 5 \cdot 10^4$ .

Es wird ersichtlich, dass die angeregte Schallwelle vom Einlass jeweils zeitversetzt um  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$  die Mitte sowie den Auslass der Domain erreicht. Zudem zeigt sich eine niederfrequente Schwankung des Druckes (Abb. 6.4a) in allen drei Positionen und der Schnelle (Abb. 6.4b) im Inneren der Domain sowie am Auslass, die der angeregten Schwankung bei  $f_G = 20\text{ Hz}$  überlagert ist. Diese niederfrequente Schwankung wird durch das Einschwingverhalten des Filters induziert: der Speicher für die Abtastwerte des Filters muss zu Beginn der Simulation initialisiert werden.

Im vorliegenden Fall wird der Speicher mit dem Zieldruck der Randbedingung  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5\text{ Pa}$  initialisiert. Sobald die Schallwelle an der GMW-Randbedingung angelangt, beginnt der Speicher, sich mit den Abtastwerten der Schwankung zu füllen. Ein Filter schwingt daher stets solange ein, bis der gesamte Speicher mit dem zu filternden Signal gefüllt ist. Die Einschwingzeit  $t_{ES}$  des Filters selbst ergibt sich im vorliegenden Beispiel zu

$$t_{ES} = \Delta t \cdot n_A = 0,05\text{ s} . \quad (6.29)$$

Während des Einschwingvorgangs des Filters werden zudem Störungen in das System induziert, so dass sich das gesamte System ebenfalls zunächst einschwingt. Die Einschwingzeit des Systems hängt



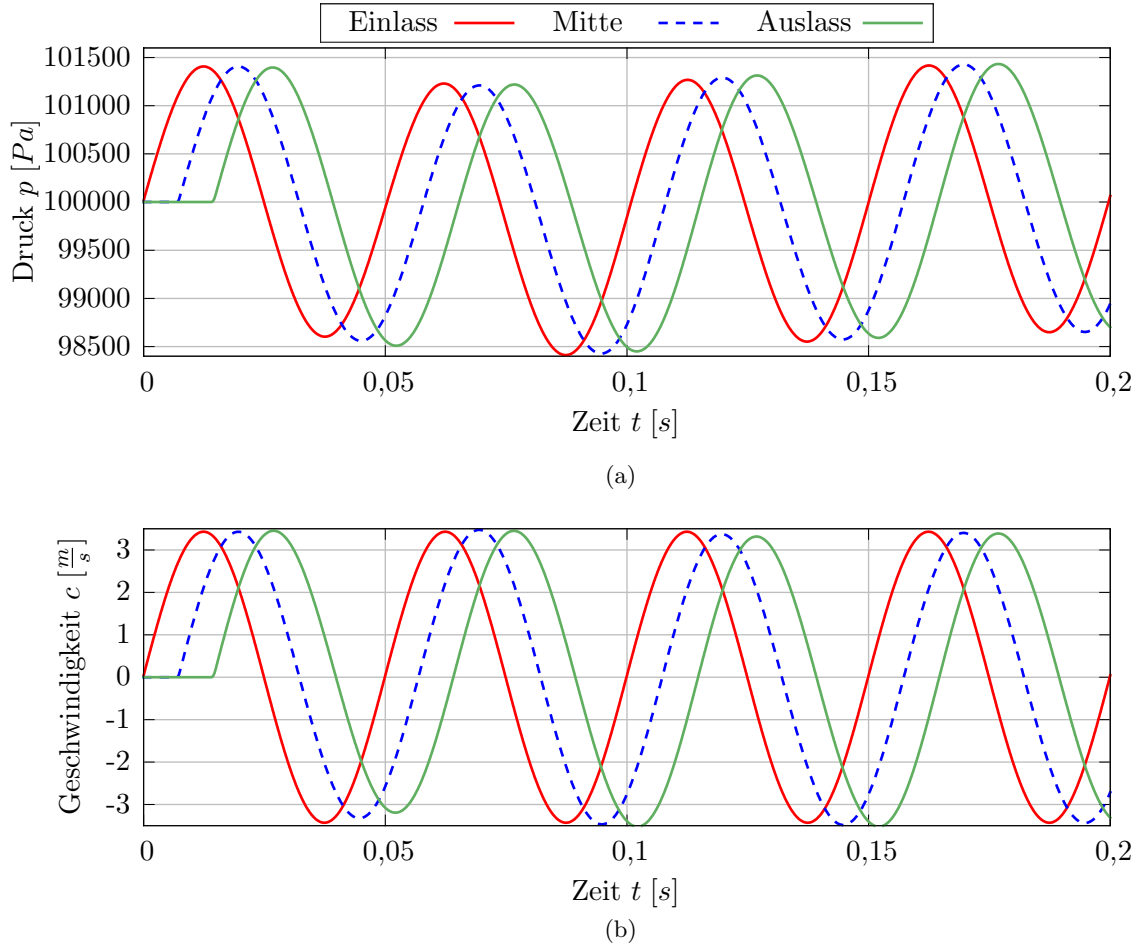


Abbildung 6.4.: Zeitsignale des Druckes (a) und der Geschwindigkeit (b) am Einlass, in der Mitte der Domain sowie an der GMW-Randbedingung (Auslass) für  $\overline{Ma} = 0$ ,  $Ma_{ak} = 0.01$  sowie  $f_G = 20$  Hz und einen mittleren Soll-Druck von  $\bar{p}_{soll} = 10^5$  Pa.

von der Dämpfungscharakteristik des Modells ab, die im vorliegenden reibungsfreien Fall sehr gering ausfällt.

### 6.4.1. Einfluss der Initialisierung der Domain

Im Folgenden wird das Verhalten der nichtreflektierenden Randbedingung bei vom Zielwert abweichenden Bedingungen untersucht. Dazu wird die Domain bei ansonsten unveränderten Bedingungen mit einem Druck von  $p_{init} = 1,1 \cdot 10^5$  Pa sowie  $p_{init} = 1,2 \cdot 10^5$  Pa initialisiert. Der Zieldruck und damit die Initialisierung des Filterspeichers der GMW-Randbedingung wird weiterhin auf  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5$  Pa gesetzt. Die Zeitsignale des Druckes am Auslass sind in **Abb. 6.5** dargestellt. Als Referenz ist die Lösung für einen Initialisierungsdruck von  $p_{init} = 10^5$  Pa ebenfalls enthalten.

Der steile Abfall zu Beginn der Druckverläufe ( $t < 0,01$ ) bei den höheren Initialisierungsdrücken resultiert aus der zuvor erläuterten Initialisierung des Speichers für die Abtastwerte des Filters mit dem Zieldruck  $\bar{p}_{RB,soll}$ . Dadurch entsteht bei Simulationsbeginn eine steiler Gradient zwischen der

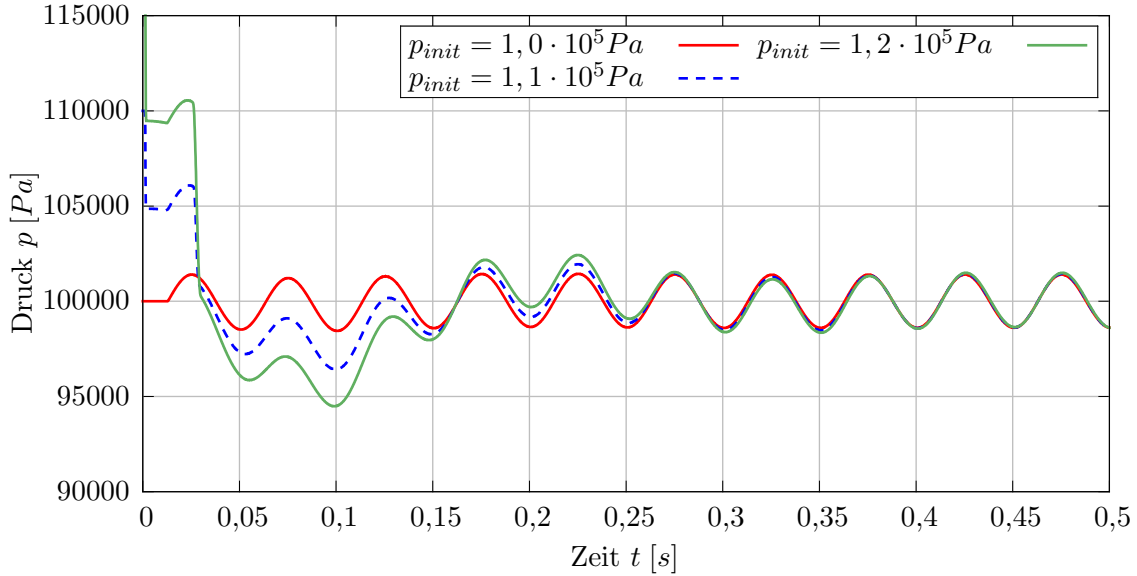


Abbildung 6.5.: Druckverlauf am Auslass der Domain bei Variation des Initialisierungsdruckes  $p_{init}$ , einer Anregungsfrequenz von  $f_G = 20 \text{ Hz}$  und einem mittleren Soll-Druck von  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5 \text{ Pa}$

Randbedingung und dem ersten Gitterpunkt im Inneren der Domain, der sich als schlagartiger Druckabfall äußert. Im weiteren Verlauf der Simulation ist zunächst die angeregte Welle, die den Auslass erreicht, zu erkennen. Der zweite steile Abfall bei etwa  $t \approx 0,03 \text{ s}$  resultiert aus der zu Beginn der Simulation induzierten Stoßwelle, die am Einlass reflektiert wird und nun wieder am Auslass angelangt.

Die stärkere Abweichung der Start- von den Zielbedingungen an der Randbedingung wirkt sich im Folgenden durch sichtliches Überschwingen der Zeitsignale des Druckes über den mittleren Sollwert von  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5 \text{ Pa}$  hinaus aus. Dieses Überschwingen ist umso deutlicher ausgeprägt, je größer die Abweichung von Initialisierungs- zu Sollwert ist. Nach einer Simulationszeit von etwa  $t \approx 0,3 \text{ s}$  pendeln sich sämtliche Verläufe um den geforderten Druck ein und sind im Folgenden nahezu gleich.

Das Einschwingverhalten der reflexionsfreien Randbedingung bei Vorgabe einer mittleren Zielgeschwindigkeit wird ebenfalls untersucht. Dazu werden Simulationen mit unveränderten Initialisierungsbedingungen durchgeführt. Am Auslass wird anstatt eines mittleren Druckes eine mittlere Soll-Geschwindigkeit  $\bar{c}_{RB,soll}$  vorgegeben und zur Gewährleistung eines wohl gestellten Problems wird am Eintritt eine Neumann-Randbedingung in Form einer harmonischen Druckanregung  $p(t)$  aufgeprägt, (vgl. Abs. 5.1).

Die Geschwindigkeitsverläufe bei Vorgabe einer mittleren Soll-Geschwindigkeit an der Randbedingung sind in **Abb. 6.6** bei einer Anregung mit  $Ma_{ak} = 0,01$  und  $f_G = 20 \text{ Hz}$  abgebildet. Die Lösungen sind für zwei unterschiedliche Soll-Geschwindigkeiten dargestellt. Für den Fall, dass der Initialisierungs- und Zielwert voneinander abweichen ( $\bar{c}_{RB,soll} = 10 \frac{m}{s}$ ) ist wiederum der oben

beschriebene Überschinger über den geforderten Mittelwert hinaus zu erkennen. Es zeigt sich zudem, dass die geforderten mittleren Geschwindigkeiten in beiden Fällen nach kurzer Einschwingzeit erreicht und gehalten werden, wie bereits zuvor bei der Druckvorgabe gezeigt.

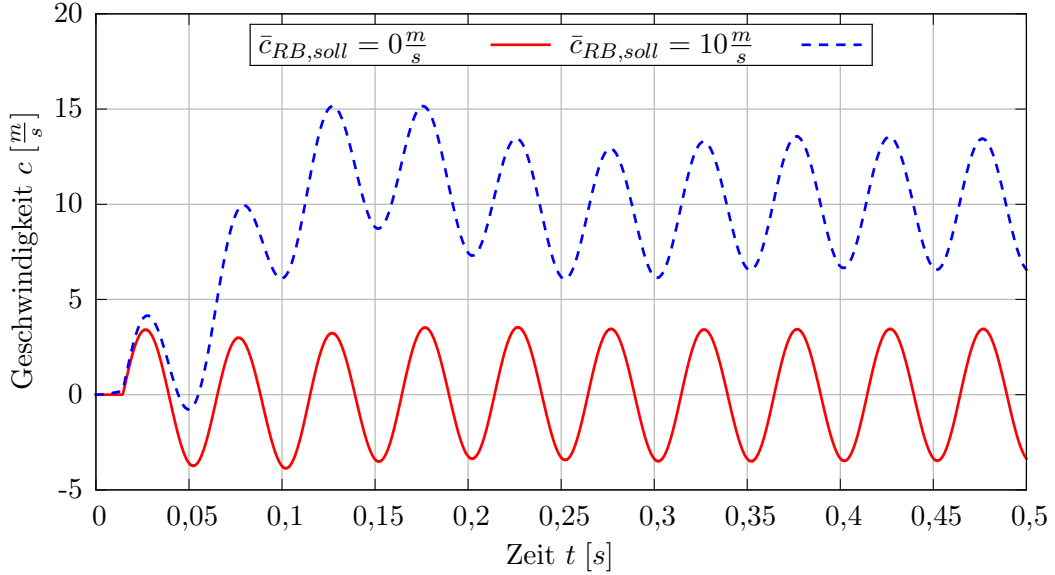


Abbildung 6.6.: Geschwindigkeitsverlauf am Auslass der Domain bei einer Frequenz von  $f_G = 20 \text{ Hz}$ ,  $Ma_{ak} = 0,01$  und einer mittleren Soll-Geschwindigkeit von  $\bar{c}_{RB,soll} = 0$  bzw.  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 6.4.2. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung

Es wurden umfangreiche Parameterstudien durchgeführt, um Einflussparameter auf die Einhaltung des geforderten Zielwertes quantitativ zu beurteilen. Durch eine Variation der mittleren Strömungsgeschwindigkeit wurde der Einfluss der Machzahl der Gleichströmung im Bereich von  $\overline{Ma} \leq 0,5$  untersucht. Anhand einer Variation der Anregungsfrequenz sowie wiederum der mittleren Strömungsgeschwindigkeit wurde der Einfluss der Strouhalzahl  $St$ , definiert durch

$$St = \frac{f_G l_{char}}{\bar{c}}, \quad (6.30)$$

im Bereich von  $St \geq 0,117$  (mit  $l_{char} = 0,2$ ) untersucht. Es konnte jedoch weder ein Einfluss der Machzahl  $\overline{Ma}$  noch der Strouhalzahl  $St$  innerhalb der untersuchten Grenzen festgestellt werden.

### 6.4.3. Einfluss der akustischen Machzahl

Im Folgenden wird der Einfluss der akustischen Machzahl auf die Einhaltung des geforderten Mittelwertes untersucht. In **Abb. 6.7** ist dazu die relative Abweichung zwischen dem mittleren Ist- und Sollwert, definiert als

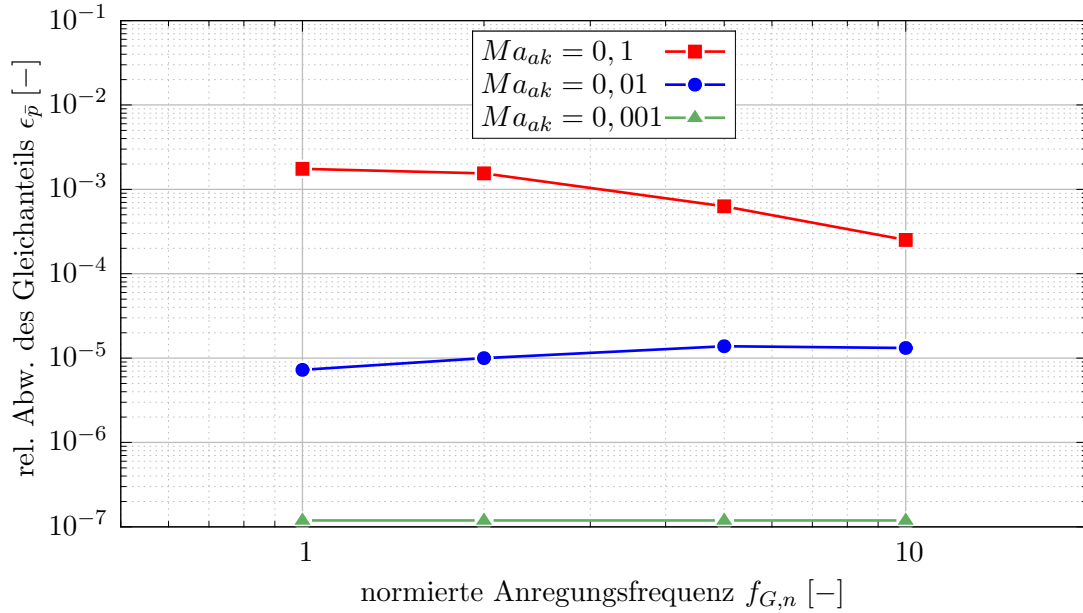


Abbildung 6.7.: Relative Abweichung des geforderten mittleren Sollwertes  $\epsilon_{\bar{p}}$  in Abhängigkeit der normierten Anregungsfrequenz  $f_{G,n}$  bei Variation der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$ ,  $\overline{Ma} = 0$ ,  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5 Pa$  und  $l = 5 m$ .

$$\epsilon_{\bar{p}} = \left| \frac{\bar{p}_{RB,soll} - \bar{p}_{RB,ist}}{\bar{p}_{RB,soll}} \right|, \quad (6.31)$$

für verschiedene akustische Machzahlen abgebildet. Am Eintritt ist wiederum eine harmonische Schnellevorgabe  $c_{Ein}(t)$  und am Austritt die GMW-Randbedingung mit mittlerer Druckvorgabe von  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5 Pa$  aufgeprägt. Die Initialisierungsbedingungen entsprechen den in Abs. 6.3 genannten Werten. Gleiches gilt für die numerischen Parameter. Die Modelllänge beträgt für sämtliche Simulationen  $l = 5 m$ . Die relativen Abweichungen sind als Funktional der normierten Anregungsgrundfrequenz  $f_{G,n}$  (vgl. Abs. 6.2) dargestellt. Die Variation der normierten Anregungsgrundfrequenz wird durch Anregungsfrequenzen im Bereich von  $20 \leq f_G \leq 200$  realisiert, während die Anzahl an Abtastwerten des Filters  $n_A$  und damit die Filterbasisfrequenz  $f_B$  konstant gehalten wird.

Es wird jeweils eine physikalische Zeit von  $t_{Sim,ges} = 10 s$  simuliert. Das Zeitsignal im Bereich von  $2 s \leq t < 10 s$  wird ausgewertet, um sicherzustellen, dass die ausgewertete Lösung bereits vollständig eingeschwungen ist. Das ausgewertete Signal wird mit Rechteckfensterung in den Frequenzbereich transformiert. Dabei wird stets ein ganzzahliges Vielfaches an Perioden abzüglich eines Abtastwertes<sup>1</sup> transformiert, um ein Auftreten des „Leakage“-Effektes zu verhindern, vgl. [Mey11]. Von dem resultierenden Spektrum wird jeweils der Gleichanteil ( $f = 0$ ) ausgewertet. Aufgrund der mitunter sehr kleinen Werte der relativen Abweichung  $\epsilon_{\bar{p}}$  wird eine alternative Auswertung mit Hilfe eines Tiefpass-Filters durchgeführt, um einen Einfluss der Auswertemethode auf das Ergebnis auszuschließen. Eine Filte-

<sup>1</sup>Das zu transformierende Zeitsignal wird durch eine Nachabtastung auf eine Anzahl an Abtastwerten gebracht, die einer Zweierpotenz ( $2^n$ ) entspricht, so dass die FFT angewendet werden kann.

nung der Lösung mit einem Butterworth-Filter (6. Ordnung, Grenzfrequenz:  $\frac{f_G}{10}$ ) und Auswertung des resultierenden (konstanten) Zeitsignals führt zu einem identischen Ergebnis.

Bei einer Betrachtung der Verläufe über der normierten Anregungsfrequenz in Abb. 6.7 zeigt sich eine leichte Abnahme von  $\epsilon_{\bar{p}}$  für  $Ma_{ak} = 0,1$  sowie eine leichte Zunahme für  $Ma_{ak} = 0,01$ . Für die kleinste akustische Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,001$  ist keine Frequenzabhängigkeit erkennbar. Demnach ist eine leichte Abhängigkeit von der normierten Anregungsfrequenz für die größeren akustischen Machzahlen vorhanden, es lässt sich jedoch keine Systematik erkennen. Einen signifikanten Einfluss auf die Einhaltung des geforderten Mittelwertes hat hingegen die akustische Machzahl. Mit zunehmender akustischer Machzahl nimmt auch die relative Abweichung  $\epsilon_{\bar{p}}$  zu. Die Abweichung bei der kleinsten akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,001$  ist mit  $\epsilon_{\bar{p}} \approx 10^{-7}$  vernachlässigbar klein. Eine Zunahme der akustischen Machzahl um den Faktor 10 entspricht einer Zunahme der relativen Abweichung um etwa zwei Größenordnungen für den untersuchten Frequenzbereich.

Die sehr niedrigen Abweichungen bei der kleinsten akustischen Machzahl lassen sich mit einer Betrachtung der Schalldruckpegel  $L_p$  der Anregung in den Simulationen erklären. Die aus der Schnelleanregung resultierende Druckschwankung ergibt sich aus der Schallimpedanz, vgl. Abs. 2.2.1. Die mit den akustischen Machzahlen der Anregung korrespondierenden Schallfeldamplituden sowie Schalldruckpegel der Anregung sind in **Tab. 6.1** aufgeführt. Die Anregung bei  $Ma_{ak} = 0,001$  befindet sich unterhalb der in der Literatur angeführten Grenze von  $L_p = 140 \text{ dB}$  und damit im Bereich linearer Wellenausbreitung [MN79]. Die Schalldruckpegel bei den beiden größeren akustischen Machzahlen befinden sich mitunter deutlich im nichtlinearen Bereich, was zu größeren Abweichungen von den geforderten Mittelwerten in den Simulationen führt.

akustische Machzahl $Ma_{ak} [-]$	Schnelleamplitude $\hat{c} [\frac{m}{s}]$	Druckamplitude $\hat{p} [Pa]$	Schalldruckpegel $L_p [dB]$
0,001	0,343	141,2	133,9
0,01	3,43	1412	153,9
0,1	34,3	14120	173,9

Tabelle 6.1.: Akustische Machzahlen mit korrespondierenden Schalldruckpegeln der Anregung bei  $p = 10^5 \text{ Pa}$  und  $T = 293,15 \text{ K}$ .

Die entwickelte Randbedingung realisiert somit in sehr guter Näherung die Vorgabe eines Mittelwertes für Druck oder Geschwindigkeit und unterdrückt damit einen Drift der Gleichgrößen. Dieses Verhalten zeigt sich unabhängig von den Initialisierungsbedingungen, so dass auch eine Änderung der Gleichgrößen während der Simulation, bspw. eine Änderung des Betriebspunktes einer Maschine, simuliert werden kann. Den signifikanten Einflussparameter auf die Abweichungen stellt die akustische Machzahl und damit die Amplitude der auftretenden Pulsationen dar.

#### 6.4.4. Vergleich mit LRT und der klassischen CRB

Für einen Vergleich mit etablierten Methoden nichtreflektierender Randbedingungen sind in **Abb. 6.8** die Verläufe des mittleren Druckes bei einer exemplarischen Simulation mit  $\overline{Ma} = 0$ ,  $Ma_{ak} = 0,01$  und  $f_G = 200 \text{ Hz}$  für die klassische charakteristische Randbedingung (CRB), die Randbedingung mit LRT nach [PWM06] sowie die neu entwickelte GMW-Randbedingung gegenübergestellt. Um den Verlauf des Gleichanteils über einen Zeitraum von mehreren Sekunden betrachten zu können, wurden die Ergebnisse an der Randbedingung mit einem Butterworth-Filter (6. Ordnung, Grenzfrequenz:  $20 \text{ Hz}$ ) tiefpassgefiltert. Ohne diese Filterung stellten sich die Schwankungen mit  $f_G = 200 \text{ Hz}$  bei der dargestellten Skalierung der Abszisse als breite Balken dar und der Verlauf wäre nicht sinnvoll analysierbar.

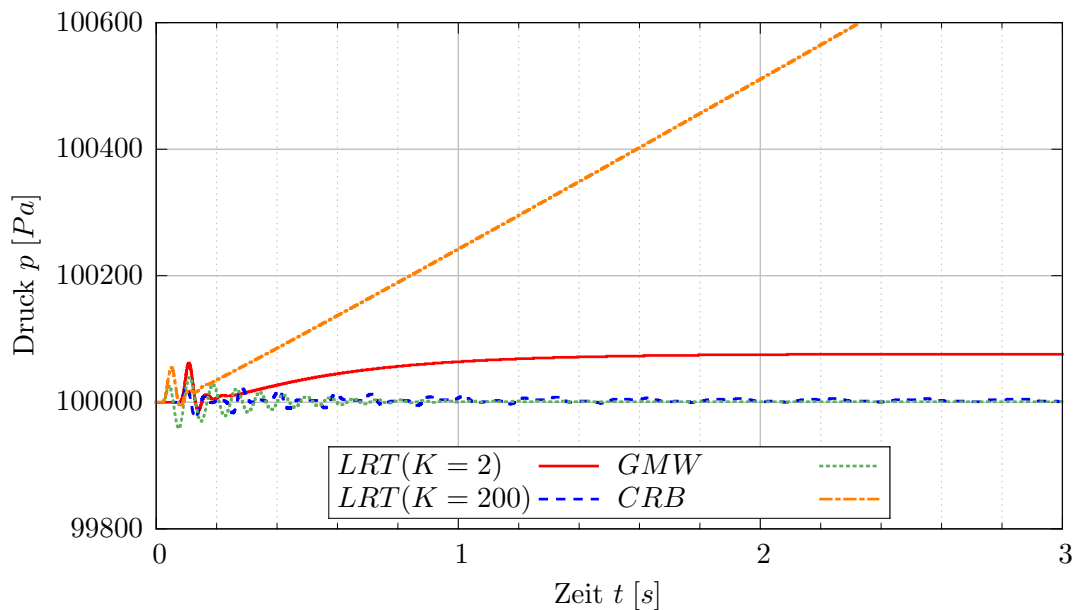


Abbildung 6.8.: Zeitlicher Verlauf des mittleren Druckes am Auslass bei Anwendung der CRB, LRT- sowie GMW-Randbedingung bei  $\overline{Ma} = 0$ ,  $Ma_{ak} = 0,01$  und  $f_G = 200 \text{ Hz}$ .

Der Drift der klassischen charakteristischen Randbedingung, dem in keiner Weise entgegengewirkt wird (vgl. Gl. (6.1)), wird unmittelbar deutlich. Im Verlauf der Simulation setzt sich dieser Drift kontinuierlich fort. Zwei unterschiedliche Konstanten  $K$  wurden bei Anwendung des LRT-Ansatz untersucht. Es zeigt sich, dass der Wert von  $K$  bestimmt, ob der vorgegebene Mittelwert eingehalten wird oder ob Abweichungen auftreten. Dies war zu erwarten, da mit dem Wert von  $K$  festgelegt wird, wie stark die Lösung an den Sollwert gekoppelt wird, vgl. Gl. (6.7). Ein großes  $K$  resultiert in einer stärkeren Kopplung. Allerdings gehen damit auch erhöhte Reflexionen einher, wie im Weiteren noch gezeigt wird. Die filterbasierte GMW-Randbedingung zeigt wie bereits zuvor ein Einhalten des mittleren Zieldruckes nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs.

## 6.5. Reflexionsverhalten

Im Folgenden wird das Reflexionsverhalten der entwickelten GMW-Randbedingung in Abhängigkeit der relevanten Einflussparameter untersucht. Um die Größenordnung der Amplitudenvariationen zu veranschaulichen, sind in **Abb. 6.9** die Zeitsignale der Simulationen bei Variation der akustischen Machzahl und  $\overline{Ma} = 0$  abgebildet. Die Drucksignale am Einlass, der Anregung, und am Auslass, der GMW-Randbedingung, sind dargestellt.

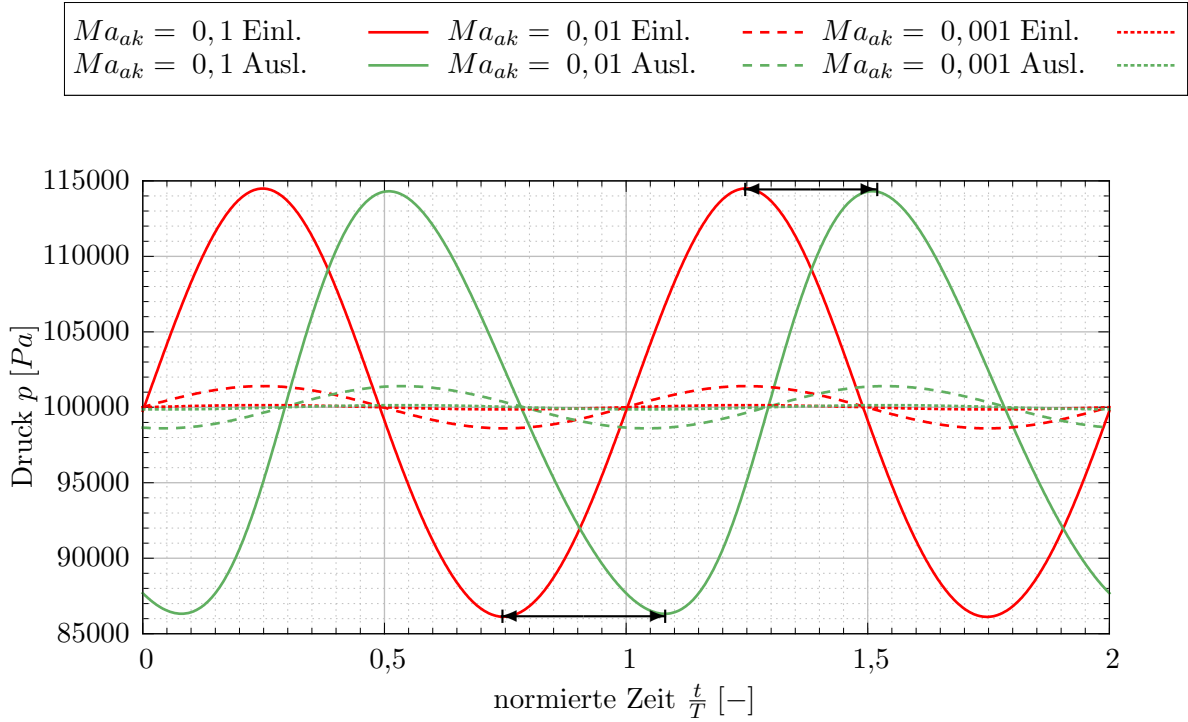


Abbildung 6.9.: Zeitlicher Druckverlauf am Einlass und am Auslass (GMW-Randbedingung) bei Variation der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$  und einer Machzahl der Gleichströmung von  $\overline{Ma} = 0$

An dem Druckverlauf für  $Ma_{ak} = 0,1$  ist deutlich der Effekt der Wellenaufteilung zu erkennen. Der markierte zeitliche Abstand zwischen den Druckmaxima am Einlass und am Auslass ist signifikant kürzer als der Abstand zwischen den beiden entsprechenden Minima. Aufgrund der höheren resultierenden Ausbreitungsgeschwindigkeit „eilt der Wellenberg voraus“ und erreicht den Auslass relativ zur Anregung eher als das Wellental, vgl. Abs. 2.2.2. Dieser Effekt verstärkt sich mit der akustischen Machzahl sowie der Frequenz der Schwankung.

Das Reflexionsverhalten wird anhand des Betrages des komplexen Reflexionskoeffizienten  $r = |r|$  quantifiziert. Dieser wird mit Hilfe der Riemann-Invarianten (vgl. Kap. 2.2.1 Gl. (2.27) und Gl. (2.28)) unmittelbar an der nichtreflektierenden Randbedingung ausgewertet:

$$r_{nrRB} = \left| \frac{\hat{g}_{nrRB}}{\hat{f}_{nrRB}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} \left( \hat{p}_{nrRB} - Z_0 \cdot \hat{c}_{nrRB} \right)}{\frac{1}{2} \left( \hat{p}_{nrRB} + Z_0 \cdot \hat{c}_{nrRB} \right)} \right| \quad (6.32)$$

Die Amplituden der Schallfeldgrößen  $\hat{p}_{nrRB}$  und  $\hat{c}_{nrRB}$  werden durch Spektraltransformation mit Rechteck-Fensterung ermittelt. Die ausgewerteten Fenster entsprechen dabei, wie zuvor, stets einer ganzen Anzahl an Perioden abzüglich eines Abtastwertes und werden durch Nachabtastung auf eine Anzahl an Abtastwerten von  $2^n$  (mit  $n \in \mathbb{N}^+$ ) gebracht. Die Schallimpedanz  $Z_0$  wird durch arithmetische Mittelwertbildung der numerischen Lösung an der Randbedingung über das gleiche Zeitfenster wie zur Auswertung der Schallfeldgrößen ermittelt:

$$Z_0 = \overline{(\rho_{nrRB}(t) \cdot a_{nrRB}(t))} \quad (6.33)$$

### 6.5.1. Einfluss der akustischen Machzahl

In **Abb. 6.10** ist der Reflexionskoeffizient bei variabler akustischer Machzahl  $Ma_{ak}$  und Variation der Anregungsfrequenz  $f_G$  als Funktional der normierten Anregungsfrequenz  $f_{G,n}$  nach Gl. (6.21) dargestellt. Am Eintritt wird stets eine harmonische Schnelle  $c_{Ein}(t)$  vorgegeben. Jeder Punkt repräsentiert somit das Ergebnis einer Simulation. Die zeitliche Diskretisierung beträgt weiterhin  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen Simulationen bei konstanter geometrischer Länge der Domain von  $l = 5$  m sowie einer konstanten räumlicher Auflösung von  $\Delta x = 0.002$  m. Es zeigt sich ein signifikanter Einfluss der akustischen Machzahl auf die Reflexionen an der Randbedingung. Mit zunehmender  $Ma_{ak}$  und damit zunehmend nichtlinearem Charakter der Welle (vgl. Abs. 2.2.2) steigen auch die Reflexionen an. Hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit zeigen sich jedoch keine eindeutigen Tendenzen. Die Reflexionen nehmen zum Teil mit zunehmender Frequenz monoton zu ( $Ma_{ak} = 0,01$ ), zum Teil monoton ab ( $Ma_{ak} = 0,001$ ) oder zeigen kein monotonen Verhalten ( $Ma_{ak} = 0,1$ ).

Diese mangelnde Systematik lässt sich mit den unterschiedlichen spektralen Zusammensetzungen der Wellen bei unterschiedlichen Anregungsgrundfrequenzen erklären. Wie in Abb. 2.2 dargestellt, lässt sich die spektrale Zusammensetzung einer durchlaufenden, nichtlinearen Welle über dem dimensionslosen Abstand von der Anregung  $\sigma$  darstellen. Der dimensionslose Abstand am Austritt, der GMW-Randbedingung,  $\sigma_{RB}$  nimmt (bei konstantem geometrischen Abstand  $l$ ) mit zunehmender Wellenzahl und damit zunehmender Frequenz zu. Bei konstanter geometrischer Länge der simulierten Domain  $l$  werden somit bei gleicher akustischer Machzahl der Anregung Reflexionskoeffizienten der Grundharmonischen bei unterschiedlich ausgeprägten Höherharmonischen miteinander verglichen, da sich bei zunehmender Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  entlang der gleichen absoluten Lauflänge größere Amplituden der Höherharmonischen ausbilden. Um diesen Effekt zu kompensieren, wird für jede akustische Machzahl  $Ma_{ak}$  und Anregungsfrequenz die Domainlänge  $l$  angepasst, so dass der dimensionslose Abstand an der GMW-Randbedingung mit  $\sigma_{RB} = 0,22$  konstant bleibt (vgl. Gl. (2.67)). Es ist zu erwarten, dass bei gleichen dimensionslosen Abständen  $\sigma_{RB}$  die nichtlinearen Wellen, die auf die nichtreflektierende Randbedingung treffen, trotz unterschiedlicher Grundfrequenzen der Anregung die gleiche spektrale Zusammensetzung und damit gleiche Reflexionskoeffizienten aufweisen. Die resultierenden Reflexionskoeffizienten bei  $\sigma_{RB}$ -Kompensation sind in Abb. 6.10 mit gestrichelten Linien gekennzeichnet.



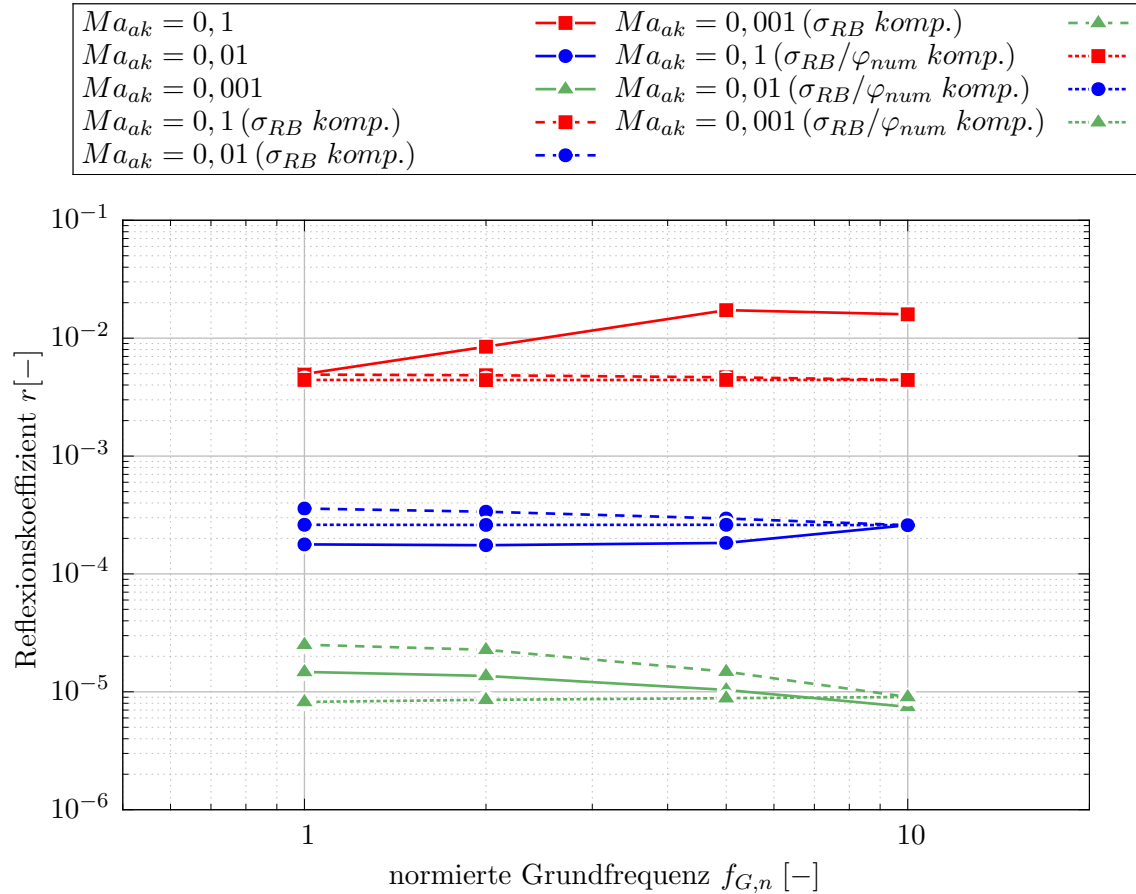


Abbildung 6.10.: Reflexionskoeffizienten der nichtreflektierenden Randbedingung bei Variation der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$  und einer Machzahl der Gleichströmung von  $\overline{Ma} = 0$

Bei der größten akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,1$  zeigt sich bei Simulationen mit  $\sigma$ -Kompensation ein nahezu konstanter Verlauf des Reflexionskoeffizienten über der Frequenz. Mit abnehmender akustischer Machzahl nimmt jedoch auch bei konstantem dimensionslosen Abstand der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  die Frequenzabhängigkeit des Reflexionskoeffizienten wieder zu. Dies lässt sich durch den Einfluss eines weiteren, rein numerischen, Parameters begründen. Der numerische Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  bedingt auch bei (physikalisch) dämpfungsfreier Simulation eine frequenzabhängige Diffusion bzw. Dämpfung, vgl. Abs. 2.3. Mit zunehmender Frequenz nimmt die numerische Dämpfung ebenfalls zu. In dem simulierten nichtlinearen System kommt es zu einer gegenseitigen Wechselwirkung von nichtlinearen und rein numerischen Effekten. Durch Wellenaufsteilung nimmt die Amplitude der Grundharmonischen ab und Höherharmonische entstehen. Gleichzeitig bedingt numerische Diffusion eine Dämpfung der Grundharmonischen sowie eine deutlich stärkere Dämpfung der entstehenden Höherharmonischen.

Die beiden Effekte können aufgrund ihrer Wechselwirkungen nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Die Signifikanz der beschriebenen Parameter kann hingegen durch eine zusätzliche Kompensation des numerischen Phasenwinkels  $\varphi_{num}$  gezeigt werden. Dazu wird wiederum ausgehend von der höchsten Frequenz bei abnehmender Frequenz der numerische Phasenwinkel konstant gehalten. Das

heißt, die räumliche Diskretisierung  $\Delta x$  wird proportional zur Frequenzabnahme erhöht, vgl. Gl. (2.77), so dass  $\varphi_{num} = const. = 0,42^\circ$  beträgt. Ein numerischer Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 0,42^\circ$  entspricht einer Auflösung von  $\frac{360^\circ}{0,42^\circ} \approx 857$  Gitterpunkten pro Wellenlänge. Eine Übersicht der Variationen von dimensionsbehafteten Parametern zur Kompensation des dimensionslosen Abstandes der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  und des numerischen Phasenwinkels  $\varphi_{num}$  ist in **Tab. 6.2** gegeben.

Die resultierenden Reflexionskoeffizienten bei  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -Kompensation sind in Abb. 6.10 durch gepunktete Linien gekennzeichnet. Es zeigt sich, dass für alle untersuchten akustischen Machzahlen der Reflexionskoeffizient bei konstantem dimensionslosen Abstand der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  und gleichzeitig konstantem numerischen Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  frequenzunabhängig und ausschließlich ein Funktional von  $Ma_{ak}$  ist. Dies belegt die starke und signifikante gegenseitige Beeinflussung von nichtlinearen physikalischen und rein numerischen Effekten. Weiterhin wird bei einer Betrachtung sämtlicher dargestellter Verläufe der dominante Einfluss der akustischen Machzahl - und damit der auftretenden Nichtlinearitäten - auf die Größe des Reflexionskoeffizienten an der entwickelten Randbedingung deutlich. Selbst bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,1$  bleibt der Reflexionskoeffizient jedoch unter einem Prozent und kann damit als klein bezeichnet werden.

kompensierte Domainlänge $l [m]$ für $\sigma_{RB} = 0,22$				
$f_G [Hz]$	$Ma_{ak} = 0,1$	$Ma_{ak} = 0,01$	$Ma_{ak} = 0,001$	kompensierte räuml. Diskretisierung $\Delta x [m]$ für $\varphi_{num} = 0,42^\circ$
20	5	50	500	0,02
40	2,5	25	250	0,01
100	1	10	100	0,004
200	0,5	5	50	0,002

Tabelle 6.2.: Kompensierte dimensionsbehaftete Parameter der Simulationen bei Variation der akustischen Machzahl in Abb. 6.10

Eine weitere Erkenntnis, die aus den Ergebnissen in Abb. 6.10 gezogen werden kann, ist die Unabhängigkeit des Reflexionskoeffizienten von der normierten Grundfrequenz  $f_{G,n}$ . Eine Variation der normierten Grundfrequenz impliziert eine Variation der Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  bei unveränderten Filterparametern. Für das Reflexionsverhalten der nichtreflektierenden Randbedingung ist es daher unerheblich, ob die Grundfrequenz der Anregung der Filterbasisfrequenz entspricht oder der  $n$ -ten gefilterten Frequenz des GMW (für  $n \in \mathbb{N}^+$ ).

### 6.5.2. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung

Ein weiterer zu untersuchender Parameter ist die Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$ . Diese wird bei einer exemplarischen akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,01$  und den bereits zuvor untersuchten Frequenzen variiert. In **Abb. 6.11** sind die Reflexionskoeffizienten für  $\sigma_{RB}$ -kompensierte sowie  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -kompensierte Simulationen als Funktional der normierten Grundfrequenz  $f_{G,n}$  dargestellt. In diesem Fall wurde bei Variation der Frequenz der dimensionslose Abstand mit Berücksichtigung der Gleichströmung (vgl. Gl. (2.68)) konstant gehalten. Zudem muss der Machzahl-kompensierte numerische Phasenwinkel nach Gl. (2.78) berücksichtigt werden. Die resultierenden dimensionsbehafteten Parameter zur Kompensation von  $\sigma_{RB}$  bzw.  $\varphi_{num}$  für die durchgeführte Variation der Machzahl sind in **Tab. 6.3** angeführt.

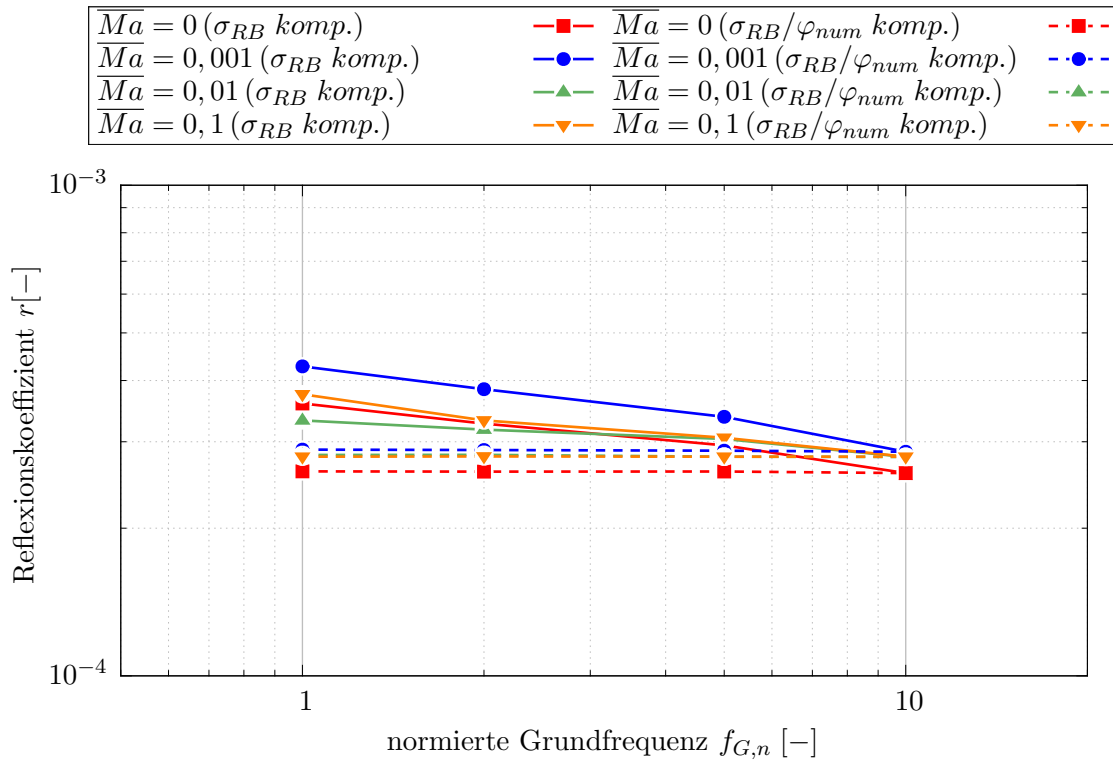


Abbildung 6.11.: Reflexionskoeffizienten der nichtreflektierenden Randbedingung bei Variation der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  und einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,01$

Sowohl bei variablem als auch bei konstantem numerischen Phasenwinkel zeigt sich kein signifikanter Einfluss der Machzahl  $\overline{Ma}$ . Bei variablem  $\varphi_{num}$  zeigen sich hinsichtlich Frequenzabhängigkeit zwar monotone jedoch leicht unsystematische Verhältnisse zwischen den Machzahlen. Dies ist wiederum auf die unterschiedliche numerische Dämpfung der verschiedenen Frequenzanteile zurückzuführen. Die Ergebnisse der  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -kompensierten Simulationen zeigen wie erwartet frequenzunabhängige Reflexionskoeffizienten. Die Reflexionen ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) liegen leicht unterhalb derjenigen mit  $\overline{Ma} > 0$ . Zwischen den Ergebnissen mit unterschiedlicher Gleichströmung sind, insbesondere unter Berücksichtigung der Skalierung der Abszisse, praktisch keine Abweichungen festzustellen. Insgesamt liegen alle Reflexionskoeffizienten in der gleichen Größenordnung, so dass kein

signifikanter Einfluss der Machzahl der Gleichströmung auf das Reflexionsverhalten der filterbasierten GMW-Randbedingung festzustellen ist.

$f_G$ [Hz]	kompensierte Domainlänge $l$ [m] für $\sigma_{RB} = 0,22$				kompensierte Gitterweite $\Delta x$ [m] für $\varphi_{num} = 0,42^\circ$			
	$\overline{Ma}$							
	0	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	0	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
20	50	50,1	51	60	0,02	0,02002	0,0202	0,022
40	25	25,05	25,5	30	0,01	0,01001	0,0101	0,011
100	10	10,02	10,2	12	0,004	0,004004	0,00404	0,0044
200	5	5,01	5,1	6	0,002	0,002002	0,00202	0,022

Tabelle 6.3.: Kompensierte dimensionsbehaftete Parameter der Simulationen bei Variation der Machzahl der Gleichströmung in Abb. 6.11

### 6.5.3. Einfluss von Oberschwingungen

Nachdem der dominante Einfluss der akustischen Machzahl auf die Reflexionseigenschaften der nicht-reflektierenden Randbedingung bei monofrequenter Anregung gezeigt wurde, werden im Folgenden die Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen, die in praktischen Anwendungen im Allgemeinen auftreten, untersucht. Dazu wird eine Anregung mit einer Grundfrequenz von  $f_G = 50$  Hz mit den ersten beiden Höherharmonischen phasengleich überlagert. Die akustischen Machzahlen der Frequenzanteile werden variiert, wobei der Grundschwingungsgehalt  $G$  (vgl. Gl. (2.70)) bei jeweils zwei Konfigurationen konstant gehalten wird. Die Parameter der untersuchten Konfigurationen sind in **Tab. 6.4** zusammengestellt.

Konfiguration	$Ma_{ak}$			$G$
	50 Hz	100 Hz	150 Hz	
A	0,01	0,001	0,0001	0,995
B	0,01	0,0001	0,001	0,995
C	0,01	0,01	0,001	0,705
D	0,01	0,001	0,01	0,705

Tabelle 6.4.: Akustische Machzahlen der verschiedenen Frequenzanteile sowie Grundschwingungsgehalt der Untersuchungen bei Anregung mit Oberschwingungen

Die Länge der Domain beträgt bei allen dargestellten Konfigurationen  $l = 6,86$  m, was rund einer Wellenlänge bei der Grundfrequenz von  $f_G = 50$  Hz entspricht. Daraus ergibt sich ein dimensionsloser Abstand der Grundfrequenz von  $\sigma_{RB} = 0,08$ . Die Aussagekraft und Interpretierbarkeit des dimensionslosen Abstands ist im Fall einer Anregung mit Oberschwingungen allerdings begrenzt,

da  $\sigma$  als dimensionsloser Abstand von einer harmonischen Anregung definiert ist und nur im Fall rein harmonischer Anregung eine Aussage über die spektrale Zusammensetzung einer nichtlinearen Welle in Abhängigkeit von  $\sigma$  getroffen werden kann, vgl. Abs. 2.2.2. Die räumliche Diskretisierungsweite wird mit  $\Delta x = 0,002 \text{ m}$  ebenfalls konstant gehalten. Für die Grundfrequenz ergibt sich damit ein numerischer Phasenwinkel von  $\varphi_{num}(f_G) = 0,105^\circ$  und für die Oberschwingungen  $\varphi_{num}(f = 100 \text{ Hz}) = 0,21^\circ$  bzw.  $\varphi_{num}(f = 150 \text{ Hz}) = 0,315^\circ$ .

Um die Auswirkung von Oberschwingungen unterschiedlicher Amplituden auf die resultierenden Wellen zu veranschaulichen, sind die Zeitsignale der untersuchten Konfigurationen mit Oberschwingungen nach Tab. 6.4 in **Abb. 6.12** für zwei Perioden der Grundharmonischen über der normierten Zeit dargestellt. Bei den Konfigurationen *A* und *B* mit großem Grundschwingungsgehalt zeigt sich lediglich eine leichte Verzerrung der Wellenform im Vergleich zur Harmonischen. Ausgeprägte Oberwellen sind nicht erkennbar. Diese zeigen sich hingegen deutlich bei den Konfigurationen *C* und *D* mit niedrigerem Grundschwingungsgehalt. Auffällig ist zudem, dass sich bei diesen beiden Konfigurationen durch die Überlagerung der Höherharmonischen die Scheitelwerte der resultierenden Welle signifikant erhöhen.

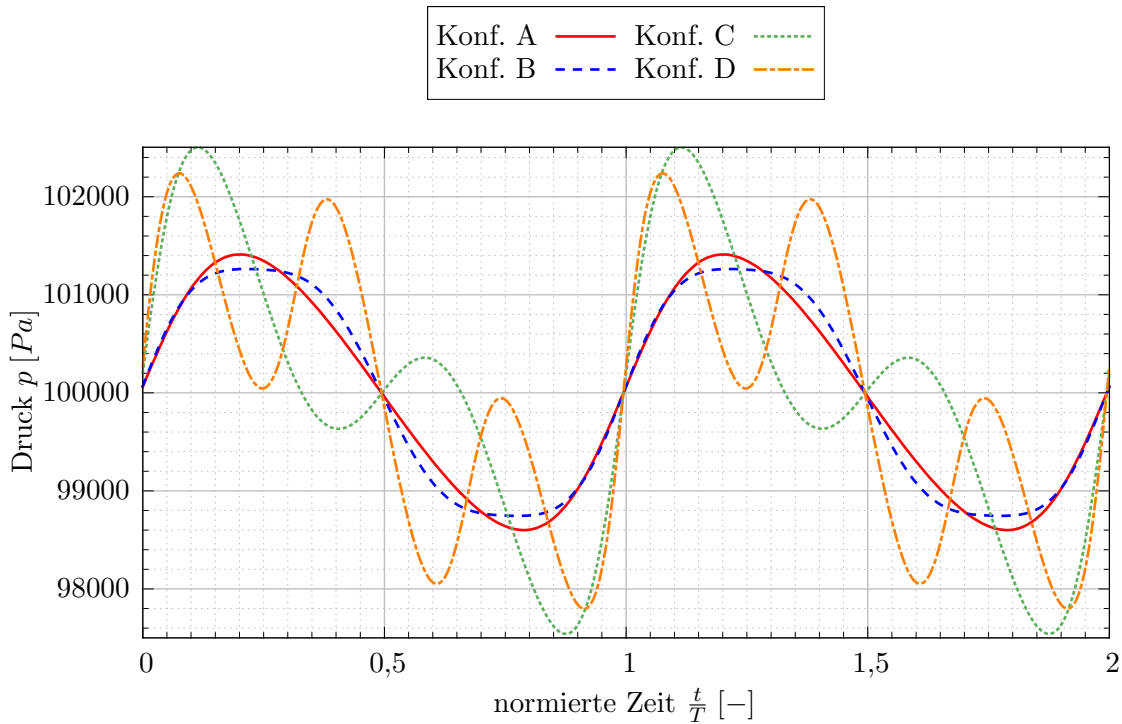


Abbildung 6.12.: Normierter zeitlicher Druckverlauf bei Anregung mit Oberschwingungen

Die resultierenden Reflexionskoeffizienten der jeweiligen Frequenzanteile sind in **Abb. 6.13** als Funktional der normierten Frequenz ( $\frac{f}{f_G}$ ) abgebildet. Hinsichtlich der Grundharmonischen zeigt sich, dass bei den Konfigurationen *A* und *B* mit einem hohen Grundschwingungsgehalt von  $G = 0,995$  geringere Reflexionen an der nichtreflektierenden Randbedingung auftreten. Die Reflexionskoeffizienten der Grundharmonischen liegen im Fall des hohen Grundschwingungsgehaltes zudem nahe an den Refle-

xionskoeffizienten, die bei vergleichbaren Simulationen mit monofrequenter Anregung entstehen, vgl. Abb. 6.10. Die Reflexionskoeffizienten der Konfigurationen  $C$  und  $D$  mit geringerem Grundschwingungsgehalt liegen signifikant höher. Ein zunehmender Anteil an Oberschwingungen und die damit einhergehende Zunahme des Scheitelwerts bei einer nichtlinearen Welle resultiert somit in höheren Reflexionen an der nichtreflektierenden Randbedingung.

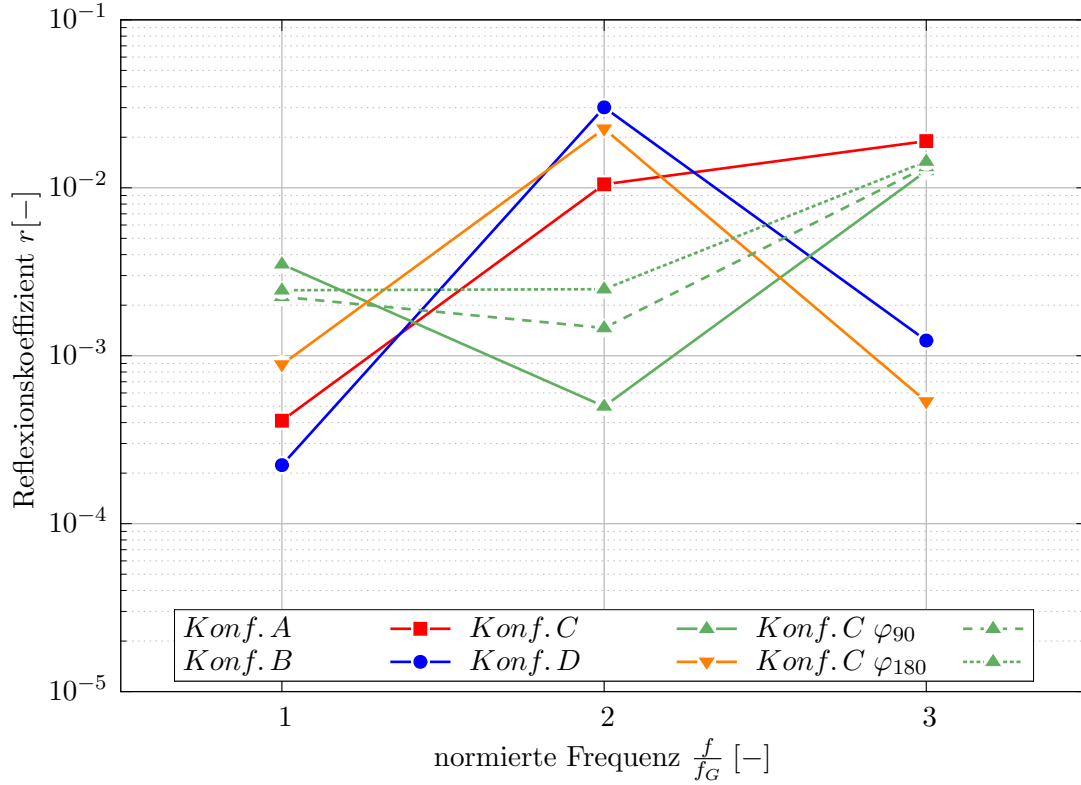


Abbildung 6.13.: Reflexionskoeffizienten der nichtreflektierenden Randbedingung bei Anregung mit Oberschwingungen

Bei den Höherharmonischen lässt sich grundsätzlich erkennen, dass die Reflexionskoeffizienten jeweils bei den Frequenzanteilen mit kleinen akustischen Machzahlen am höchsten sind ( $A/B/D$  bei  $\frac{f}{f_G} = 2$  sowie  $A/C$  bei  $\frac{f}{f_G} = 3$ ). Die Reflexionskoeffizienten der Höherharmonischen mit großen akustischen Machzahlen von  $Ma_{ak} = 0,01$  ( $C$  bei  $\frac{f}{f_G} = 2$  sowie  $D$  bei  $\frac{f}{f_G} = 3$ ) sind nahezu gleich. Darüber hinaus lässt sich keine klare Tendenz hinsichtlich der Reflexionen der Höherharmonischen erkennen. Die größten auftretenden Reflexionskoeffizienten liegen für die untersuchten Konfigurationen bei den Oberschwingungen im Bereich weniger Prozent. Diese größten Reflexionen treten jedoch nur dann auf, wenn die Amplituden der Oberschwingungen signifikant niedriger sind als die der Grundharmonischen. Liegen die Amplituden der Grundharmonischen und der Oberschwingungen in einer Größenordnung, so sind auch die resultierenden Reflexionskoeffizienten vergleichbar groß und liegen deutlich unter einem Prozent.

Der Einfluss der Phasenlage der Höherharmonischen wird ebenfalls untersucht. Dazu werden Simulationen bei einer Anregung nach Konfiguration  $C$  in Tab. 6.4 jedoch phasenverschoben überlagerten Oberschwingungen durchgeführt. Die Reflexionskoeffizienten für eine Phasenverschie-

bung der Höherharmonischen relativ zur Grundharmonischen von  $90^\circ$  (*Konf. C*  $\varphi_{90}$ ) bzw.  $180^\circ$  (*Konf. C*  $\varphi_{180}$ ) sind ebenfalls in Abb. 6.13 dargestellt. Es zeigt sich kein signifikanter Einfluss der Variation der Phasenlage auf die Reflexionen bei der Grundfrequenz sowie bei der Oberschwingung mit kleiner akustischer Machzahl bei  $\frac{f}{f_G} = 3$ . Bei der Oberschwingung mit großer akustischer Machzahl ( $\frac{f}{f_G} = 2$ ) nehmen die Reflexionen durch die Phasenverschiebung erkennbar zu, die Reflexionskoeffizienten werden jedoch nicht größer als diejenigen bei der Grundharmonischen und bleiben stets deutlich unter einem Prozent.

#### 6.5.4. Kennfelder der nichtreflektierenden Randbedingung

In den vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, dass bei monofrequenter Anregung die akustische Machzahl der dominante Parameter hinsichtlich auftretender Reflexionen ist. Zudem beeinflussen vorhandene Oberschwingungen die Reflexionen der Grundharmonischen. Bei konstanter akustischer Machzahl sind der dimensionslose Abstand der Randbedingung von der Anregung  $\sigma_{RB}$  sowie der numerische Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  die relevanten Parameter für die auftretenden Reflexionen. Es ist anzunehmen, dass die spektrale Zusammensetzung einer Welle an der Randbedingung, die sich durch die Kombination dieser beiden Parameter ergibt, die Reflexionen der Grundharmonischen bei einer gegebenen akustischen Machzahl bestimmt.

Daher werden systematische Variationen des dimensionslosen Abstands der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  sowie des numerischen Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  bei verschiedenen akustischen Machzahlen durchgeführt. Die Variation der Parameter wird durch gezielte Anpassung der Länge der numerischen Domain  $l$  nach Gl. (2.67) bzw. der räumlichen Auflösung  $\Delta x$  nach Gl. (2.77) realisiert. Am Einlass wird eine harmonische Anregung aufgeprägt, wobei die akustische Machzahl der Anregung stets derart angepasst wird, das zu Gunsten der Vergleichbarkeit die akustische Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung  $Ma_{ak,f_G, RB}$  jeweils konstant bleibt. Da ausschließlich die akustische Machzahl der Anregung explizit vorgegeben werden kann, wurde im Rahmen von Voruntersuchungen für jede Parameterkombination iterativ eine Amplitude der Anregung bestimmt, bei der die akustische Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung näherungsweise der geforderten entspricht. Dadurch konnten relative Abweichungen bei sämtlichen Simulationen von

$$\epsilon_{Ma_{ak,f_G, RB}} = \frac{|Ma_{ak,f_G, RB, soll} - Ma_{ak,f_G, RB, ist}|}{Ma_{ak,f_G, RB, soll}} < 0,05 \quad (6.34)$$

erreicht werden.

Die resultierenden Gehalte an Oberwellen an der Randbedingung für  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,01$  sind in **Abb. 6.14** als Isolinien-Darstellung des Grundschwingungsgehaltes der hinlaufenden Welle  $f$  in Abhängigkeit des numerischen Phasenwinkels der Grundharmonischen  $\varphi_{num}$  und des dimensionslosen Abstandes der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  abgebildet. Wie zu erwarten nimmt  $G$  mit zunehmendem  $\sigma_{RB}$  ab, was auf die Wellenaufteilung entlang der Ausbreitung und die sich dabei ausbildenden Oberwellen zurückzuführen ist, vgl. Abs. 2.2.2. Demgegenüber nimmt der Grundschwingungsgehalt mit

zunehmendem numerischen Phasenwinkel zu. Ein größerer numerischer Phasenwinkel ist gleichbedeutend mit einer größeren räumlichen Auflösung einer Wellenlänge und damit zunehmender numerischer Diffusion. Da höhere Frequenzen (mit kleineren Wellenlängen) stets stärker gedämpft werden, ergibt sich bei konstantem  $\sigma_{RB}$  und zunehmendem  $\varphi_{num}$  ein höherer Grundschwingungsgehalt. Bei größeren Abständen  $\sigma_{RB}$  ist die Zunahme des Grundschwingungsgehaltes in Abhängigkeit von  $\varphi_{num}$  zudem stärker ausgeprägt, was anhand der zunehmenden Steigung der Isolinien mit zunehmendem  $\sigma_{RB}$  deutlich wird.

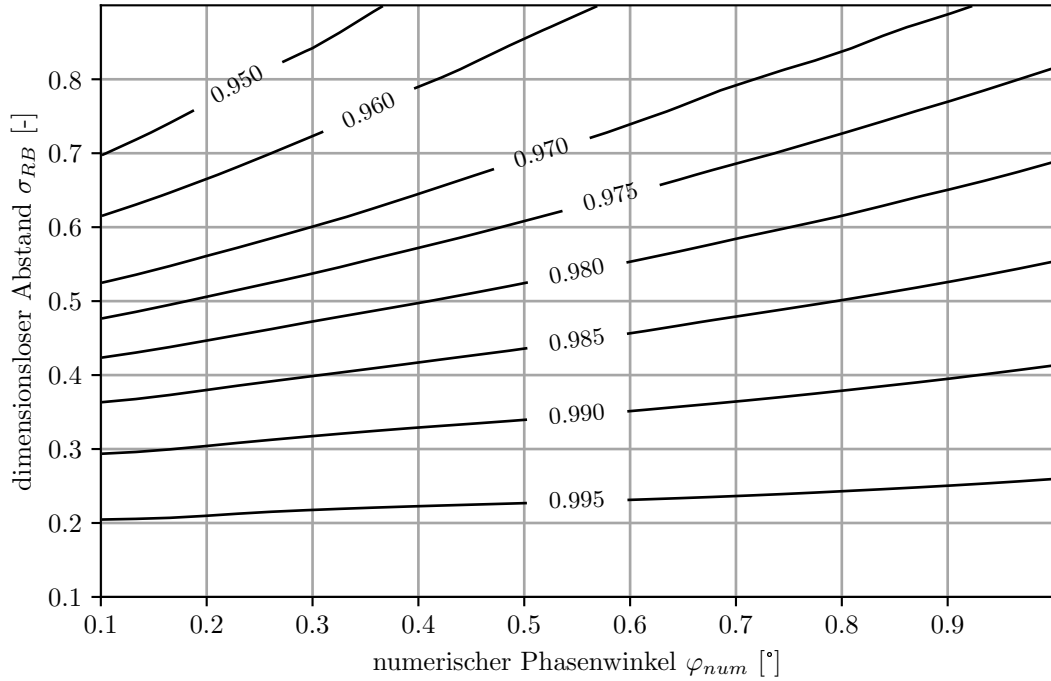


Abbildung 6.14.: Grundschwingungsgehalt der hinlaufenden Welle  $f$  an der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung von  $Ma_{ak,f_0,RB,soll} = 0,01$

Ein detaillierterer Einblick in die spektrale Zusammensetzung der Wellen bei den untersuchten Variationen von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  ist in **Abb. 6.15** gegeben. Darin sind die Verläufe der Amplitudenverhältnisse der höherharmonischen hinlaufenden Wellen in Bezug zu der Grundharmonischen an der Randbedingung, definiert durch

$$\Lambda_f(f_n) = \frac{\hat{f}_{f_n,RB}}{\hat{f}_{G,RB}}, \quad (6.35)$$

abgebildet. Die ersten drei Oberwellen sind dabei berücksichtigt. Es zeigt sich, dass die Amplitudenverläufe für den kleinsten numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 0,1^\circ$  denjenigen der analytischen Lösung der nichtlinearen Welle sehr ähnlich sind, vgl. Abb. 2.2. Durch die feine räumliche Auflösung ist der Effekt der numerischen Diffusion in diesem Fall relativ schwach ausgeprägt. Mit zunehmendem numerischen Phasenwinkel werden sämtliche Höherharmonischen stärker gedämpft. Die Dämpfung ist



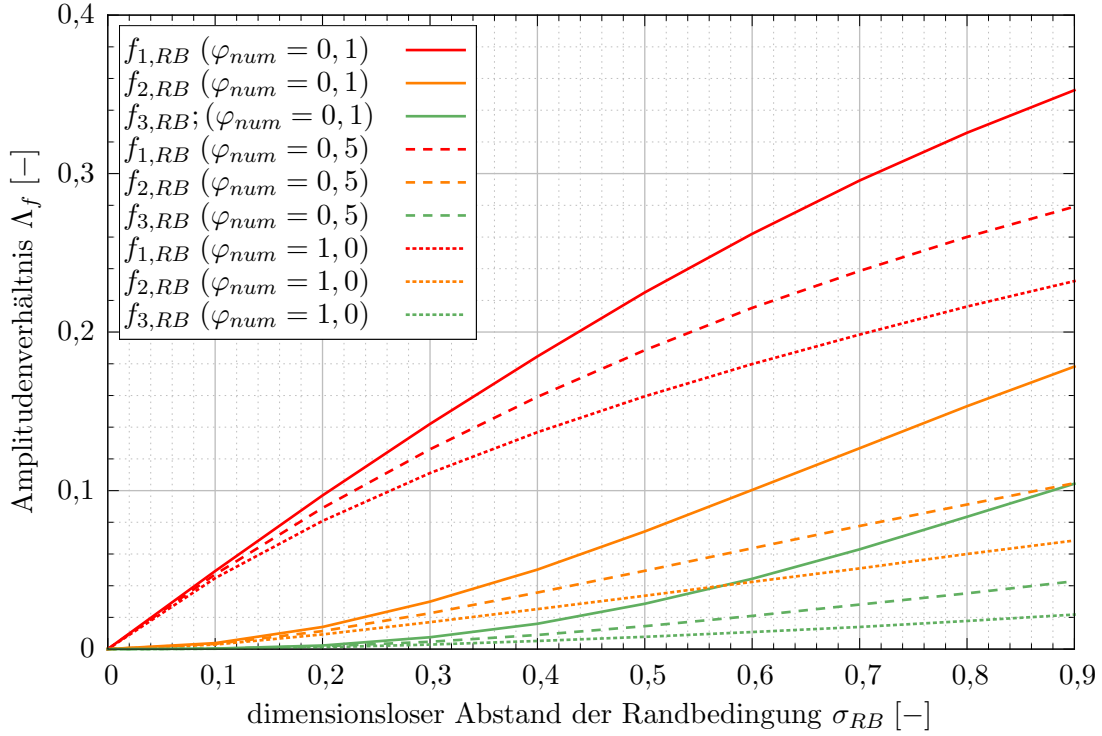


Abbildung 6.15.: Spektrale Zusammensetzung einer durchlaufenden Welle in Abhängigkeit von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  bei  $Ma_{ak} = 0,01$

dabei umso stärker, je höher die Ordnung der Höherharmonischen ist. Die erste Oberwelle ( $n = 1$ ) wird somit dominanter.

Um die Beobachtungen in Abb. 6.15 hinsichtlich der Oberschwingungen quantitativ zu verdeutlichen, sind in **Tab. 6.5** die Verhältnisse der Amplituden der Oberschwingungen zueinander exemplarisch für  $\sigma_{RB} = 0,8$  angeführt. Anhand dieser Werte wird deutlich, dass mit zunehmender numerischer Dämpfung der Einfluss der ersten Oberschwingung auf den Grundschwingungsgehalt signifikant zunimmt.

$\varphi_{num}$ [°]	$\hat{f}_{f_{2,RB}}/\hat{f}_{f_{1,RB}}$ [-]	$\hat{f}_{f_{3,RB}}/\hat{f}_{f_{1,RB}}$ [-]
0,1	0.470	0.256
0,5	0.350	0.135
1,0	0.277	0.082

Tabelle 6.5.: Amplitudenverhältnisse der Oberschwingungen bei  $\sigma_{RB} = 0,8$

Basierend auf den zuvor erläuterten Erkenntnissen lässt sich die Bedeutung der durchgeführten Variation von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  bei nahezu konstanter akustischer Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung folgendermaßen deuten: mit zunehmendem Abstand der Randbedingung  $\sigma_{RB}$  nimmt der Grundschwingungsgehalt  $G$  ab, die Welle beinhaltet somit zunehmend höherfrequente Anteile. Mit zunehmendem numerischen Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  nimmt der Grundschwingungsgehalt leicht zu, vgl. Abb. 6.14. Gleichzeitig nimmt der Anteil der Oberschwingungen von Ordnungen  $n > 1$  signifi-

kant ab, siehe Tab. 6.5. Während also der Anteil an Oberschwingungen relativ zur Amplitude der Grundharmonischen leicht abnimmt, konzentrieren sich die in der Welle enthaltenen höherfrequenten Anteile zunehmend auf die erste Oberschwingung. Entlang der Isolinien des Grundschwingungsgehaltes (vgl. Abb. 6.14) nimmt somit die erste Oberschwingung in gleichem Maße zu wie sämtliche Oberschwingungen höherer Ordnung abnehmen.

Die resultierenden Reflexionskoeffizienten an der Randbedingung bei Variation von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  sowie einer akustischen Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,01$  sind in **Abb. 6.16** in Form einer Isolinien-Darstellung abgebildet. Für sämtliche untersuchten Parameterkombinationen liegen die Reflexionskoeffizienten in der Größenordnung von  $10^{-4} < r < 10^{-3}$ . Die Reflexionen nehmen dabei grundsätzlich mit zunehmendem  $\sigma_{RB}$  - und damit einem zunehmendem Anteil an Höherharmonischen - zu. Für kleine dimensionslose Abstände sind die Reflexionskoeffizienten nahezu unabhängig von dem numerischen Phasenwinkel. Lediglich bei sehr kleinen Phasenwinkeln lässt sich ein nennenswerter Gradient des Reflexionskoeffizienten erkennen. Mit zunehmendem dimensionslosen Abstand nimmt jedoch die  $\varphi_{num}$ -Abhängigkeit von  $r$  deutlich zu. Zudem lässt sich bei großen dimensionslosen Abständen mit abnehmendem numerischen Phasenwinkel stets eine Zunahme des Gradienten  $\left. \frac{\partial r}{\partial \varphi_{num}} \right|_{\sigma_{RB}=const}$  erkennen.

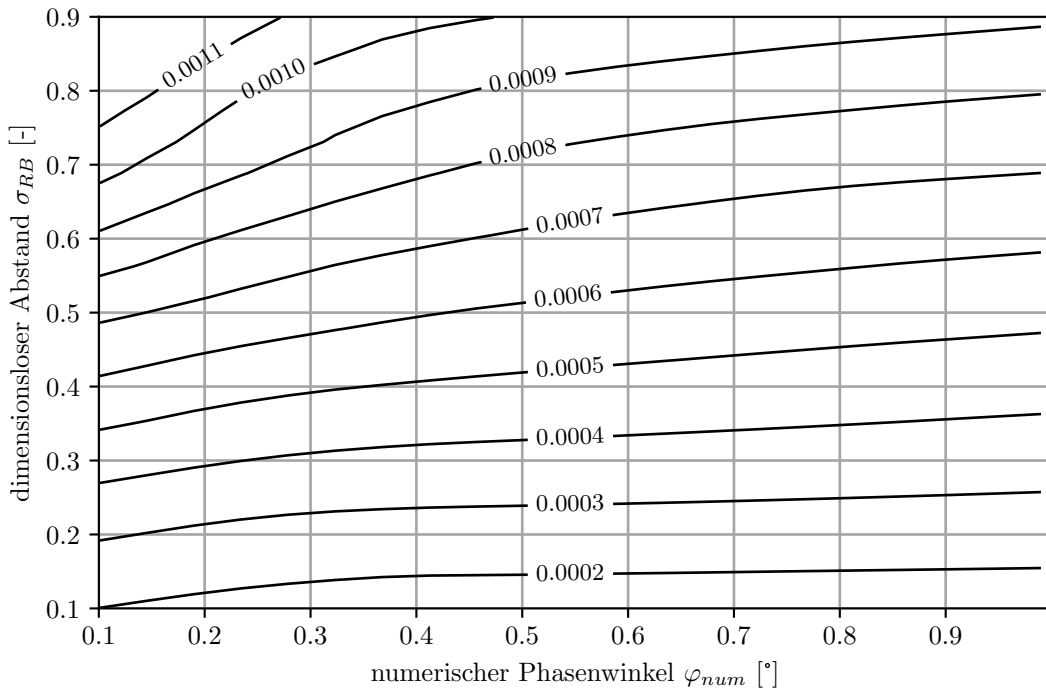


Abbildung 6.16.: Reflexionskoeffizienten der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,01$

Ein Vergleich von Abb. 6.16 mit Abb. 6.14 macht deutlich, dass die Verläufe des Reflexionskoeffizienten  $r$  qualitativ gut mit denen des Grundschwingungsgehaltes  $G$  übereinstimmen und dieser somit als signifikanter Einflussfaktor auf die Reflexionen anzusehen ist. Im Bereich großer numerischer Phasen-

winkel - und damit zunehmender Konzentration der Oberschwingungen auf diejenige erster Ordnung - sind jedoch leicht gegenläufige Tendenzen der Gradienten der Reflexionskoeffizienten und der Grundschwingungsgehalte zu erkennen. Es lässt sich folgern, dass eine Verteilung der höherfrequenten Anteile auf mehrere Oberschwingungen zu geringeren Reflexionen führt als eine Konzentration auf eine Oberschwingung. Dieser Effekt ist jedoch nicht stark ausgeprägt.

Die Variationen von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  wurden ebenfalls für eine große akustische Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,1$  sowie eine kleine akustische Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,001$  durchgeführt. Die resultierenden Reflexionskoeffizienten sind als Isolinien-Darstellungen in **Abb. 6.17-6.18** abgebildet. Bei der größten akustischen Machzahl liegen die Reflexionskoeffizienten in der Größenordnung von  $10^{-3} < r < 10^{-2}$  und nehmen maximal bis auf etwa zwei Prozent zu. Die Abhängigkeiten von  $\sigma_{RB}$  und  $\varphi_{num}$  sind vergleichbar mit denjenigen bei  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,01$ , die Gradienten über dem numerischen Phasenwinkel sind jedoch signifikant geringer. Dies ist vermutlich auf die deutlich geringere Länge der Rechendomains - und die damit einhergehenden geringeren Auswirkungen von numerischer Diffusion - zurückzuführen.

Die Reflexionskoeffizienten bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,001$  in **Abb. 6.18** sind lediglich für die Bereiche von  $0,1 < \varphi_{num} < 0,5$  sowie  $0,1 < \sigma_{RB} < 0,5$  abgebildet. Für größere Werte der variierten Parameter sind die angeregten Wellen an der Randbedingung derart stark gedämpft, dass eine Auswertung nicht möglich ist. Die Reflexionskoeffizienten liegen in dem untersuchten Parameterbereich in der Größenordnung von  $10^{-5}$ . Es zeigt sich eine deutlich stärkere Abhängigkeit der Reflexionen von den variierten Parametern, insbesondere im Bereich der größeren numerischen Phasenwinkel. Die primäre Ursache dafür ist die große Lauflänge bei der kleinen akustischen Machzahl, die aus den gegebenen  $\sigma_{RB}$  resultiert, vgl. Gl. (2.67). Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Variation von  $r$  in dem untersuchten Parameterbereich wie auch die Größenordnung der Reflexionskoeffizienten vernachlässigbar klein ist. Die relativ gute qualitative Übereinstimmung der Verläufe der Reflexionen mit den Verläufen des Grundschwingungsgehaltes an der Randbedingung zeigen sich - wie zuvor für  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,01$  - auch bei  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,1$  und  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,001$ . Die Grundschwingungsgehalte für die beiden weiteren akustischen Machzahlen sind in **Anhang A.1** angeführt.

Aus den betrachteten Kennfeldern lassen sich einige Richtlinien für die Anwendung der filterbasierten Randbedingung ableiten. Hinsichtlich einer geringen Rechenzeit sollte die Randbedingung so nah wie möglich an der Anregung positioniert werden. Insbesondere bei Pulsationen mit einer dominanten Grundfrequenz lassen sich dadurch niedrige Reflexionen erreichen, da sich mit größerem Abstand zunehmend Höherharmonische ausbilden und damit auch zunehmende Reflexionen der Grundharmonischen an der Randbedingung entstehen. Bei mittleren bis kleinen akustischen Machzahlen ist der Abstand aufgrund der geringen auftretenden Restreflexionen von untergeordneter Bedeutung. Ein größerer Abstand kann mitunter hinsichtlich Reflexionen zudem förderlich sein, da durch numerische Dämpfung die Amplituden zusätzlich reduziert werden. Ein längeres Rechenetz geht jedoch stets mit zunehmendem Rechenaufwand einher. Im Allgemeinen lässt sich aus den dargestellten Kennfel-

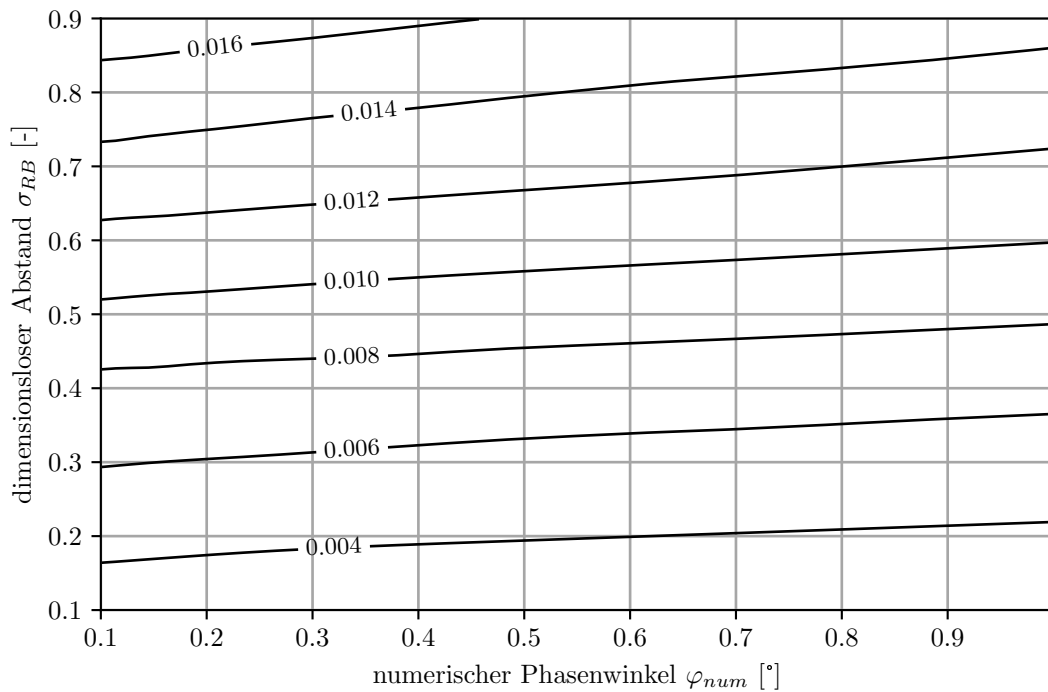


Abbildung 6.17.: Reflexionskoeffizienten der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,1$

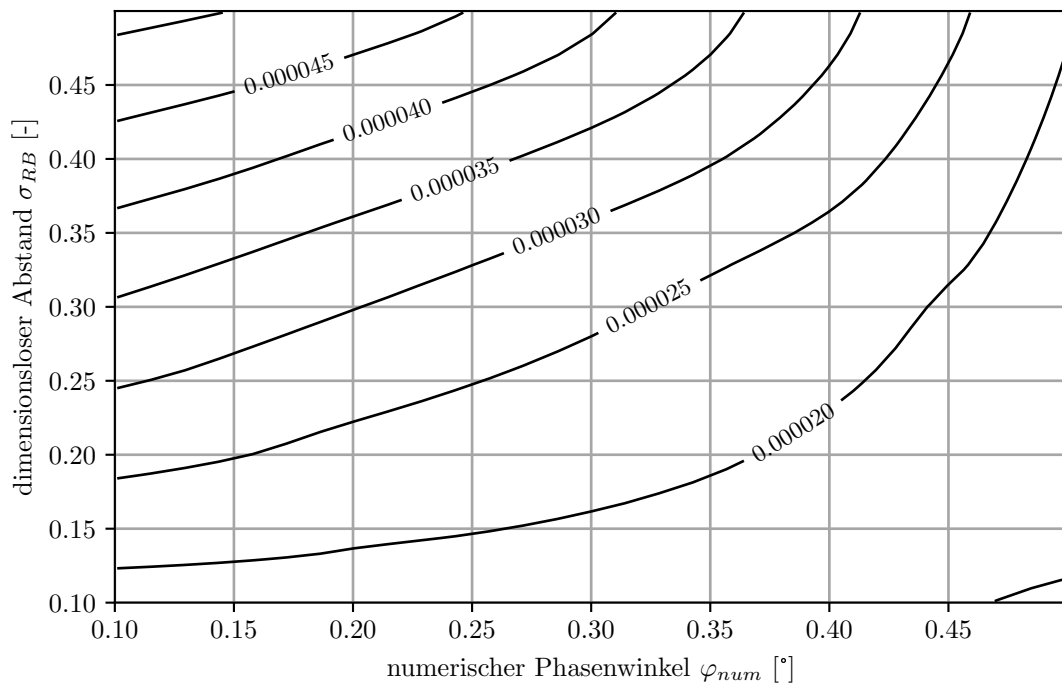


Abbildung 6.18.: Reflexionskoeffizienten der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,001$

dern schließen, dass der dimensionslose Abstand  $\sigma_{RB}$  - und damit auch der absolute Abstand innerhalb einer Domain - bei Anwendung der GMW-Randbedingung möglichst klein gewählt werden sollte.

### 6.5.5. Vergleich mit der klassischen CRB

Für einen Vergleich der neu entwickelten GMW-Randbedingung mit der klassischen CRB wurden die  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -kompensierten Simulationen nach Tab. 6.2 bei Verwendung der CRB nach Gl. (6.1-6.2) durchgeführt. Die resultierenden Reflexionskoeffizienten sind in **Abb. 6.19** den entsprechenden Ergebnissen bei Verwendung der GMW-Randbedingung gegenübergestellt. Der dargestellte Vergleich dient gleichzeitig dazu, einen potentiellen Einfluss des Druckkorrekturterms  $p_{korrr}$  auf die Reflexionseigenschaften der GMW-Randbedingung zu untersuchen, da die Formulierung der CRB keinen Druckkorrekturterm beinhaltet.

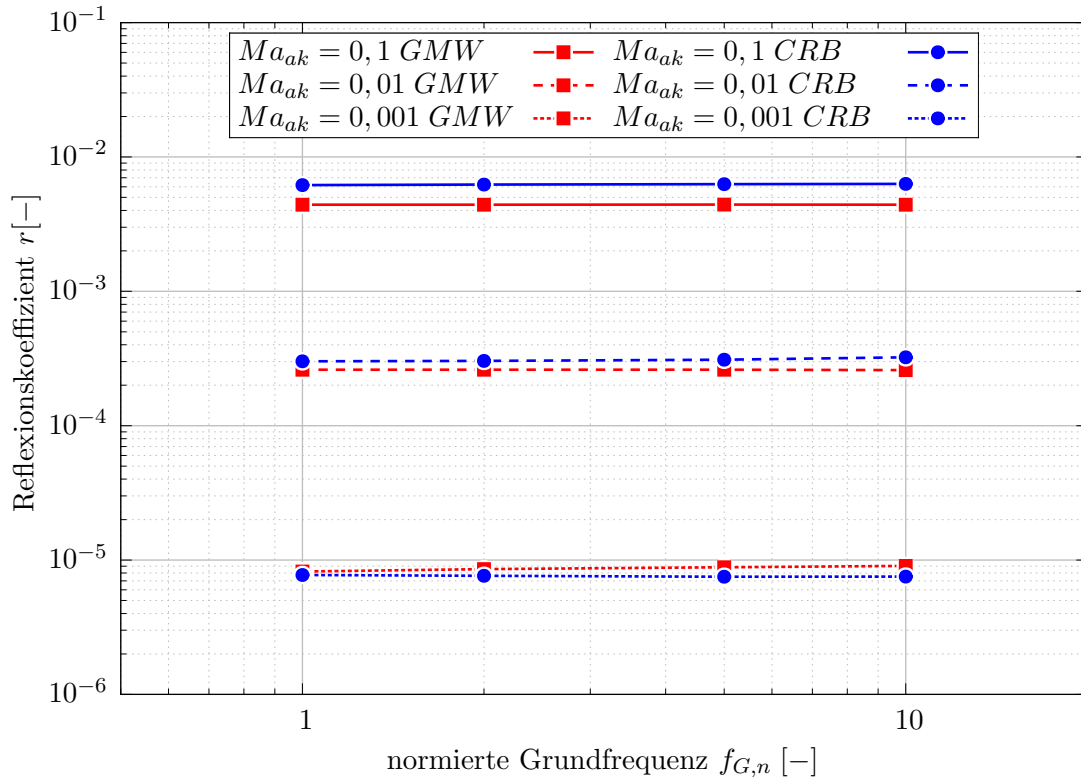


Abbildung 6.19.: Reflexionskoeffizienten der klassischen und der entwickelten GMW-Randbedingung bei Variation der akustischen Machzahl

Es wird deutlich, dass die klassische charakteristische Randbedingung nahezu identische Reflexionseigenschaften wie die GMW-Randbedingung aufweist. Weder hinsichtlich der Abhängigkeit von akustischer Machzahl  $Ma_{ak}$  noch von der Frequenz sind signifikante Unterschiede erkennbar. Dies lässt den Schluss zu, dass allein das nichtlineare Verhalten der Wellen für die auftretenden Reflexionen verantwortlich ist und nicht der filterbasierte Korrekturterm. Zur weiteren Unterstützung dieser Annahme werden Simulationen mit dem gleichen Finite-Differenzen-Schema angewandt auf das linearisierte System der Erhaltungsgleichungen (Gl.(2.12-2.13)) mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,1$  und

der CRB sowie der GMW-Randbedingung durchgeführt. Es ergeben sich bei beiden Varianten der Randbedingung für die untersuchten Frequenzen Reflexionskoeffizienten von  $r = 0$  (nicht dargestellt). Es lässt sich somit folgern, dass sich auch mit einer klassischen charakteristischen Randbedingung in nichtlinearen Systemen keine vollständige Reflexionsfreiheit realisieren lässt.

### 6.5.6. Vergleich mit der LRT-Randbedingung

Ein direkter Vergleich der Reflexionseigenschaften der neu entwickelten GMW-Randbedingung mit der LRT-Randbedingung ist in **Abb. 6.20** gegeben. Es sind die Reflexionskoeffizienten für  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -kompensierte Simulationen mit  $\sigma_{RB} = 0,22$  sowie  $\varphi_{num} = 0,42^\circ$ ,  $Ma_{ak} = 0,01$  sowie  $\overline{Ma} = 0$  abgebildet. Bei der LRT-Randbedingungen wurde eine Konstante von  $K = 2$  sowie  $K = 200$  untersucht, vgl. Gl. (6.7). Die Anregungsfrequenz wurde über den Bereich von zwei Dekaden mit  $2 \leq f_G \leq 200$  variiert.

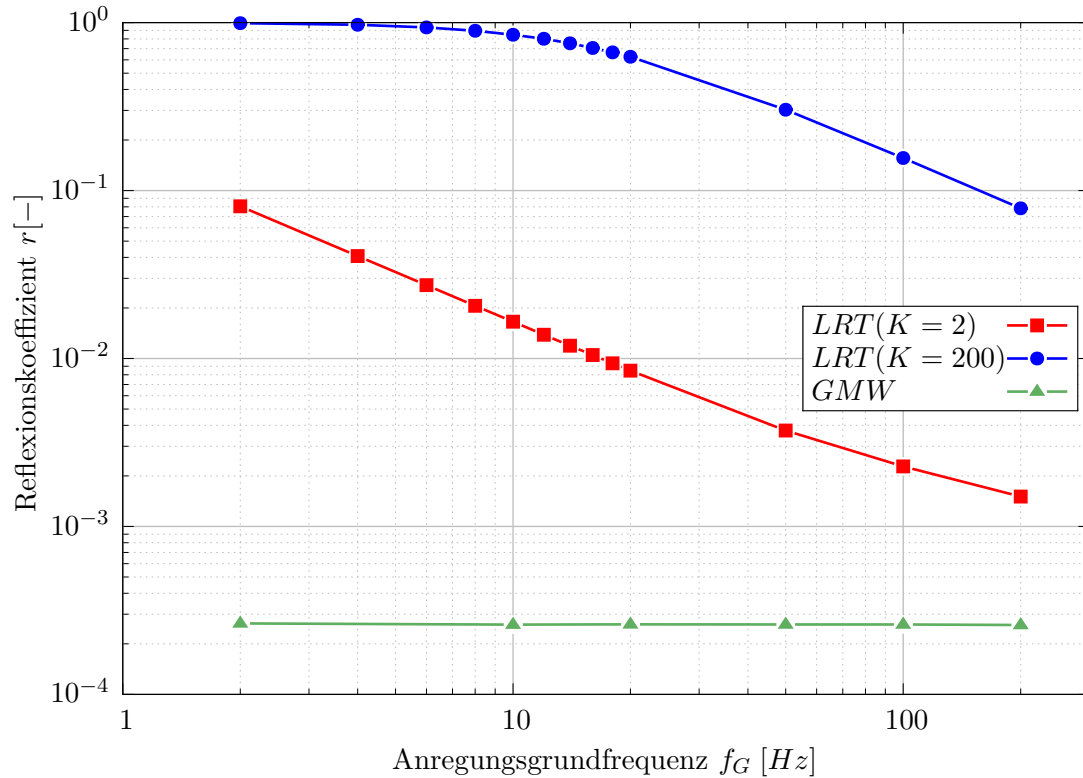


Abbildung 6.20.: Reflexionskoeffizienten der charakteristischen Randbedingung mit LRT sowie der entwickelten GMW-Randbedingung bei  $Ma_{ak} = 0,01$

Der Einfluss der Konstante  $K$  auf die auftretenden Reflexionen wird unmittelbar deutlich. Grundsätzlich sind die Verläufe des Reflexionskoeffizienten über der Frequenz gleich, werden jedoch durch  $K$  über der Frequenzachse skaliert [SNP04, PWM06]. Für den hohen Wert von  $K = 200$ , der bei den untersuchten Parametern für eine Einhaltung des geforderten mittleren Druckes erforderlich ist (vgl. Abb. 6.8), zeigen sich hohe Reflexionen über das gesamte untersuchte Frequenzband. Für den Frequenzbereich  $f_G \leq 100$  beträgt der Reflexionskoeffizient stets mehr als zehn Prozent und tendiert mit abnehmender Frequenz gegen  $r = 1$ . Bei dem kleinen Wert von  $K = 2$ , bei dem bereits

signifikante Abweichungen vom geforderten Mittelwert auftreten, zeigen sich deutlich geringere Reflexionen. Diese sind jedoch immer noch um mindestens eine Größenordnung höher als bei Verwendung der GMW-Randbedingung und nehmen insbesondere im niederfrequenten Bereich ( $f < 20 \text{ Hz}$ ) stark zu.

### 6.5.7. Reflexionen bei unangepasstem Filter

Im Folgenden werden die Auswirkungen einer Verstimmung des Filters, das heißt bei einer signifikanten Abweichung der Anregungsfrequenz  $f_G$  von einem ganzzahligen Vielfachen der Filterbasisfrequenz  $f_B$ , auf das Reflexionsverhalten an der Randbedingung untersucht. Dazu werden wiederum  $\sigma_{RB}/\varphi_{num}$ -kompensierte Simulationen mit  $\sigma_{RB} = 0,22$  sowie  $\varphi_{num} = 0,42^\circ$  bei konstanter Filterbasisfrequenz und variabler Anregungsfrequenz durchgeführt. Die akustische Machzahl beträgt  $Ma_{ak} = 0,01$ , die Machzahl der Gleichströmung beträgt  $\overline{Ma} = 0$ . Die Untersuchungen werden mit einer Filterbasisfrequenz von  $f_B = 10 \text{ Hz}$  sowie  $f_B = 50 \text{ Hz}$  durchgeführt, wobei die normierte Grundfrequenz zwischen  $0,04 \leq f_{G,n} \leq 5$  variiert wird. Die Ergebnisse sind in Form der resultierenden Reflexionskoeffizienten in **Abb. 6.21** dargestellt.

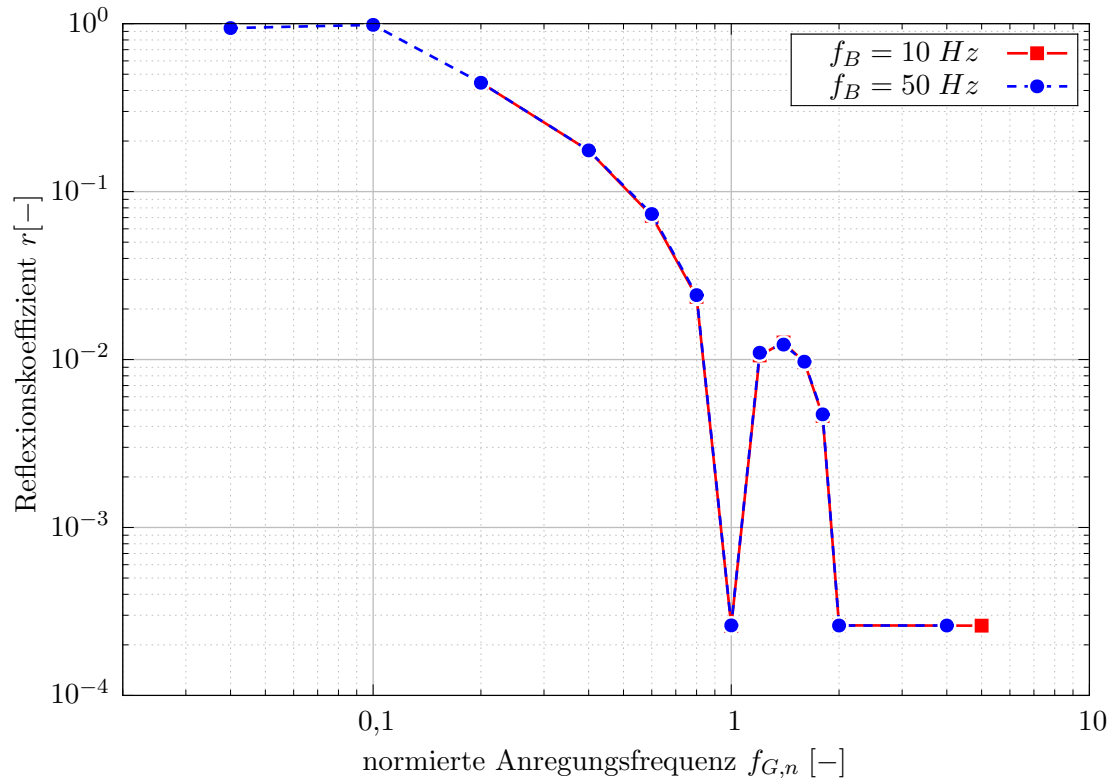


Abbildung 6.21.: Reflexionskoeffizienten der reflexionsfreien Randbedingung bei Variation der normierten Anregungsfrequenz  $f_{G,n}$  und  $Ma_{ak} = 0,01$  für  $f_B = 10 \text{ Hz}$  bzw.  $f_B = 50 \text{ Hz}$

Die Reflexionskoeffizienten verlaufen für beide untersuchten Filterbasisfrequenzen über der normierten Anregungsfrequenz  $f_{G,n}$  gleich. Diese ist somit auch im unangepassten Betrieb ein allgemeingültiger Parameter zur Quantifizierung der auftretenden Reflexionen. Im niederfrequenten Bereich zeigen sich

starke Reflexionen an der entwickelten Randbedingung. Bei den niedrigsten Anregungsfrequenzen von  $f_{G,n} \leq 0,1$  tritt nahezu Vollreflexion auf. In diesem Frequenzbereich reagiert das Filter derart träge, dass es annähernd wie ein akustisch offenes Ende wirkt. Bei Annäherung der Anregungsfrequenz an die Filterbasisfrequenz oder Vielfache derselben nehmen die Reflexionskoeffizienten kontinuierlich ab und weisen im Auslegungszustand ( $f_{G,n} = 1, 2, 3, \dots$ ) die bereits zuvor beobachteten niedrigen Reflexionskoeffizienten auf. Es sei anzumerken, dass bei leichten Abweichungen der Anregungsfrequenz von der Filterbasisfrequenz Reflexionen in der Größenordnung von  $10^{-2}$  auftreten, was für viele praktische Anwendungen akzeptabel ist. Trotzdem sollte die Filterfrequenz stets genau an die Anregung angepasst werden.

### 6.5.8. Reflexionen bei kontinuierlich veränderlicher Frequenz

Im Folgenden werden die Reflexionen an der entwickelten GMW-Randbedingung bei kontinuierlicher Frequenzvariation untersucht. Dazu werden Simulationen mit einem Modell der Länge  $l = 5 \text{ m}$  durchgeführt. Am Einlass wird eine Schnelleanregung mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,01$  aufgeprägt. Die zeitabhängige Anregungsgrundfrequenz wird linear erhöht, vgl. Gl. (6.26):

$$f_G(t) = 20 \text{ Hz} + 1 \frac{\text{Hz}}{\text{s}} \cdot t \quad (6.36)$$

Die ebenfalls zeitlich variable Anzahl der Abtastwerte des Filters wird nach Gl. (6.28) bestimmt. Es wird eine physikalische Zeit von  $80 \text{ s}$  simuliert, so dass die Anregungsfrequenz zwischen  $20 \leq f_G \leq 100$  variiert. Zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten wird ein gleitendes Zeitfenster mit einer Länge von  $2 \text{ s}$  ausgewertet und spektral transformiert. Dazu wird in diesem Fall aufgrund der veränderlichen Frequenz eine Flattop-Fensterung verwendet, wobei jeweils die mittlere Frequenz eines Zeitfensters betrachtet wird. Die Auswertung wird nach  $5 \text{ s}$  simulierter Zeit begonnen, da das Filter der Randbedingung zu diesem Zeitpunkt bereits eingeschwungen ist.

In **Abb. 6.22** ist der zeitliche Verlauf des Reflexionskoeffizienten der GMW-Randbedingung dargestellt. Ebenfalls abgebildet ist der korrespondierende Verlauf der Helmholtzzahl  $He$ , die wie folgt definiert ist:

$$He(t) = \frac{l}{\lambda} = \frac{l \cdot \bar{f}_G}{\bar{a}_{num}} \quad (6.37)$$

Die Helmholtzzahl setzt eine charakteristische Länge - in diesem Fall die geometrische Länge der numerischen Domain  $l$  - in Bezug zu der Wellenlänge der periodischen Schwankung bei der gemittelten Anregungsgrundfrequenz  $\bar{f}_G$ , welche durch arithmetische Mittelung über dem ausgewerteten Zeitfenster bestimmt wird.

Bei einer Betrachtung der auftretenden Reflexionskoeffizienten wird deutlich, dass diese über den gesamten ausgewerteten Zeitraum in der Größenordnung der zuvor untersuchten Reflexionskoeffizienten bei konstanter Anregungsfrequenz liegen. Der leicht gezackte Verlauf des Reflexionskoeffizienten lässt keine Systematik erkennen und ist vermutlich auf die Tatsache zurückzuführen, dass ein Signal



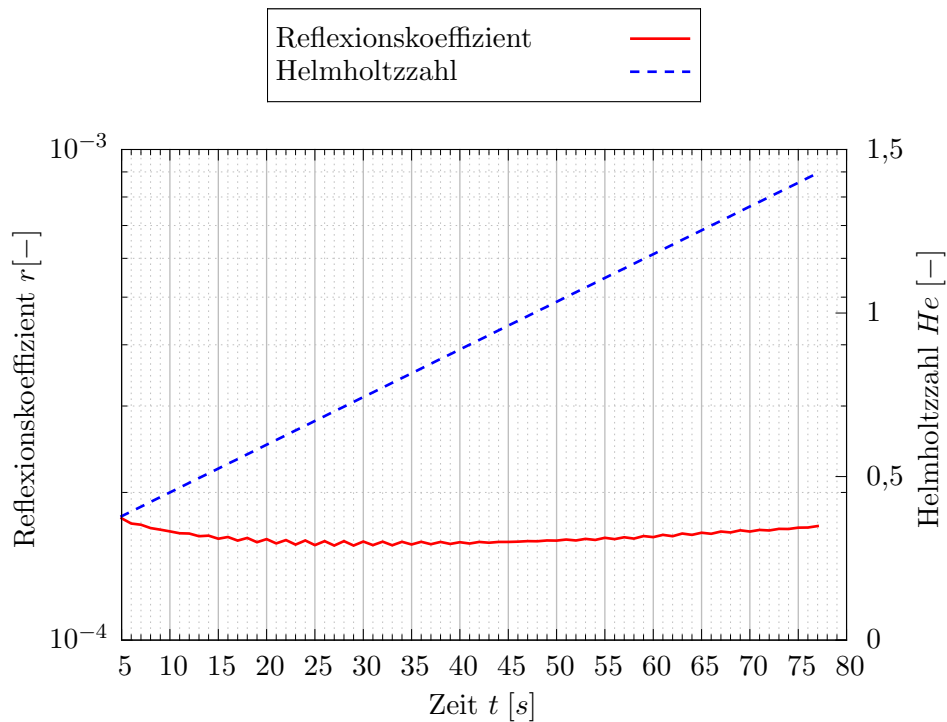


Abbildung 6.22.: Reflexionskoeffizienten der GMW-Randbedingung bei kontinuierlich veränderlicher Anregungsfrequenz mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 0,01$

mit kontinuierlich veränderlicher Frequenz spektral transformiert wird. Die Größenordnung ist jedoch vernachlässigbar klein.

Der Verlauf von  $r$  weist über der Zeit (und damit der Frequenz) keine signifikanten Variationen auf. Es ist daher auch kein Zusammenhang zu der ebenfalls abgebildeten Helmholtzzahl zu erkennen. Das Verhältnis von Wellenlänge zu Domainlänge spielt somit hinsichtlich der Reflexionen an der nichtreflektierenden Randbedingung keine Rolle. Dies ist auch zu erwarten, da bei den vorliegenden Größenordnungen der Reflexionen am Austritt keine nennenswerten Mehrfachreflexionen auftreten, bei denen die geometrische Länge - bspw. hinsichtlich Resonanzen - relevant wäre.

Insgesamt zeigt sich, dass die reflexionsfreie Randbedingung auch bei kontinuierlich veränderlicher Frequenz - und damit leicht unangepasstem Filter - Reflexionskoeffizienten aufweist, die denen bei konstanter Frequenz entsprechen. Damit ist die Randbedingung auch zur Anwendung bspw. bei Pulsationsstudien in Verbindung mit drehzahlveränderlichen Fluidenergiemaschinen geeignet.

## 6.6. Zwischenergebnis

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass durch die entwickelte filterbasierte charakteristische Randbedingung eine erhebliche Reduktion der auftretenden Reflexionen ausgehend vom bisherigen Stand des Wissens realisierbar ist. Dies gilt sowohl für konstante als auch zeitlich variable Anregungsfrequenzen. Der Drift der Gleichgrößen wird dabei praktisch vollständig unterdrückt. Grundlegende Voraussetzung für die Anwendung der neuen Randbedingung ist die möglichst genaue Kenntnis der auftretenden Frequenzen in der modellierten Domain. Zudem ist die Randbedingung zur Anwendung bei periodischen Problemen konzipiert und nur bei Anregung mit einer Grundharmonischen und zugehörigen Oberwellen anwendbar.

Die akustische Machzahl  $Ma_{ak}$ , und damit die Nichtlinearität einer Welle, ist der bestimmende Parameter hinsichtlich der Größe der auftretenden Reflexionen. Eine überlagerte Gleichströmung zeigt hingegen keinen signifikanten Einfluss. Die auftretenden residualen Reflexionen liegen im Rahmen der durchgeführten Parametervariationen im Allgemeinen in einer für praktische Anwendungen vertretbaren Größenordnung.



## 7. Reflexionsfreie Kopplungsbedingung

In diesem Kapitel wird die Methode zur reflexionsfreien Kopplung von eindimensionalen CV-Domains und dreidimensionalen FV-Domains erläutert. Dabei wird der Ansatz verfolgt, zunächst die Ursachen für Reflexionen an einer Kopplungsstelle verschiedener numerischer Schemata zu untersuchen und die relevanten Einflussparameter zu formulieren. Anschließend werden - ausgehend von diesen Ursachen - Maßnahmen entwickelt, um Reflexionen an einer Kopplungsstelle zu reduzieren bzw. zu eliminieren.

Dazu wird nach einigen grundlegenden Betrachtungen zu Anforderungen und Eigenschaften einer 3D/1D-Kopplung zunächst eine Theorie zur Entstehung von Reflexionen an Kopplungsstellen beliebiger Wellenleiter dargelegt und mathematisch untermauert. Diese Theorie wird auf die Wellenausbreitungseigenschaften numerischer Domains angewendet. Anschließend werden die zur späteren Kopplung notwendigen Voruntersuchungen an den untersuchten Schemata unabhängig voneinander durchgeführt. Zur Validierung der Theorie und damit der Kopplungsmethode werden dann zunächst eindimensionale, reibungsfreie Domains gekoppelt und untersucht. Die Komplexität wird dann durch Berücksichtigung mehrerer Dimensionen in der FV-Domain sowie unter Einbeziehung von Wandreibung sukzessive erhöht.

### 7.1. Grundlegende Anforderungen an eine 3D/1D-Kopplung

Im Folgenden werden einige grundlegende Betrachtungen zu den geforderten Eigenschaften einer 3D/1D-Kopplung und deren Erfüllbarkeit durchgeführt. Diese werden zunächst unabhängig von einer numerischen Umsetzung anhand einer Transformation von Strömungsgrößen einer dreidimensionalen auf eine eindimensionale Strömung vorgenommen. Eine derartige Transformation ist nur im Bereich einer quasi-eindimensionalen Strömung und ebener Wellenausbreitung sinnvoll anwendbar, da ansonsten die Informationen potentieller räumlicher Effekte zwangsläufig unterdrückt werden. Die Eigenschaften der Transformation werden daher anhand einer Rohrströmung analysiert, vgl. **Abb. 7.1**.

Abgebildet sind die Profile der Strömungsgeschwindigkeiten  $c_{1D}$  und  $c_{3D}$  als Funktional der radialen Laufvariable  $r$ . Im eindimensionalen Raum sind sämtliche Strömungsgrößen  $p_{1D}$ ,  $\rho_{1D}$ ,  $T_{1D}$ ,  $c_{1D}$  unabhängig von  $r$ . Bei der dreidimensionalen Rohrströmung ist die Strömungsgeschwindigkeit ein Funktional des Radius  $r$ , wobei ein rotationssymmetrisches Profil angenommen wird. Im Fall nicht gekrümmter Stromlinien und unter der Annahme geringer Turbulenzen in der Kernströmung entspricht der Wanddruck in guter Näherung dem statischen Druck in der Kernströmung, so dass kein signifikanter Druckgradient quer zur Strömungsrichtung auftritt [Sch06]. Für die Betrachtungen in

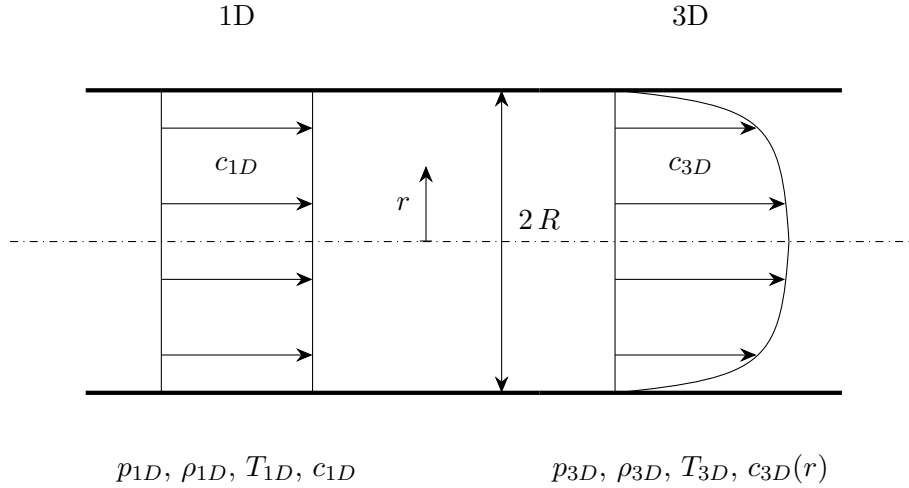


Abbildung 7.1.: Skizze zur Transformation der Strömungsgrößen einer dreidimensionalen und einer eindimensionalen Rohrströmung.

diesem Abschnitt wird der statische Druck vereinfachend als konstant über dem Querschnitt angenommen. Ohne signifikante Temperaturdifferenz zwischen Fluid und Rohrwandung ist die Temperatur ebenfalls räumlich konstant [CH90]. Unter der Annahme eines idealen Gases ist die Dichte  $\rho_{3D}$  somit nach der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase Gl. (2.7) ebenfalls kein Funktional von  $r$ .

Um die Erhaltungsgleichungen Gl. (2.1-2.3) zu erfüllen, sollte die Transformation zwischen 3D und 1D konservativ sein. Dies lässt sich sicherstellen, indem die Flüsse von Masse, Impuls und Energie im eindimensionalen und dreidimensionalen Raum gleichgesetzt werden:

$$\text{Massefluss:} \quad \int_0^R \rho_{1D} c_{1D} 2\pi r \, dr = \int_0^R \rho_{3D} c_{3D}(r) 2\pi r \, dr \quad (7.1)$$

$$\text{Impulsfluss:} \quad \int_0^R (\rho_{1D} c_{1D}^2 + p_{1D}) 2\pi r \, dr = \int_0^R (\rho_{3D} c_{3D}^2(r) + p_{3D}) 2\pi r \, dr \quad (7.2)$$

$$\text{Energiefluss:} \quad \int_0^R \left( \rho_{1D} c_{1D} u_{1D} + \rho_{1D} \frac{c_{1D}^3}{2} \right) 2\pi r \, dr = \int_0^R \left( \rho_{3D} c_{3D}(r) u_{3D} + \rho_{3D} \frac{c_{3D}^3(r)}{2} \right) 2\pi r \, dr \quad (7.3)$$

Um Reflexionsfreiheit zu gewährleisten, muss nach Gl. (2.73) die spezifische Schallimpedanz konstant sein, und damit (unter Annahme gleicher Dämpfungseigenschaften in 1D und 3D)

$$(\rho_{1D} a_{1D}) = (\rho_{3D} a_{3D}) . \quad (7.4)$$

Da die Schallgeschwindigkeit, die anhand der Temperatur bestimmt wird, für eine physikalisch sinnvolle Transformation konstant sein sollte ( $a_{1D} = a_{3D}$ ), muss  $T_{1D} = T_{3D}$  und gemäß der kalorischen Zustandsgleichung Gl. (2.8)  $u_{1D} = u_{3D}$  gelten. Gleichermaßen resultiert aus der Forderung  $a_{1D} = a_{3D}$  und Gl. (7.4) die Forderung nach einer konstanten Dichte  $\rho_{1D} = \rho_{3D}$ . Nach der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase Gl. (2.7) muss daher weiterhin  $p_{1D} = p_{3D}$  erfüllt sein. Ein Resultat aus Gl. (7.4) und damit eine Voraussetzung für Reflexionsfreiheit bei einer Transformation der

Strömungsgrößen einer Rohrströmung vom dreidimensionalen in den eindimensionalen Raum ist also die Stetigkeit der thermodynamischen Zustandsgrößen  $p$ ,  $\rho$  und  $T$  bzw.  $u$ .

Der einzig freie Parameter ist die Strömungsgeschwindigkeit in der eindimensionalen Domain  $c_{1D}$ . Anhand Gl. (7.1-7.3) ist somit eine geeignete gemittelte Geschwindigkeit  $c_{1D}$  zu bestimmen, die die Massen-, Impuls- bzw. Energiekonservativität sicherstellt. Ein Auflösen von Gl. (7.1) nach der Strömungsgeschwindigkeit  $c_{1D}$  ergibt unter der Berücksichtigung der geforderten Konstanz der thermodynamischen Variablen:

$$\int_0^R c_{1D} \rho_{3D} 2\pi r dr = \int_0^R c_{3D}(r) \rho_{3D} 2\pi r dr \quad (7.5)$$

$$\Leftrightarrow c_{1D} = \frac{1}{R} \int_0^R c_{3D}(r) dr \quad (7.6)$$

Ein Umstellen der Gleichung für den Impulsfluss Gl. (7.2) führt zu:

$$c_{1D}^2 = \frac{1}{R} \int_0^R c_{3D}^2(r) dr \quad (7.7)$$

Durch Quadrieren von Gl. (7.6) und Gleichsetzen mit Gl. (7.7) ergibt sich:

$$\frac{1}{R} \int_0^R c_{3D}^2(r) dr = \frac{1}{R^2} \left( \int_0^R c_{3D}(r) dr \right)^2 \quad (7.8)$$

Nach der Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung<sup>1</sup> ist Gl. (7.8) nicht im Allgemeinen, sondern nur für einige Sonderfälle - bspw. den Trivialfall  $c_{3D} = c_{1D}$  - erfüllt. Für beliebige Profile ist somit eine Stetigkeit der thermodynamischen Zustandsgrößen bei einer Transformation von 3D in 1D nicht gleichzeitig mit Konservativität in Masse und Impuls erfüllbar.

Eine analoge Betrachtung wird mit dem Masse- und dem Energiefluss durchgeführt. Durch Einsetzen von Gl.(7.6) in Gl. (7.3) ergibt sich:

$$\frac{1}{R^2} \left( \int_0^R c_{3D}(r) dr \right)^3 = \int_0^R c_{3D}^3(r) dr \quad (7.9)$$

Diese Gleichung ist - wie Gl. (7.8) - ebenfalls nicht für beliebige  $c_{3D}(r)$ , sondern lediglich Sonderfälle erfüllt.

Aus den obigen Betrachtungen lässt sich ableiten, dass bei der Transformation der Strömungsgrößen einer dreidimensionalen in diejenigen einer eindimensionalen Strömung eine konstante Schallkennimpedanz nicht mit gleichzeitiger Konservativität in allen Erhaltungsgrößen erfüllbar ist. In bisherigen Ansätzen zur 3D/1D-Kopplung wurde üblicherweise strikte Konservativität gefordert, vgl. Abs. 3.1. In dieser Arbeit wird zugunsten einer konstanten Schallkennimpedanz keine strikte Konservativität vorausgesetzt.

Zur Bestimmung der gemittelten Strömungsgeschwindigkeit  $c_{1D}$  lässt sich eine der Gleichungen für die Flüsse (Gl. (7.1-7.3) auswählen, so dass die entsprechende Erhaltungsgröße erhalten wird. Da

---

<sup>1</sup>Die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung lautet [Haz02]:  $\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

die Akustik im Wesentlichen durch die Masse- und die Impulserhaltung beschrieben wird (vgl. Abs. 2.2), ist die Energieerhaltung von untergeordneter Bedeutung. Es kann also zwischen den für die Akustik gleichwertigen Gleichungen für den Massefluss (Gl. (7.1)) und für den Impulsfluss (Gl. (7.2)) gewählt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Konstanz des Masseflusses gewählt. Die genaue Umsetzung der 3D/1D- sowie 1D/3D-Transformation im Rahmen der in dieser Arbeit entwickelten Kopplungsmethode wird später in Abs. 7.8 erläutert.

## 7.2. Theorie der reflexionsfreien Kopplungsbedingung

Die zu entwickelnde Kopplungsmethode soll ein- und dreidimensionale numerische Domains, die mit unterschiedlichen Methoden diskretisiert werden, miteinander verbinden. In einer eindimensionalen Domain kann ausschließlich eine eindimensionale Strömung und entsprechend eine ebene Wellenausbreitung abgebildet werden. Somit ist eine derartige Kopplungsmethode nur in denjenigen Bereichen eines Systems sinnvoll einsetzbar, in denen von quasi-eindimensionaler Strömung sowie ausschließlich ebener Wellenausbreitung ausgegangen werden kann. Die in dieser Arbeit entwickelte Kopplungsmethode ist für die Simulation der instationären Wechselwirkungen zwischen Fluidenergiemaschinen und Anlagen konzipiert. Somit ist die Kopplung in dem Bereich einer Rohrleitung vorzunehmen, in dem keine räumlichen Effekte mehr auftreten. Das Konzept der entwickelten Kopplungsmethode basiert daher auf akustischen Betrachtungen zu Reflexionen ebener Wellen.

Wie in Abs. 2.2.3 erläutert, werden ebene Wellen an Grenzflächen zwischen Domains unterschiedlicher Wellenausbreitungseigenschaften reflektiert. Diese Wellenausbreitungseigenschaften werden über die komplexe Schallimpedanz  $\underline{Z}_S$  in Betrag und Phase quantifiziert. In Gl. (2.72) ist diese im Kontext der linearen Wellentheorie mit der linearen Schallgeschwindigkeit  $a_0$  sowie dem Gleichanteil der Dichte  $\bar{\rho}$  definiert. Ohne diese Einschränkung lässt sich die Impedanz mit Hilfe der allgemeinen Schallgeschwindigkeit  $a$  (vgl. Gl. (2.18)) sowie der Dichte  $\rho$  ausdrücken:

$$\underline{Z}_S = \rho a \left( \frac{\beta - j\alpha}{k} \right) \quad (7.10)$$

Die Wellenausbreitungseigenschaften eines beliebigen Wellenleiters sind somit abhängig von der Dichte  $\rho$ , der Schallgeschwindigkeit  $a$ , der Phasenkonstante  $\beta$ , der Dämpfungskonstante  $\alpha$  und der Kreiswellenzahl  $k$ . Für nichtdispersive<sup>1</sup> Wellenausbreitung, wie die Ausbreitung akustischer Wellen in Gasen, lassen sich mit der Beziehung  $k = \frac{\omega}{a}$  die relevanten Einflussparameter auf  $\rho$ ,  $a$ ,  $\alpha$  sowie  $\beta$  reduzieren. Weiterhin gilt bei kleiner Dämpfung in sehr guter Näherung  $\beta = k$  [MI86].

Wie in Abs. 2.3 erläutert, werden durch die Diskretisierung einer Domain die Dämpfungseigenschaften - definiert durch  $\alpha$  - sowie die Schallgeschwindigkeit  $a$  verändert. Die Schallimpedanz eines diskretisierten physikalischen Systems ist somit neben den physikalischen Eigenschaften des modellierten

---

<sup>1</sup>Dispersive Wellenausbreitung erfolgt bei einer Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Wellenleiter. [MI86]

Systems von den Eigenschaften des numerischen Schemas abhängig. Es lässt sich daher eine numerische Schallimpedanz  $\underline{Z}_{S,num}$  definieren, die für ein physikalisch ungedämpftes System gegeben ist durch:

$$\underline{Z}_{S,num} = \rho a_{num} \left( \frac{k_{num} - j\alpha_{num}}{k_{num}} \right) \quad (7.11)$$

Die numerischen Impedanzen zweier numerischer Domains (1/2), die mit unterschiedlichen numerischen Schemata diskretisiert werden, jedoch die gleichen physikalischen Eigenschaften aufweisen, unterscheiden sich somit durch die numerische Diffusion und Dispersion der jeweiligen Schemata. Nach Gl. (2.73) treten Reflexionen an der Grenzfläche zwischen zwei Domains auf, wenn sich die Impedanzen unterscheiden. Demnach können an der Grenzfläche zwischen zwei numerischen Domains Reflexionen minimiert bzw. eliminiert werden, wenn die numerischen Schallimpedanzen identisch sind. Der theoretische numerische Reflexionskoeffizient ergibt sich zu:

$$r_{th,num,12} = \frac{\underline{Z}_{S,num,2} - \underline{Z}_{S,num,1}}{\underline{Z}_{S,num,2} + \underline{Z}_{S,num,1}} = 0 \quad \text{für} \quad \underline{Z}_{S,num,1} = \underline{Z}_{S,num,2} \quad (7.12)$$

Aus Gl. (7.11-7.12) lassen sich - unter der Voraussetzung  $\rho_1 = \rho_2$  - folgende fundamentale Bedingungen für die reflexionsfreie Kopplung numerischer Domains ableiten:

- In beiden Domains muss eine identische numerische Dämpfung auftreten:

$$\alpha_{num,1} \stackrel{!}{=} \alpha_{num,2} \quad (7.13)$$

$$\Leftrightarrow \xi_d = \frac{\alpha_{num,2}}{\alpha_{num,1}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.14)$$

- In beiden Domains muss die gleiche numerischen Schallgeschwindigkeit herrschen:

$$a_{num,1} \stackrel{!}{=} a_{num,2} \quad (7.15)$$

$$\Leftrightarrow \xi_a = \frac{a_{num,2}}{a_{num,1}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.16)$$

Dabei ist  $\xi_d$  definiert als das Verhältnis der numerischen Dämpfungskonstanten und  $\xi_a$  als das Verhältnis der numerischen Schallgeschwindigkeiten.

Bei der Kopplung von Domains mit unterschiedlichen Diskretisierungsschemata und der Kopplung von multidimensionalen Domains (bspw. 1D-3D) mit dem gleichen Diskretisierungsschema sind unterschiedliche Mechanismen und damit Parameter relevant. Daher werden für die nachfolgenden theoretischen Betrachtungen die beiden Teilaspekte der Kopplung zunächst getrennt betrachtet.



### 7.2.1. Herleitung der numerischen Dämpfungskonstante

Im Folgenden wird ein Ausdruck für die numerische Dämpfungskonstante  $\alpha_{num}$  in Abhängigkeit des Diffusionsfehlers  $\epsilon_d$  hergeleitet. Dieser Zusammenhang wird anschließend anhand numerischer Testfälle validiert.

Die exakte Lösung eines diskretisierten Systems von Erhaltungsgleichungen entspricht für endliche Werte von  $\Delta x$  und  $\Delta t$  nicht generell der exakten Lösung der kontinuierlichen Erhaltungsgleichungen. Da die Approximation der räumlichen Differentiale durch Differenzen üblicherweise nach dem Term erster oder zweiter Ordnung abgebrochen wird, repräsentiert der Abbruchfehler  $\epsilon_A = \mathcal{O}(\Delta t^q, \Delta x^p)$  einen zusätzlichen, in der ursprünglichen Differentialgleichung nicht enthaltenen Term<sup>1</sup>. Die exakte Lösung der nach dem in dieser Arbeit verwendeten CV-Schema diskretisierten Gleichungen für die Schallcharakteristiken Gl. (5.19-5.20), welche Massen- und Impulserhaltung repräsentieren, entsprechen beispielsweise für  $f_x = 0$  nicht etwa der exakten Lösung der Differentialgleichungen Gl. (5.13-5.14), sondern Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{dc}{dt} = -\epsilon_A \quad (7.17)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{dc}{dt} = \epsilon_A \quad (7.18)$$

Diese Gleichungen werden als äquivalente Differentialgleichungen bezeichnet. Bei der Diskretisierung konvektiver Terme, wie bei der Ausbreitung akustischer Wellen, entspricht der Abbruchfehler einem diffusiven Term:

$$\epsilon_A = -\nu_{num} \frac{\partial^2(p + \rho a c)}{\partial x^2}. \quad (7.19)$$

Dabei repräsentiert  $\nu_{num}$  die numerische Diffusion bzw. die numerische Viskosität  $\nu_{num}$ , welche die in Abs. 2.3 erläuterten spektralen Fehler verursacht. [Hir07]

Nach der Definition des numerischen Diffusionsfehlers (Gl. (2.74)) resultiert aus der Diskretisierung bei physikalisch reibungsfreier Wellenausbreitung in  $n_t$  Zeitschritten relativ zur ungedämpften Amplitude  $\hat{p}_{exakt}$  eine Amplitudenabnahme von

$$\hat{p}_{num}(t) = \hat{p}_{num}(n_t \cdot \Delta t) = \hat{p}_{exakt} \cdot \epsilon_d^{n_t}. \quad (7.20)$$

Für eine sich ausbreitende Welle (ohne Reflexionen) mit der Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  lässt sich mit der Anzahl an Ortsschritten  $n_x = CFL \cdot n_t$  die (reelle) Amplitude in Abhängigkeit des Ortes  $\hat{p}_{num}(x)$  ausgehend von einer initialen Amplitude  $\hat{p}_{exakt} = \hat{p}_{num}(x = 0)$  wie folgt ausdrücken:

$$\hat{p}_{num}(x) = \hat{p}_{num}(n_x \cdot \Delta x) = \hat{p}_{exakt} \cdot \epsilon_d^{\left(\frac{n_x}{CFL}\right)} \quad (7.21)$$

Die komplexe Druckamplitude ergibt sich bei Berücksichtigung der Phase zu

$$\underline{\hat{p}}_{num}(x) = \underline{\hat{p}}_{exakt} \cdot \epsilon_d^{\left(\frac{n_x}{CFL}\right)} \cdot e^{-jk n_x \Delta x} \quad (7.22)$$

<sup>1</sup>Hierbei entspricht  $q$  der Ordnung der zeitlichen Diskretisierung und  $p$  der Ordnung der räumlichen Diskretisierung.

und der entsprechende Verlauf in Raum und Zeit für eine durchlaufende, harmonische, physikalisch ungedämpfte Welle in einem diskreten System zu:

$$p(x, t) = \Re \left( \hat{p}_{\text{exakt}} \cdot \epsilon_d^{\left(\frac{n_x}{CFL}\right)} \cdot e^{j\left(\omega\left(\frac{n_x}{CFL}\right)\Delta t - k n_x \Delta x\right)} \right) \quad (7.23)$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.48) macht deutlich, dass Gl. (7.23) - unter der Annahme einer rein durchlaufenden Welle ( $\hat{g} = 0$  und damit  $\hat{f} = \hat{p}$ ) - die Ausbreitung einer gedämpften harmonischen Welle beschreibt, wobei  $\beta = k$  sowie

$$\epsilon_d^{\left(\frac{n_x}{CFL}\right)} = e^{-\alpha_{\text{num}} n_x \Delta x} \quad (7.24)$$

ist. Damit kann eine numerische Dämpfungskonstante  $\alpha_{\text{num}}$  für die analytische Beschreibung der Ausbreitung einer rein numerisch gedämpften Welle formuliert werden:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{num}} &= -\ln \left( \epsilon_d^{\left(\frac{1}{\Delta x \cdot CFL}\right)} \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta x \cdot CFL} \cdot \ln(\epsilon_d) = -k \cdot \frac{1}{\varphi_{\text{num}} \cdot CFL} \cdot \ln(\epsilon_d) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Analog zu der physikalischen Dämpfungskonstante, definiert in Gl. (2.41), ergibt sich der Ausdruck für  $\alpha_{\text{num}}$  aus der Wellenzahl  $k$  sowie einem Funktional derjenigen Größen, welche die Dämpfung quantifizieren. Im Fall der numerischen Dämpfung sind das  $\epsilon_d$ ,  $\varphi_{\text{num}}$  sowie  $CFL$ .

Zur Veranschaulichung des Effektes der numerischen Diffusion sowie des Zusammenhangs zwischen  $\alpha_{\text{num}}$  und dem numerischen Diffusionsfehler  $\epsilon_d$  nach Gl. (7.25) werden Simulationen mit dem CV-Schema einer sich ausbreitenden Welle mit einer Wellenlänge von  $\lambda_{\text{init}} = 10 \text{ m}$  und einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  durchgeführt. Es wird eine reibungsfreie Wellenausbreitung angenommen. Eine Domain der Länge  $l = 500 \text{ m}$  wird mit einer harmonischen Welle initialisiert.

Um das System zu initialisieren, wird dabei wie folgt vorgegangen:

- Zunächst wird der initiale Verlauf des Druckes bei einem gegebenen mittleren Druck  $\bar{p}$ , einer gegebenen Initialisierungsamplitude von  $\hat{p}_{\text{init}}$  sowie der gegebenen Wellenlänge von  $\lambda_{\text{init}}$  bestimmt:

$$p_{\text{init}}(x) = \bar{p} + \hat{p}_{\text{init}} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_{\text{init}}} x \right) \quad (7.26)$$

- In Abhängigkeit des Druckes wird die ortsabhängige initiale Temperatur bestimmt. Da ein reibungsfreies, adiabates System modelliert wird, wird diese unter Annahme einer isentropen Zustandsänderung ausgehend von den mittleren Größen  $\bar{p}$  und  $\bar{T}$  ermittelt:

$$T_{\text{init}}(x) = \bar{T} \cdot \left( \frac{\bar{p}}{p_{\text{init}}(x)} \right)^{\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)} \quad (7.27)$$

- Mit Hilfe der idealen Gasgleichung wird schließlich die resultierende Dichte im Initialisierungszustand bestimmt:

$$\rho_{\text{init}}(x) = \frac{p_{\text{init}}(x)}{R \cdot T_{\text{init}}(x)} \quad (7.28)$$

- Mit den nun bekannten räumlichen Verläufen lässt sich unter Verwendung der Isentropenbeziehung für den Druck  $p$  und die Dichte  $\rho$  die exakte Schallgeschwindigkeit nach Gl. (2.18) ermitteln:

$$a_{init}(x) = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Big|_x = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\kappa} \kappa \cdot \rho_{init}(x)^{\kappa-1}} \quad (7.29)$$

- Schließlich wird mit der Schallgeschwindigkeit und der Dichte der Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit für die Initialisierung nach folgender Beziehung bestimmt:

$$c_{init}(x) = \frac{\hat{p}_{init}}{\rho_{init}(x)a_{init}(x)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{init}} x\right) = \frac{p_{init}(x) - \bar{p}}{\rho_{init}(x)a_{init}(x)} \quad (7.30)$$

Die Initialisierungszustände für die Temperatur  $T_{init}$ , die Dichte  $\rho_{init}$  und die Schallgeschwindigkeit  $a_{init}$  sind - unter der Annahme eines idealen Gases und konstanter Entropie - für den gegebenen Druck  $p_{init}$  exakt. Die Formulierung für die Strömungsgeschwindigkeit  $c_{init}$  stellt eine Näherung an die mit  $p_{init}$  korrespondierende exakte Lösung der eindimensionalen nichtlinearen Erhaltungsgleichungen Gl. (2.9-2.11) dar. Im Nenner wird die Strömungsgeschwindigkeit - als Teil der nichtlinearen Ausbreitungsgeschwindigkeit (vgl. Gl. (2.53)) - vernachlässigt. Erst durch diese Vereinfachung lässt sich die Initiallösung explizit bestimmen. Es ist zu erwarten, dass die Abweichungen der Initialisierung bei kleinen akustischen Machzahlen ebenfalls klein sind und mit zunehmender akustischer Machzahl entsprechend zunehmen.

Der mittlere Druck beträgt  $\bar{p} = 10^5 \text{ Pa}$  und die mittlere Temperatur  $\bar{T} = 100 \text{ K}$ . Mit  $\kappa = 2$  und  $R = 50 \frac{\text{J}}{\text{K kg}}$  wird ein fiktives Fluid mit einer mittleren Schallgeschwindigkeit von  $\bar{a}(\bar{p}, \bar{\rho}) = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  modelliert. Die Initialisierungsamplitude des Druckes wird entsprechend der akustischen Machzahl auf  $\hat{p}_{init} = 200 \text{ Pa}$  gesetzt. Mit einer räumlichen Auflösung von  $\Delta x = 0,05 \text{ m}$  ergibt sich bei den Simulationen ein numerischer Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 1,8^\circ$ . Die CFL-Zahl wurde zu  $CFL = 0,5$  gewählt, da das explizite Upwind-Schema erster Ordnung in diesem Fall keine numerische Dispersion aufweist ( $\epsilon_\phi = 1$ ) und der numerische Fehler somit auf Diffusion beschränkt ist [Hir07].

Als Randbedingungen werden am Einlass ein konstanter Druck von  $p_{Ein} = 10^5 \text{ Pa}$  und am Auslass eine konstante Geschwindigkeit von  $c_{Aus} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  vorgegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass die Randbedingungen bei den im Folgenden präsentierten Ergebnissen keine Rolle spielen, da jeweils zwei Wellenlängen der sich ausbreitenden, initialisierten Welle in der Mitte der Domain ( $240 \text{ m} \leq x_{eva} \leq 260 \text{ m}$ ) zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_{Lauf}$  ausgewertet werden. Dabei steht  $x_{eva}$  für den nachfolgend dargestellten Auswertebereich der Domain. Die Auswertezeitpunkte  $t_{Lauf}$  stehen für die Laufzeit, die die initialisierte Welle jeweils fortgeschritten ist. Zu jeder Laufzeit  $t_{Lauf}$  existiert somit eine korrespondierende Lauflänge  $x_{Lauf} = \bar{a}_{exakt} \cdot t_{Lauf}$ , die diejenige Strecke definiert, die die initialisierte Welle innerhalb von  $t_{Lauf}$  zurückgelegt hat. Diese Lauflängen  $x_{Lauf}$  sind deutlich kleiner als die Distanz von den Randbedingungen zu dem ausgewerteten Bereich von  $240 \text{ m} \leq x_{eva} \leq 260 \text{ m}$  innerhalb der Domain. Daher können anhand der betrachteten Verläufe ausschließlich Eigenschaften des Schemas (unabhängig von den Randbedingungen) untersucht werden. Die Zeitpunkte  $t_{Lauf}$ , nach denen die

sich ausbreitende Welle im oben erläuterten Bereich der Domain ausgewertet wird, sind mit den korrespondierenden Anzahlen an Zeitschritten  $n_t$  und Lauflängen  $x_{Lauf}$  sowie den entsprechenden dimensionslosen Abständen  $\sigma_{Lauf}$  (vgl. Abs. 2.2.2) in **Tab. 7.1** zusammengefasst.

$x_{Lauf}$ [m]	$\sigma_{Lauf}$ [-]	$t_{Lauf}$ [s]	$n_t$ [-]
20	0,019	0,2	800
40	0,038	0,4	1600
60	0,057	0,6	2400

Tabelle 7.1.: Lauflängen  $x_{Lauf}$ , dimensionslose Abstände  $\sigma_{Lauf}$  sowie Laufzeiten  $t_{Lauf}$  und Anzahlen an Zeitschritten  $n_t$  der Ergebnisse von Simulationen gedämpfter Wellenausbreitung in Abb. 7.2

Die numerischen Ergebnissen sind in **Abb. 7.2** in Form des Amplitudenverhältnisses der Schallschnelle<sup>1</sup>

$$\Lambda_c = \frac{c(x_{eva})}{\hat{c}(x_{Lauf} = 0)} = \frac{c(x_{eva})}{\hat{c}_{init}} \quad (7.31)$$

über der auf den Evaluationsbereich bezogenen Helmholtzzahl

$$He_{eva} = \frac{x - x_{eva,min}}{\lambda_{init}} = \frac{x - 240 \text{ m}}{\lambda_{init}} \quad (7.32)$$

gegenübergestellt. Die abgebildeten Verläufe weisen im betrachteten Evaluationsbereich ( $240 \text{ m} \leq x_{eva} \leq 260 \text{ m}$ ) eine konstante Amplitude auf, da die (mit konstanter Amplitude) initialisierte Welle zu jedem Betrachtungszeitpunkt  $t_{Lauf}$  die korrespondierende Lauflänge  $x_{Lauf}$  zurückgelegt hat und die Dämpfung abhängig von der Lauflänge ist. Bei einem Vergleich der Verläufe nach unterschiedlichen  $x_{Lauf}$  bzw.  $t_{Lauf}$  untereinander wird die typische degressive Amplitudenabnahme einer gedämpften Schwingung deutlich.

Zusätzlich zu den numerischen Lösungen sind in Abb. 7.2 analytische Lösungen von Gl. (2.48) für eine rein durchlaufende Welle dargestellt. Für die verwendeten numerischen Parameter weist das explizite Upwind-Schema erster Ordnung einen Diffusionsfehler von  $\epsilon_d = 0.999877$  auf [Hir07], so dass sich nach Gl. (7.25) eine numerische Dämpfungskonstante von  $\alpha_{num} \approx 0,005$  ergibt. Für die analytische Lösung von Gl. (2.48) wird zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen in dem dargestellten Vergleich  $\alpha = 0,005$  vorgegeben.

Es zeigt sich, dass der analytische und der numerische Verlauf praktisch gleich sind. Lediglich im Bereich der Maxima und Minima sind leichte Abweichungen bei den großen Lauflängen ( $x_{Lauf} = 40 \text{ m}$  bzw.  $x_{Lauf} = 60 \text{ m}$ ) zu erkennen. Diese resultieren aus der Wellenaufteilung, die in der nicht-linearen numerischen Lösung bei einer kleinen akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  zwar schwach ausgeprägt aber dennoch präsent ist. Der Effekt der numerischen Diffusion lässt sich bei der numerischen Lösung von physikalisch ungedämpfter Wellenausbreitung somit als gedämpfte Schwingung mit einer numerischen Dämpfungskonstante  $\alpha_{num}$  nach Gl. (7.25) beschreiben.

<sup>1</sup>Da es sich um eine rein durchlaufende Welle (ohne Reflexionen) handelt, verlaufen Schalldruck und Schallschnelle in Phase und es gilt  $\Lambda_c(x_{Lauf}) = \Lambda_p(x_{Lauf})$ .

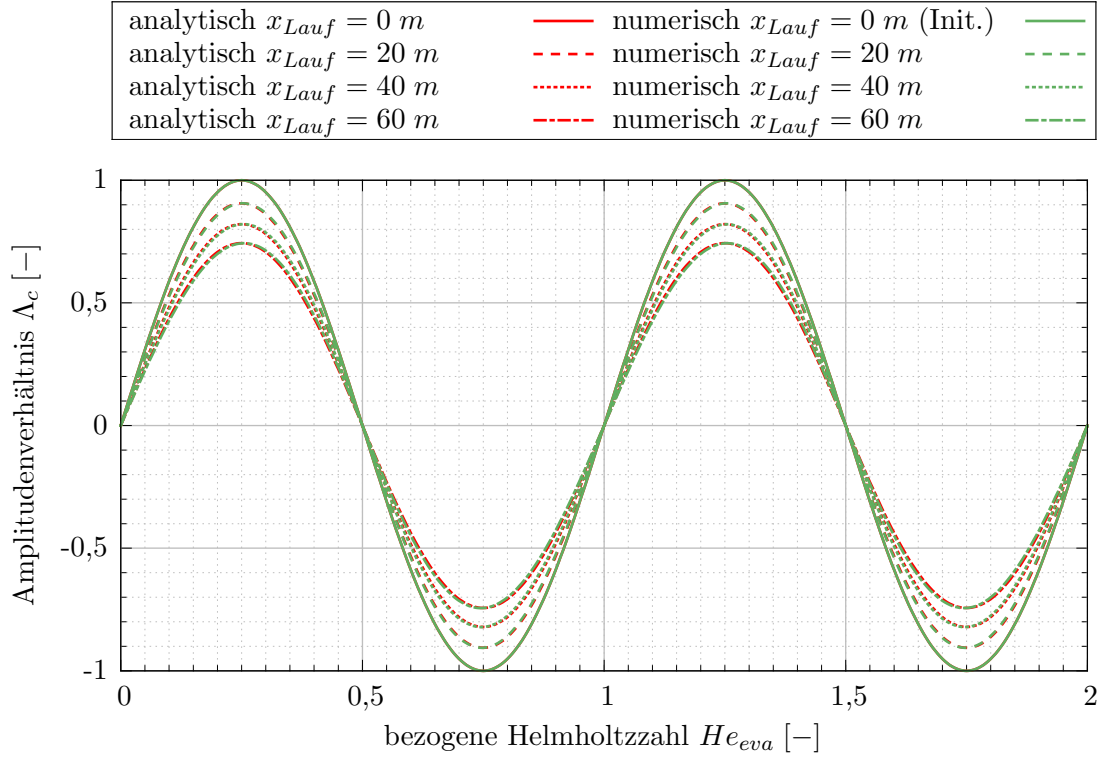


Abbildung 7.2.: Vergleich der normierten Wellenform der analytischen Lösung einer gedämpften und der numerischen Lösung einer physikalisch ungedämpften Welle mit  $\lambda_{init} = 10 \text{ m}$

### 7.2.2. Einfluss der numerischen Schallgeschwindigkeit

Um den Effekt der numerischen Dispersion zu veranschaulichen, werden erneut Simulationen einer fortschreitenden Welle der Wellenlänge  $\lambda_{init} = 10 \text{ m}$  durchgeführt. Die Initialisierung wird wie zuvor in Abs. 7.2.1 beschrieben durchgeführt. Die räumliche Diskretisierung wird mit  $\Delta x = 0,5 \text{ m}$  und einem resultierenden numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 18^\circ$  bewusst grob gewählt, da numerische Dispersion ein eher schwach ausgeprägter Effekt ist und sich nur mit sehr grober Diskretisierung anschaulich darstellen lässt. Die CFL-Zahl beträgt  $CFL = 0,25$ , so dass sich ein numerischer Diffusionsfehler von  $\epsilon_d = 0,990781$  [Hir07] und damit eine numerische Dämpfungskonstante von  $\alpha_{num} \approx 0,074$  ergibt.

In **Abb. 7.3** sind die numerischen Ergebnisse in Form des Amplitudenverhältnisses  $\Lambda_c$  über der bezogenen Helmholtzzahl  $H_{eva}$  nach einer Simulationszeit entsprechend  $x_{Lauf} = 20 \text{ m}$  sowie  $x_{Lauf} = 40 \text{ m}$  dargestellt. Zusätzlich sind zum Vergleich wiederum analytische Lösungen einer sich ausbreitenden Welle mit einer der numerischen Dämpfung entsprechenden vorgegebenen Dämpfungskonstante von  $\alpha = 0,074$  zu den gleichen Zeitpunkten bzw. nach den gleichen Lauflängen abgebildet. Für die gewählten Parameter weist das numerische Schema einen Dispersionsfehler von  $\epsilon_\phi = 0,993788$  auf [Hir07]. Aufgrund der numerischen Dispersion entspricht die numerische Schallgeschwindigkeit nicht der exakten Schallgeschwindigkeit, sondern ergibt sich nach Gl. (2.75) zu

$$a_{num} = \epsilon_\phi \cdot a_{exakt} = 0,993788 \cdot 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 99,3788 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (7.33)$$

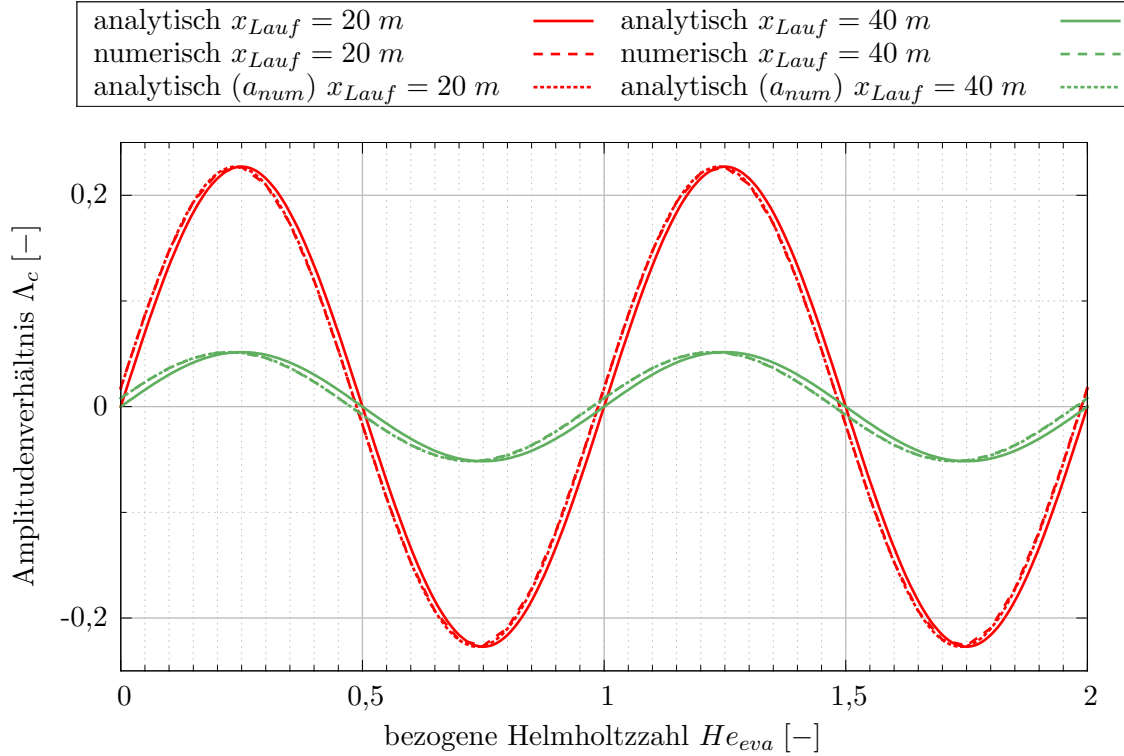


Abbildung 7.3.: Vergleich der normierten Wellenform von analytischer und numerischer Lösung einer dispersiven, gedämpften Welle der Wellenlänge  $\lambda_{init} = 10\text{ m}$

Daher ist in Abb. 7.3 weiterhin die analytische Lösung mit einer Schallgeschwindigkeit, die der numerischen Schallgeschwindigkeit entspricht, aufgeführt.

Es wird deutlich, dass die numerische der analytischen Lösung mit der gleichen exakten Schallgeschwindigkeit ( $a_{exakt} \neq a_{num}$ ) "nacheilt", die diskrete Welle sich also langsamer ausbreitet als die kontinuierliche. Mit zunehmender Ausbreitungsdauer schieben sich die analytische und die numerische Lösung zudem weiter auseinander, wie ein Vergleich der Lösungen zu den unterschiedlichen Zeitpunkten deutlich macht. Die analytische Lösung mit einer Schallgeschwindigkeit, die der numerischen entspricht ( $a_{num} = a_{exakt}$ ) ist hingegen praktisch gleich der numerischen Lösung. Der numerische Dispersionsfehler lässt sich also durch Anpassung der exakten Schallgeschwindigkeit kompensieren.

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde gezeigt, dass sich der spektrale numerische Fehler mit Hilfe einer numerischen Dämpfungskonstante  $\alpha_{num}$  sowie einer numerischen Schallgeschwindigkeit  $a_{num}$  ausdrücken lässt. Die Dämpfungskonstante  $\alpha_{num}$  ist ausschließlich von dem numerischen Diffusionsfehler  $\epsilon_d$ , der Wellenzahl  $k$  sowie den numerischen Parametern  $CFL$  und  $\varphi_{num}$  abhängig. Die numerische Schallgeschwindigkeit ist - neben der exakten Schallgeschwindigkeit - ausschließlich von dem numerischen Dispersionsfehler  $\epsilon_\phi$  sowie ebenfalls  $CFL$  und  $\varphi_{num}$  abhängig [Hir07].

### 7.2.3. Einfluss multidimensionaler Domains

Bei der Kopplung einer mehrdimensionalen mit einer eindimensionalen Domain gilt es grundsätzlich ebenfalls, nach Gl. (7.12) die Impedanzen der Domains (1D/3D) anzugleichen, um Reflexionen zu minimieren. Die Schallgeschwindigkeit ist in einer eindimensionalen Domain bei gleicher zu Grunde liegender Physik gleich derjenigen in einer mehrdimensionalen Domain. Hinsichtlich der Dämpfung spielen in einer diskreten Domain jedoch - neben numerischen Parametern - auch physikalische Parameter eine Rolle, da viskose, sowie (in 3D) räumliche Effekte berücksichtigt werden. Es ist somit eine effektive Dämpfungskonstante zu berücksichtigen, die sowohl numerische als auch physikalische Dämpfung beinhaltet:

$$\alpha_{eff} = \alpha_{num} + \alpha_{exakt} \quad (7.34)$$

Für die Kopplung einer 1D- mit einer 3D-Domain lautet die erste fundamentale Kopplungsbedingung (Gl. (7.13) bzw. Gl. (7.14)) daher:

$$\alpha_{eff,1D} \stackrel{!}{=} \alpha_{eff,3D} \quad (7.35)$$

$$\Leftrightarrow \xi_d = \frac{\alpha_{eff,3D}}{\alpha_{eff,1D}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.36)$$

Die Einflussgrößen auf die Dämpfungskonstante akustischer Wellen in Rohrleitungen  $\alpha_{exakt}$  sowie deren Abbildungsgüte in einem numerischen Modell werden in Abs. 7.8 umfassend untersucht und diskutiert.

Ein weiterer Aspekt, der in einer dreidimensionalen Domain zum Tragen kommt und berücksichtigt werden muss, ist das Geschwindigkeitsprofil über dem Rohrquerschnitt, vgl. Abs. 7.1. Dies betrifft einerseits die Vorgabe bzw. Ermittlung eines Profils bei Strömung von der 1D- in die 3D-Domain, da im Bereich der 1D-Domain kein Profil existiert, welches übertragen werden könnte. Andererseits muss bei Strömung von der 3D- in die 1D-Domain die räumliche Geschwindigkeitsverteilung am Rand der 3D-Domain geeignet modelliert werden, um lokale Reflexionen zu vermeiden. Der Einfluss von Geschwindigkeitsprofilen wird ebenfalls in Abs. 7.8 untersucht.

## 7.3. Systematik der numerischen Impedanzanpassung

Wie zuvor erläutert, ist die Basis der entwickelten Kopplungsmethode die Anpassung der spektralen Wellenausbreitungseigenschaften von gekoppelten Domains. Die wesentliche Einflussgröße ist dabei der spektrale numerische Fehler, der für beliebige numerische Schemata im Allgemeinen nicht bekannt ist. Die Bestimmung der spektralen Fehler ist daher eine notwendige Vorarbeit für die reflexionsfreie Kopplung numerischer Domains.

Bei Kenntnis der spektralen Eigenschaften zu koppelnder Domains können mit Hilfe von geeigneten Kombinationen der numerischen Parameter die fundamentalen Kopplungsbedingungen Gl. (7.14) bzw. (7.36) sowie Gl. (7.16) in bestmöglicher Näherung erfüllt werden. Das konkrete Vorgehen und die

Ermittlung geeigneter numerischer Parameter bei der spektralen Anpassung hängt von der Art des vorliegenden Problems ab und wird daher später in Abs. 7.7 vorgestellt.

## 7.4. Analytische Bestimmung spektraler Fehler

Bei Anwendung eines linearen<sup>1</sup> numerischen Schemas auf eine lineare Erhaltungsgleichung (bzw. ein lineares System) mit konstanten Koeffizienten lässt sich der spektrale numerische Fehler des Schemas analytisch bestimmen. Die Vorgehensweise wird von-Neumann-Stabilitätsanalyse genannt und wird zur Analyse hyperbolischer Systeme üblicherweise auf die lineare Konvektionsgleichung einer skalaren Größe  $\phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (7.37)$$

angewendet [Hir07]. Im Folgenden werden die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schemata mit der von-Neumann-Stabilitätsanalyse untersucht. Es sei angemerkt, dass der numerische Fehler eines Schemas - angewendet auf die Normalform der Erhaltungsgleichungen Gl. (5.12-5.14) - der gleiche ist, wie bei der ursprünglichen Formulierung mit partiellen Differentialen Gl. (5.2) [VB82].

In dem CV-Schema (vgl. Abs. 5.1) wird für die Diskretisierung im Raum das Upwind-Schema erster Ordnung und für die Zeit eine explizite Vorwärtsdifferenz benutzt. Die Anwendung auf Gl. (7.37) führt zu folgender diskreter Gleichung:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) = \phi_i^n - CFL (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) \quad (7.38)$$

Unter der Annahme einer harmonischen Lösung (oftmals als sinusoidale Testfunktion bezeichnet [VB82]) kann die skalare Lösung  $\phi$  zum Zeitpunkt  $(n + l)$  am Ort  $(i + m)$  ersetzt werden durch die komplexe Amplitude der Testfunktion  $\underline{\Phi}$ , wobei gilt:

$$\phi_{i+m}^{n+l} = \Re \left( \underline{\Phi}_{i+m}^{n+l} \right) = \Re \left( \underline{\Phi}^{n+l} e^{j(i+m)\varphi_{num}} \right) \quad (7.39)$$

Einsetzen der Testfunktion in Gl. (7.38) liefert:

$$\underline{\Phi}^{n+1} e^{ji\varphi_{num}} = \underline{\Phi}^n e^{ji\varphi_{num}} - CFL \left( \underline{\Phi}^n e^{ji\varphi_{num}} - \underline{\Phi}^n e^{j(i-1)\varphi_{num}} \right) \quad (7.40)$$

Normieren der Gleichung mit  $e^{ji\varphi_{num}} \underline{\Phi}^n$  führt zu:

$$\frac{\underline{\Phi}^{n+1}}{\underline{\Phi}^n} = \underline{G} = 1 - CFL (1 - e^{-j\varphi_{num}}) \quad (7.41)$$

Das Verhältnis der komplexen Amplituden der Testlösung zu zwei aufeinander folgenden Zeitschritten ist als Verstärkungsfaktor des numerischen Schemas  $\underline{G}$  definiert [Hir07]. Der Betrag von  $\underline{G}$  bezogen auf den Betrag der exakten Lösung, welcher für Gl. (7.37) stets 1 ist, entspricht dem Diffusionsfehler

<sup>1</sup>Als linear werden Schemata bezeichnet, in denen ausschließlich arithmetische Operatoren verwendet werden. Dies gilt bspw. nicht für Schemata mit *min/max*-Operator oder der Betragsfunktion, wie bei Verwendung von Limitern. [Hir07]



nach Gl. (2.74). Die Phase von  $\underline{G}$  bezogen auf die Phase der exakten Lösung ( $CFL \cdot \varphi_{num}$  für Gl. (7.37)) entspricht dem Dispersionsfehler nach Gl. (2.75).

Mit Hilfe der Eulerformel ergibt sich der Diffusionsfehler des Upwind-Schemas erster Ordnung mit expliziter Zeitintegration und damit des in dieser Arbeit verwendeten CV-Schemas zu

$$\epsilon_{d,CV} = \frac{|\underline{G}|_{CV}}{1} = \left(1 - 4 CFL (1 - CFL) \sin^2 \left(\frac{\varphi_{num}}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.42)$$

und der Dispersionsfehler zu

$$\epsilon_{\phi,CV} = \frac{\varphi_{\underline{G}CV}}{CFL \varphi_{num}} = \tan^{-1} \left( \frac{CFL \sin(\varphi_{num})}{1 - CFL + CFL \cos(\varphi_{num})} \right) \frac{1}{CFL \varphi_{num}}. \quad (7.43)$$

In dem FV-Schema wird eine räumliche Diskretisierung mit zentralen Differenzen angewendet. Für die Untersuchung des spektralen Fehlers (und damit rein numerischer Diffusion) werden zunächst die diffusiven Flüsse in Gl. (5.36) vernachlässigt. Unter der Voraussetzung eines äquidistanten Netzes lässt sich jedes FV-Schema in ein äquivalentes FD-Schema umformen [Hir07]. Werden die in Abs. 5.2 erläuterten numerischen Approximationen in der semi-diskretisierten Erhaltungsgleichung Gl. (5.36) eingesetzt und nur eine räumliche Dimension berücksichtigt, so ergibt sich bspw. für die Kontinuitätsgleichung ( $\phi = 1$  sowie  $Q = 0$ ) folgender Ausdruck:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_J}{\partial t} V_J dt + \int_t^{t+\Delta t} F_w^C + F_e^C dt \quad (7.44)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_J}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z dt + \int_t^{t+\Delta t} (\rho c)_e \Delta y \Delta z - (\rho c)_w \Delta y \Delta z dt = 0 \quad (7.45)$$

$$\Leftrightarrow \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_J}{\partial t} \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{(\rho c)_E + (\rho c)_J}{2} - \frac{((\rho c)_J + (\rho c)_W)}{2} dt = 0 \quad (7.46)$$

$$\Leftrightarrow \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho_J}{\partial t} dt = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{(\rho c)_E - (\rho c)_W}{2 \Delta x} dt \quad (7.47)$$

Wie bereits erwähnt, ist eine Kopplungsstelle zwischen 3D- und 1D-Domain nur in denjenigen Bereichen sinnvoll einsetzbar, in denen ausschließlich ebene Wellenausbreitung auftritt. In diesen Bereichen ist das FV-Schema unter der Forderung eines äquidistanten Netzes in Wellenausbreitungsrichtung somit mit Gl. (7.47) äquivalent, welche dem zentrale Differenzen-Schema, angewendet auf die differentielle Kontinuitätsgleichung, entspricht, wobei  $J = i$ ,  $E = i + 1$  sowie  $W = i - 1$  ist. Analog lässt sich die Umformung Gl. (7.44-7.47) auch auf die Impuls- und Energiegleichung anwenden.

Die Methode der Zeitintegration bestimmt bei Ein-Schritt-Verfahren, zu welchem Zeitpunkt die Größen auf der rechten Seite z. B. von Gl. (7.47) ausgewertet werden. Bei expliziter Zeitintegration werden die Größen zum Zeitpunkt  $n$  (bekannte Zeitebene), bei voll impliziter Zeitintegration zum Zeitpunkt  $n + 1$  (unbekannte Zeitebene) verwendet. Außerdem lässt sich zwischen den Größen der unterschiedlichen Zeitschritte mitteln:

$$\phi = \Theta \phi^{n+1} + (1 - \Theta) \phi^n \quad (7.48)$$

Bei einem Gewichtungsfaktor von  $\Theta = 0,5$  wird das Schema der zeitlichen Integration Crank-Nicolson-Schema genannt und weist eine Ordnung von  $q = 2$  auf [VB82]. Um den spektralen Fehler des zentrale-Differenzen-Schemas analytisch zu bestimmen, wird dieses wiederum auf die lineare Konvektionsgleichung Gl (7.37) angewendet. Die verwendete Ein-Schritt-Methode der Zeitintegration wird dabei durch Verwendung von Gl. (7.48) zunächst offen gelassen, so dass sich folgende voll diskretisierte Gleichung ergibt:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{CFL}{2} ((\Theta\phi_{i+1}^{n+1} + (1-\Theta)\phi_{i+1}^n) - (\Theta\phi_{i-1}^{n+1} + (1-\Theta)\phi_{i-1}^n)) \quad (7.49)$$

Wird das oben erläuterte Vorgehen angewendet, so ergeben sich die spektralen Fehler bei räumlicher Diskretisierung mit zentralen Differenzen und damit dem in dieser Arbeit verwendeten FV-Schema wie folgt:

$$\epsilon_{d,FV} = \left( \left( 1 - \frac{\Theta CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^2 + \left( \frac{CFL \sin(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.50)$$

$$\epsilon_{\phi,FV} = \tan^{-1} \left( \left( \frac{-CFL \sin(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right) \left( 1 - \frac{\Theta CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^{-1} \right) \cdot \frac{1}{CFL \varphi_{num}} \quad (7.51)$$

Eine Herleitung der Gleichungen (7.50-7.51) befindet sich in Anhang A.2.

## 7.5. Experimentelle Bestimmung spektraler Fehler

Die zuvor analytisch hergeleiteten spektralen Fehlerfunktionen  $\epsilon_d(CFL, \varphi_{num})$  bzw.  $\epsilon_{\phi}(CFL, \varphi_{num})$  für die in dieser Arbeit relevanten numerischen Schemata basieren auf der Annahme linearer Ausbreitung einer harmonischen Startlösung. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit Hilfe derer anhand numerischer Experimente die spektralen Fehler der Schemata angewendet auf die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen bestimmt werden können. Damit lässt sich untersuchen, inwieweit die Funktionale aus Abs. 7.4 auf nichtlineare Zusammenhänge übertragbar sind. Von besonderem Interesse sind dabei die Einflüsse von akustischer Machzahl  $Ma_{ak}$  sowie der Machzahl der Grundströmung  $\overline{Ma}$ . Des Weiteren lassen sich mit einer zuverlässigen experimentellen Methode zur Bestimmung spektraler Fehler beliebige numerische Schemata charakterisieren, inklusive derjenigen mit nichtlinearen Operatoren. Für die experimentelle Bestimmung numerischer Fehler wird stets eine reibungsfreie Strömung simuliert, da ansonsten numerische und physikalische Dämpfung nicht differenziert werden könnten. Der Einfluss physikalischer Dämpfung wird später in Abs. 7.8.1 untersucht.

### 7.5.1. Modell und Methodik

Für die experimentelle Bestimmung der spektralen Fehler wird das Anfangswertproblem zur analytischen Bestimmung der numerischen Fehler aus Abs. 7.4 in ein numerisches Experiment überführt.

Zur Untersuchung des CV-Schemas werden die eindimensionalen Erhaltungsgleichungen in differentieller Form Gl. (2.9-2.11) unter Vernachlässigung von Reibung ( $f_x = 0$ ) gelöst. Zur Untersuchung des FV-Schemas werden die integralen Erhaltungsgleichungen Gl. (2.1-2.3) in lediglich einer räumlichen Dimension unter Vernachlässigung von Reibung und Volumenkräften sowie ohne Wärmequellen gelöst.

Die Initialisierung erfolgt wie zuvor in Abs. 7.2.1 erläutert. Um eine Unstetigkeit der Strömungsgrößen an der Randbedingung am Austritt zu vermeiden, wird nicht die gesamte Länge der Domain, sondern lediglich stets 15,5 Wellenlängen mit einer harmonischen Schwingung initialisiert. Bei einer festen räumlichen Diskretisierung von  $\Delta x = 0,002 \text{ m}$  wird der numerische Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  anhand der Wellenlänge der Initiallösung  $\lambda_{init}$  variiert. Mithilfe der zeitlichen Schrittweite  $\Delta t$  kann die CFL-Zahl unabhängig variiert werden. Die Domainlänge  $l$  wird mit der Wellenlänge skaliert. Im Folgenden werden CFL-Zahlen von  $CFL = 0,17/0,43/0,86$  sowie numerische Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 1,2/6/12^\circ$  untersucht. Die zugehörigen Parameter sind in **Tab. 7.2** aufgeführt. Das modellierte Fluid ist Luft als ideales Gas bei Umgebungsbedingungen ( $\bar{p} = 10^5 \text{ Pa}$  und  $\bar{T} = 293,15 \text{ K}$ ) mit einer Schallgeschwindigkeit von  $a_{exakt} = 343,34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

$\varphi_{num} [^\circ]$	$\lambda_{init} [m]$	$l [m]$	$CFL [-]$	$\Delta t [s]$
1,2	0,6	10	0,17	$1 \cdot 10^{-6}$
6	0,12	2	0.43	$2,5 \cdot 10^{-6}$
12	0,06	1	0.86	$5 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 7.2.: Numerische Parameter zur experimentellen Bestimmung der spektralen Fehler bei einer konstanten räumlichen Schrittweite von  $\Delta x = 0,002 \text{ m}$

Die Domain wird für mehrere hundert Zeitschritte  $n_t$  berechnet, wobei die initialisierte Welle in positive Ausbreitungsrichtung fortschreitet. In **Abb. 7.4** ist die initialisierte Lösung sowie die Lösung nach verschiedenen Zeitschritten  $n_t = 2/20/200$  über der relativen Position der Domain in Form des Amplitudenverhältnisses der Schallschnelle  $\Lambda_c$  nach Gl. (7.31) abgebildet. Zur Bestimmung der spektralen Fehler werden die drei dargestellten Zeitpunkte ausgewertet. Das räumliche Auswertefenster ist in Abb. 7.4 durch die vertikalen, gestrichelten Linien markiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Domainlänge mindestens so groß gewählt werden muss, dass die Randbedingungen (bei  $\frac{x}{l} = 0$  sowie  $\frac{x}{l} = 1$ ) innerhalb der simulierten physikalischen Zeit die Lösung im Auswertebereich nicht beeinflussen. Dadurch wird sichergestellt, dass ausschließlich das numerische Schema (im Inneren der Domain) analysiert wird. Die Wahl der Randbedingungen sowie die Länge der Domain spielen dann keine Rolle. In den hier dargestellten Untersuchungen ist am Einlass eine konstante Geschwindigkeit von  $c_{Ein} = 0$  und am Auslass ein konstanter Druck von  $p_{Aus} = 10^5 \text{ Pa}$  vorgegeben.

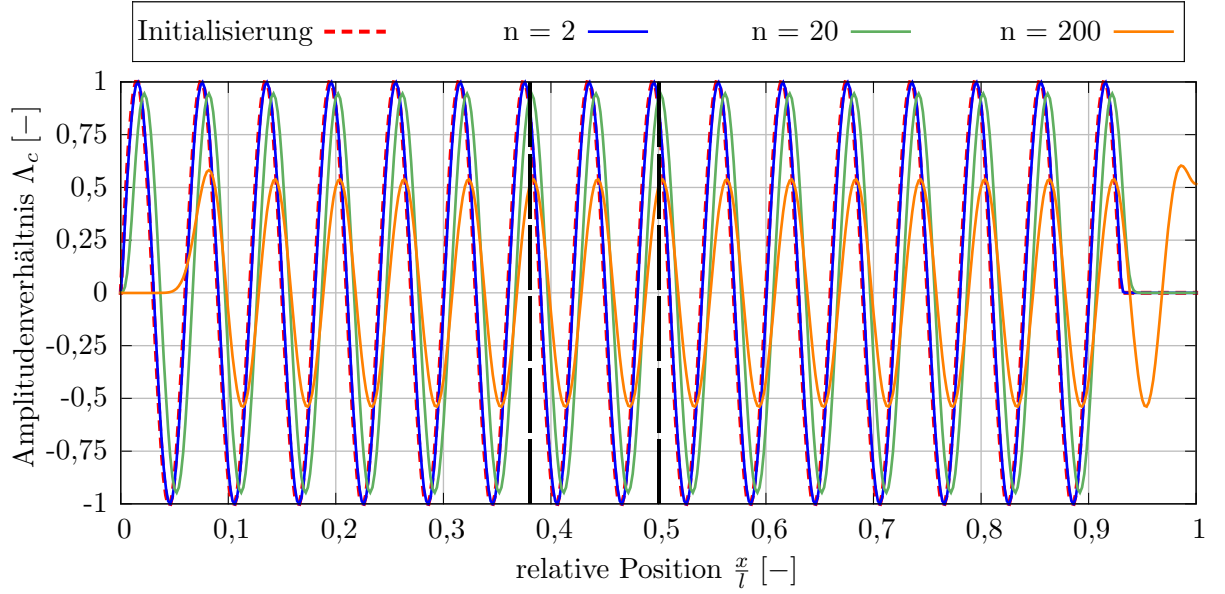


Abbildung 7.4.: Initialisierung und fortschreitende Welle nach unterschiedlichen Zeitschritten für die Bestimmung der spektralen Fehler mit  $\varphi_{num} = 12^\circ$ ,  $CFL = 0,17$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  sowie  $\overline{Ma} = 0$ .

Ausgehend von der Mitte der Domain ( $\frac{x}{l} = 0,5$ ) wird der gekennzeichnete Bereich von zwei Wellenlängen abzüglich eines Abtastwertes durch eine Nachabtastung auf eine Anzahl an Abtastwerten von  $2^n$  gebracht und anschließend in den Raumfrequenzbereich<sup>1</sup> überführt. Die experimentell bestimmte numerische Schallgeschwindigkeit  $a_{num,exp}$  ergibt sich durch Auswertung der Phase der Lösung bei der Raumfrequenz  $\frac{1}{\lambda_{init}}$ :

$$\Delta\varphi_{\hat{c}_{num}} = \varphi_{\hat{c}_{num},n_t} - \varphi_{\hat{c}_{num},0} = k_{init} \cdot \Delta x_{sim} = k_{init} \cdot \Delta t_{sim} \cdot a_{num,exp} \quad (7.52)$$

$$\Leftrightarrow a_{num,exp} = \frac{\Delta\varphi_{\hat{c}_{num}}}{k_{init} \cdot \Delta t_{sim}} = \frac{\Delta\varphi_{\hat{c}_{num}}}{k_{init} \cdot n_t \cdot \Delta t} \quad (7.53)$$

Dabei steht  $\varphi_{\hat{c}_{num}}$  für den Phasenwinkel der Schallschnelle der numerischen Lösung nach 0 bzw.  $n_t$  Zeitschritten und  $\Delta t_{sim}$  für die simulierte physikalische Zeit. Die Kreiswellenzahl  $k_{init}$  ergibt sich aus der initialisierten Wellenlänge:

$$k_{init} = \frac{2\pi}{\lambda_{init}} \quad (7.54)$$

Der experimentell bestimmte Dispersionsbeiwert  $\epsilon_{\phi,exp}$  ergibt sich analog zu Gl. (2.75) zu:

$$\epsilon_{\phi,exp} = \frac{a_{num,exp}}{a_{exakt}} = \frac{\Delta\varphi_{\hat{c}_{num}}}{k_{init} \cdot n_t \cdot \Delta t \cdot a_{exakt}} \quad (7.55)$$

Analog dazu kann auch die komplexe Amplitude des Schalldruckes  $\hat{p}_{num}$  und damit  $\Lambda_p$  ausgewertet werden.

<sup>1</sup>Der Raumfrequenzbereich ergibt sich bei Fouriertransformation eines räumlichen Verlaufes einer Strömungsgröße. Die Abszisse entspricht analog zur Zeitfrequenz mit  $\frac{1}{T}$  der Raumfrequenz und damit  $\frac{1}{\lambda}$ .

Der experimentell bestimmte Diffusionsbeiwert  $\epsilon_{d,exp}$  wird anhand der Amplitude der numerischen Lösung entsprechend Gl. (2.74) bestimmt:

$$\epsilon_{d,exp} = \left( \frac{|\hat{\epsilon}_{num,n_t}|}{|\hat{\epsilon}_{init}|} \right)^{\frac{1}{n_t}} \quad (7.56)$$

Der Exponent berücksichtigt die exponentielle Abnahme der Amplitude während der Ausbreitung. Auch hier kann analog zur Schallschnelle der Schalldruck für die Auswertung betrachtet werden. Die experimentell bestimmten Größen  $\epsilon_{\phi,exp}$  bzw.  $\epsilon_{d,exp}$  werden als Beiwerte bezeichnet, da neben den numerischen Diffusions- bzw. Dispersionsfehlern noch weitere potentielle Einflüsse enthalten sind, wie im Folgenden anhand der Ergebnisse diskutiert wird.

Am Beispiel einer Welle mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) wird zunächst ein Vergleich der experimentell bestimmten Diffusions- und Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  bzw.  $\epsilon_{\phi,exp}$  mit den analytischen Funktionalen der verwendeten numerischen Schemata aus Abs. 7.4 vorgenommen. In **Abb. 7.5** sind die analytischen Verläufe der Diffusionsfehler nach Gl. (7.42) sowie die Dispersionsfehler nach Gl. (7.43) des CV-Schemas für drei CFL-Zahlen abgebildet. Eine Betrachtung der Diffusionsfehler zeigt die für ein stabiles Schema erforderliche Eigenschaft  $\epsilon_d < 1$  für die untersuchten  $CFL < 1$  und  $\varphi_{num}$ . Des Weiteren wird deutlich, dass die numerische Diffusion mit zunehmendem numerischen Phasenwinkel ebenfalls zunimmt. Diese Beobachtung steht im Einklang mit der bekannten Tatsache, dass mit größerer räumlicher Diskretisierung im Allgemeinen ein größerer numerischer Fehler einhergeht.

Die numerische Dispersion nimmt ebenfalls mit zunehmendem numerischen Phasenwinkel zu. Es zeigt sich, dass der Dispersionsfehler bei kleinen CFL-Zahlen kleiner als eins und die numerische Schallgeschwindigkeit somit kleiner als die exakte ist, was als *trailing error* bezeichnet wird [Hir07]. Für große CFL-Zahlen ist die numerische Schallgeschwindigkeit größer als die exakte. Dies wird als *leading error* bezeichnet [Hir07].

Zur Evaluierung der oben beschriebenen Methode sind die experimentell bestimmten Diffusionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  und Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  für die in Tab. 7.2 aufgeführten Parameter zu unterschiedlichen Auswertezeitschritten  $n_t$  zu sehen. Bei der Auswertung wurde entsprechend Gl. (7.55-7.56) die Schallschnelle betrachtet. Die akustische Machzahl befindet sich noch im linearen Regime (für  $L_p < 140dB$  [MN79], vgl. Tab. 6.1), so dass in guter Näherung von linearer Wellenausbreitung ausgegangen werden kann. Es zeigt sich, dass der experimentell bestimmte Diffusionsbeiwert für die untersuchten CFL-Zahlen und numerischen Phasenwinkel praktisch gleich dem Diffusionsfehler aus der analytischen Beziehung unter der Annahme linearer Wellenausbreitung ist. Die Anzahl der Zeitschritte bis zur Auswertung zeigt ebenfalls keinen signifikanten Einfluss auf den Diffusionsfehler. Für die CFL-Zahl von  $CFL = 0,17$  ist exemplarisch der Diffusionsbeiwert bei Auswertung des Schalldruckes aufgeführt, was zu keiner Änderung des Ergebnisses führt.

Auch eine Betrachtung der Dispersion zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  mit den analytischen Funktionalen für alle untersuchten nume-

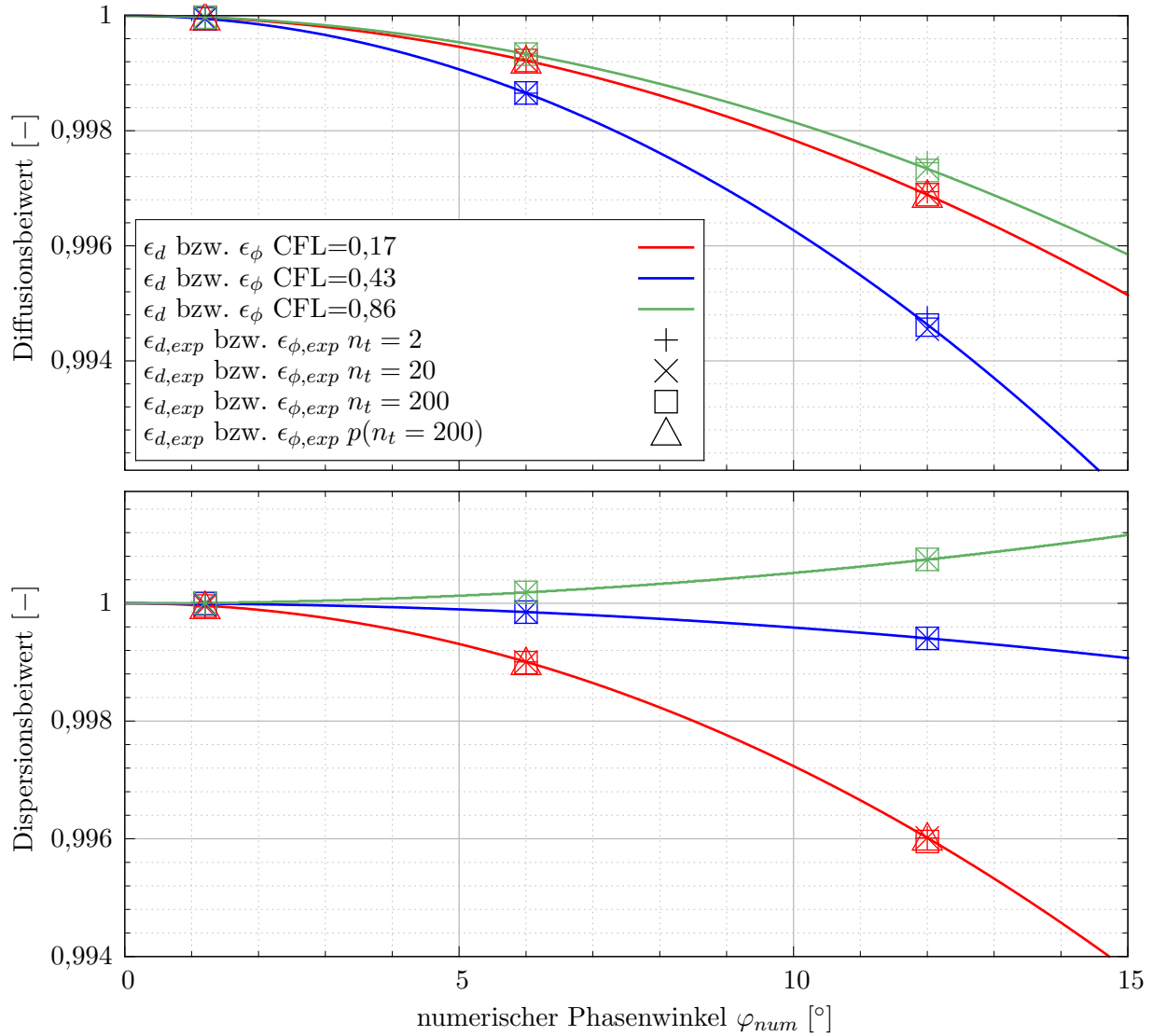


Abbildung 7.5.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmte Diffusions- bzw. Dispersionsbeiwerte des CV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene CFL-Zahlen bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  sowie  $\overline{Ma} = 0$ .

rischen Phasenwinkel und CFL-Zahlen. Der Auswertezwischen schritt sowie eine Betrachtung des Schalldruckes anstatt der Schallschnelle haben ebenfalls keinen Einfluss. Mit der entwickelten Methode lassen sich also für ein explizites Schema bei kleinen Amplituden (im linearen Regime) sowie unter Abwesenheit von Gleichströmung die spektralen Fehler zuverlässig bestimmen.

Die numerischen Fehler des verwendeten FV-Schemas nach Gl. (7.50-7.51) bei voll impliziter Zeitintegration ( $\Theta = 1$ ) sind in **Abb. 7.6** abgebildet. Ein auffälliger Unterschied zu dem CV-Schema ist, dass sowohl die numerische Diffusion als auch die numerische Dispersion mit zunehmender CFL-Zahl monoton zunehmen. Zudem wird anhand der Skalierung der Ordinate deutlich, dass das verwendete FV-Schema bei voll impliziter Zeitintegration und größeren CFL-Zahlen deutlich größere numerische Diffusion und Dispersion als das CV-Schema aufweist. Des Weiteren wird ersichtlich, dass das

FV-Schema stets einen trailing error und damit eine kleinere numerische Schallgeschwindigkeit bedingt.

Für einen Vergleich von experimentell und analytisch bestimmten Diffusions- und Dispersionsbeiwerten ist bei dem impliziten FV-Schema das Residuum als weiterer Parameter mit aufgeführt. Das Residuum bei impliziten Strömungslösern ist ein Maß für die verbleibende (residuale) Abweichung der iterativ bestimmten Lösung von den zu erfüllenden diskreten Erhaltungsgleichungen [Sch13]. Die in Abs. 7.4 angeführten Funktionale für die spektralen Fehler des FV-Schemas beschreiben die exakte Lösung des diskreten Gleichungssystems und damit für ein Residuum von null, was praktisch nicht erreichbar ist. Üblicherweise wird für eine ausreichende Genauigkeit ingenieurtechnischer Anwendungen ein Residuum in der Größenordnung von  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  empfohlen [LO13].

Um ein numerisches Schema jedoch anhand seiner spektralen Fehler zu beschreiben, gilt es, das maximal zulässige Residuum zu bestimmen, bei dem sich die numerische Lösung in guter Näherung entsprechend dieser spektralen Fehler verhält. Dazu sind in Abb. 7.6 die experimentell bestimmten spektralen Fehler für die in Tab. 7.2 aufgeführten Parameter bei Residuen von  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$  sowie  $10^{-7}$  aufgeführt. Das Residuum bezieht sich in diesem Fall auf die Druckgleichung und die Geschwindigkeitsgleichung in dem verwendeten Druckkorrekturverfahren (vgl. dazu bspw. [Sch13,MDM16,Ope11]). Für die Druck- und Geschwindigkeitsgleichung werden bei den nachfolgenden Untersuchungen stets gleiche Residuen gefordert.

Bei Betrachtung der Diffusion wird deutlich, dass auch bei dem FV-Schema die experimentell bestimmten Diffusionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytisch bestimmten Diffusionsfehlern  $\epsilon_d$  aufweisen. Unabhängig von der CFL-Zahl sowie von dem numerischen Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  ist der experimentell bestimmte Diffusionsbeiwert bei den Residuen von  $10^{-5}$  und  $10^{-7}$  praktisch gleich den numerischen Diffusionsfehlern. Lediglich für ein Residuum von  $10^{-3}$  zeigen sich leichte Abweichungen im Diffusionsbeiwert bei großen CFL-Zahlen und großen numerischen Phasenwinkeln. Die gleichen Diffusionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  ergeben sich bei einer Auswertung nach  $n_t = 200$  Zeitschritten, diese sind jedoch der Übersicht halber nicht dargestellt.

Die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  zeigen eine deutlich stärkere Abhängigkeit von dem geforderten Residuum sowie größere Abweichungen von der analytischen Lösung. Bei einer Auswertung nach  $n_t = 2$  Zeitschritten zeigen die Ergebnisse bei einem Residuum von  $10^{-3}$  für sämtliche untersuchten Parameter signifikante Abweichungen, insbesondere bei kleinen numerischen Phasenwinkeln. Dabei lässt sich keine Systematik im Dispersionsfehler erkennen. Die Lösung ist offenbar bei einem Residuum von  $10^{-3}$  nicht ausreichend konvergiert. Bei den beiden strengeren Konvergenzkriterien von  $10^{-5}$  bzw.  $10^{-7}$  zeigen sich praktisch gleiche Ergebnisse nach  $n_t = 2$  Zeitschritten, die ebenfalls mit der analytischen Lösung übereinstimmen, was auf eine ausreichende Konvergenz bereits bei einem Residuum von  $10^{-5}$  schließen lässt.

Allerdings werden bei einer Betrachtung der Auswertung nach  $n_t = 200$  Zeitschritten deutliche Abweichungen des experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerts  $\epsilon_{\phi,exp}$  von dem Dispersionsfehler  $\epsilon_{\phi}$

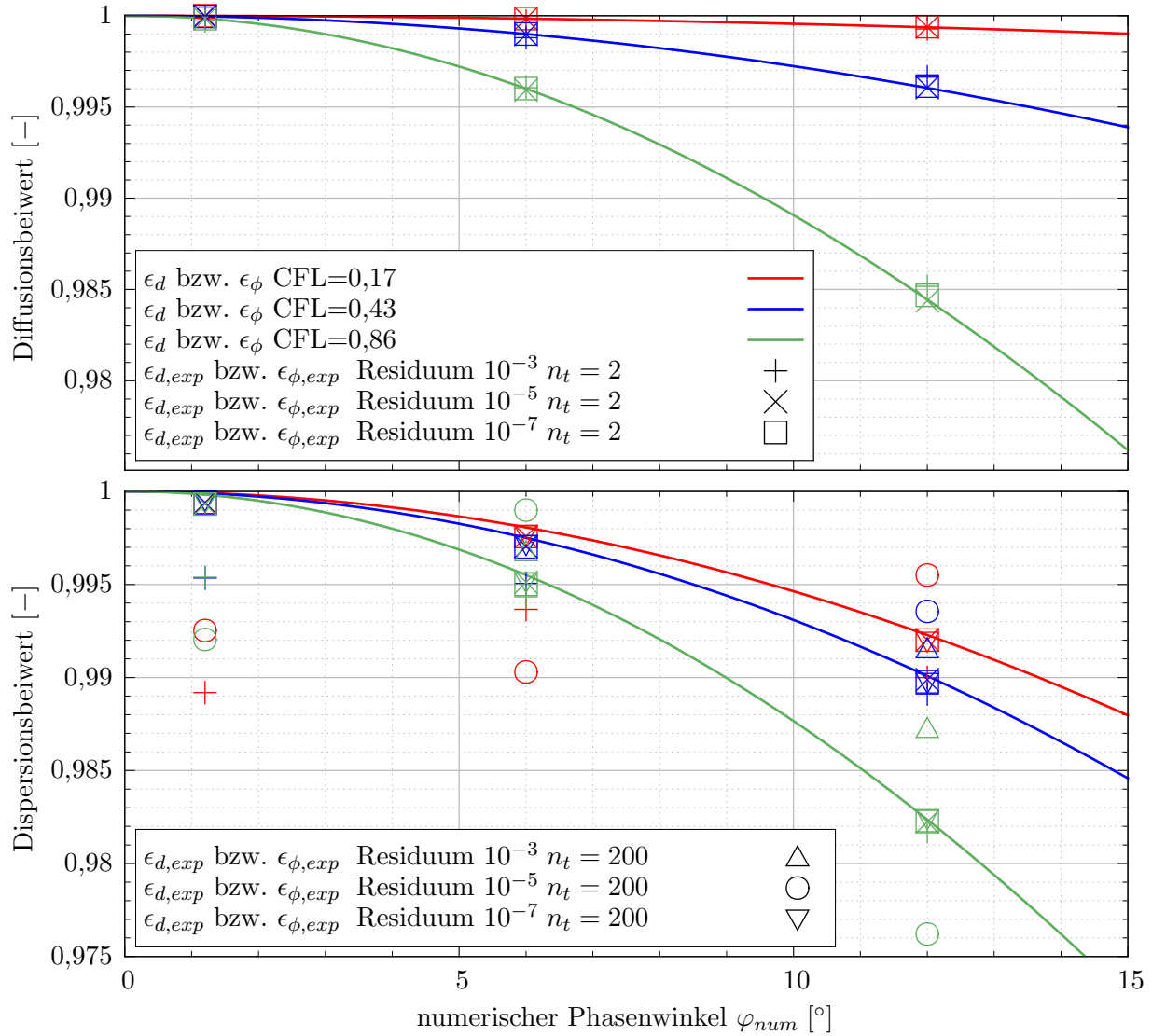


Abbildung 7.6.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmte Diffusions- bzw. Dispersionsbeiwerte des FV-Schemas mit voll impliziter Zeitintegration ( $\Theta = 1$ ) als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene CFL-Zahlen und Residuen bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  sowie  $\overline{Ma} = 0$  und Auswertung nach  $n_t = 2$  sowie (nur Dispersionsfehler)  $n_t = 200$  Zeitschritten.

auch bei einem Residuum von  $10^{-5}$  ersichtlich, während sich der Dispersionsfehler bei einem Residuum von  $10^{-7}$  auch mit fortschreitender Zeit (bis  $n_t = 200$ ) nicht ändert. Mit einem geforderten Residuum von  $10^{-7}$  wird daher die FV-Domain im Folgenden gelöst, wenn nicht anders angegeben.

Es sei darauf hingewiesen, dass aufgrund von Fehlerfortpflanzung auch bei strengen Konvergenzkriterien - wie beispielsweise einem Residuum von  $10^{-7}$  - davon auszugehen ist, dass nach einer Vielzahl von Zeitschritten ( $n_t \gg 200$ ) die Abweichungen der Dispersion der iterativ bestimmten Lösung  $\epsilon_{\phi,exp}$  von der Dispersion der exakten Lösung des diskretisierten Systems  $\epsilon_{\phi}$  zunehmen. Gleichzeitig ist je-



doch ein Konvergenzkriterium vorzugeben, welches von dem Lösungsalgorithmus (in dieser Arbeit PISO) erreichbar ist. Dies ist wiederum von der spezifischen Problemstellung abhängig. Es kann anhand der oben angeführten Ergebnisse jedoch festgehalten werden, dass ein kleineres Residuum als die üblicherweise angeführten Größenordnungen von  $10^{-3} \dots 10^{-4}$  zu wählen ist, um eine iterativ bestimmte Lösung zu erhalten, die sich in guter Näherung mit den analytischen Beziehungen für die spektralen Fehler aus Abs. 7.4 beschreiben lässt.

### 7.5.2. Einfluss der akustischen Machzahl

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass die Diffusion sowie die Dispersion der beiden in dieser Arbeit verwendeten numerischen Schemata auch bei Anwendung auf die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen den unter der Annahme linearer Wellenausbreitung analytisch hergeleiteten Funktionalen entsprechen, vorausgesetzt die Amplituden der sich ausbreitenden Wellen sind klein. Im Folgenden wird der Einfluss der akustischen Machzahl und damit die Auswirkungen zunehmender Amplituden auf die experimentell bestimmten Diffusions- und Dispersionsbeiwerte untersucht.

Dazu sind in **Abb. 7.7** die experimentell bestimmten Diffusionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  der drei untersuchten CFL-Zahlen und numerischen Phasenwinkel (vgl. Tab. 7.2) für unterschiedliche akustische Machzahlen zu verschiedenen Auswertzeitpunkten für das CV-Schema abgebildet. Die analytischen Verläufe der Diffusionsfehler nach Gl. (7.42) sind zum Vergleich ebenfalls dargestellt. Die Machzahl der Gleichströmung beträgt stets  $\overline{Ma} = 0$ .

Bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-2}$  zeigt sich wie zuvor bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  eine gute Übereinstimmung der experimentell ermittelten Diffusionsbeiwerte mit den analytischen Funktionalen für die untersuchten CFL-Zahlen und numerischen Phasenwinkel. Bei der nächstgrößeren akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 5 \cdot 10^{-2}$  werden jedoch Einflüsse der CFL-Zahl, des numerischen Phasenwinkels  $\varphi_{num}$  sowie der Anzahl an Zeitschritten  $n_t$  auf die numerischen Ergebnisse deutlich. Bei der kleinsten CFL-Zahl von  $CFL = 0,17$  entsprechen weiterhin alle experimentellen Ergebnisse in guter Näherung den analytischen Funktionalen. Bei den größeren CFL-Zahlen gilt dies ausschließlich für die Auswertung bei  $n_t = 2$ , bei größeren Simulationszeiten zeigen sich jedoch ebenfalls zunehmende Abweichungen. Bei einem numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 6^\circ$  werden bei  $CFL = 0,43$  leichte Abweichungen erst bei  $n_t = 200$  deutlich, während der experimentell bestimmte Diffusionsbeiwert  $\epsilon_{d,exp}$  bei  $CFL = 0,86$  bereits ab  $n_t = 20$  sichtbar unterhalb des theoretischen Verlaufs liegt. Bei einem numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 12^\circ$  zeigen sich entsprechende Tendenzen, jedoch stärker ausgeprägt. Für  $CFL = 0,43$  sind in diesem Fall bereits Abweichungen ab  $n_t = 20$  zu erkennen, bei  $CFL = 0,86$  bereits bei  $n_t = 2$ .

Die Tatsache, dass die experimentell ermittelten Amplitudenabnahmen mit den theoretischen Diffusionsfehlern bei kleinen und moderaten akustischen Machzahlen von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  bzw.  $Ma_{ak} = 10^{-2}$

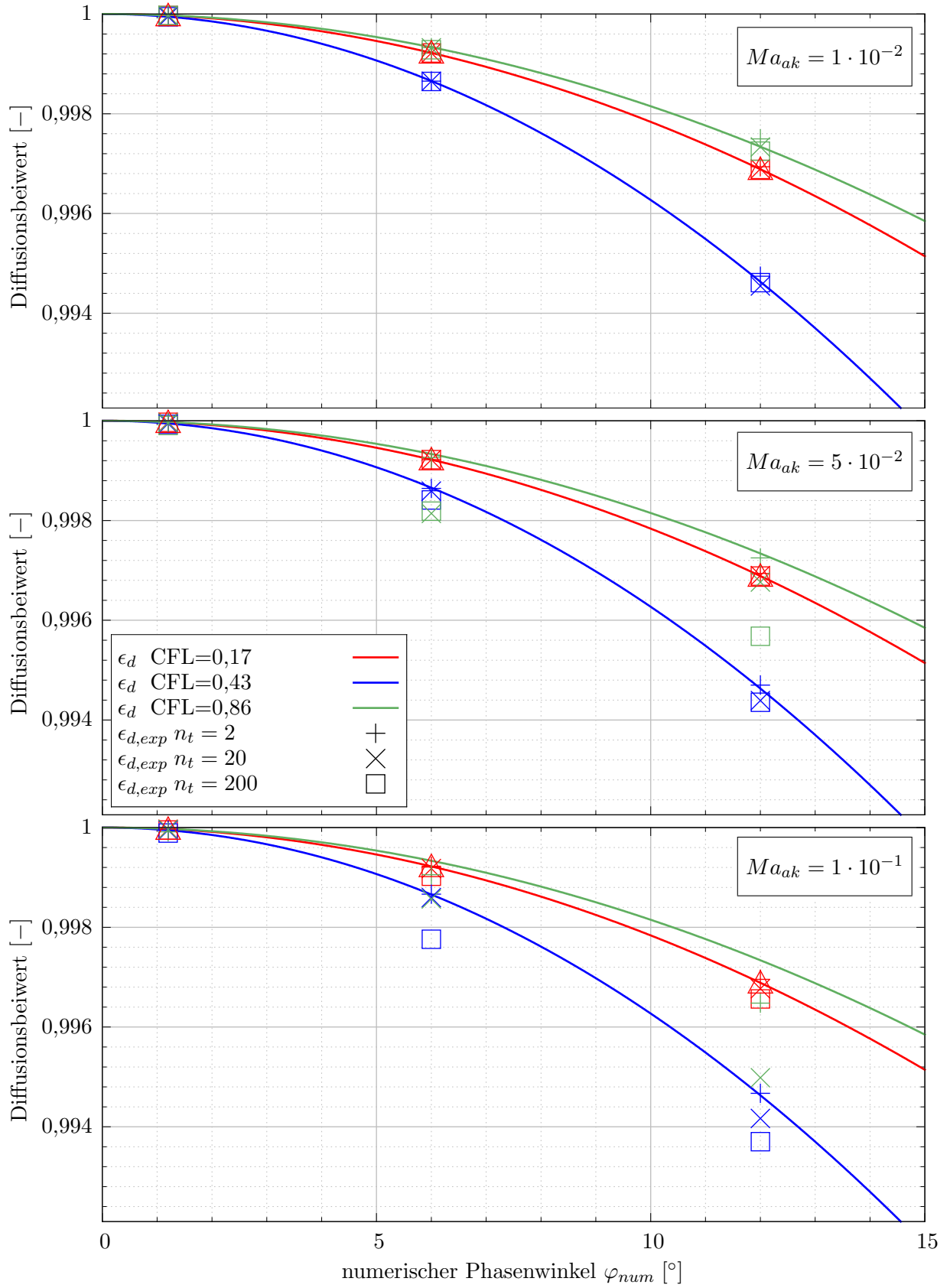


Abbildung 7.7.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Diffusionsbeiwert des CV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene akustischen Machzahlen, CFL-Zahlen und Auswertzeitpunkte  $n_t$  sowie  $\overline{Ma} = 0$ .

sehr gut übereinstimmen und erst bei einer größeren akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 5 \cdot 10^{-2}$  Abweichungen auftreten, verleitet zu der Annahme, dass diese Abweichungen aus der zunehmenden Nichtlinearität der initialisierten Welle resultieren. Mit zunehmender Nichtlinearität gehen zwei wesentliche Effekte einher: zum Einen erfolgt bei großen akustischen Machzahlen eine Abnahme der Amplitude der Grundharmonischen durch Wellenaufsteilung (vgl. Abs. 2.2.2). Zum Anderen nimmt der Fehler in der Initialisierung durch die Näherung bei der Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit  $c_{init}$  mit zunehmender akustischer Machzahl zu, vgl. Abs. 7.2.1 Gl. (7.30). Die Abweichung der Initiallösung von einer Lösung, die die Bestimmungsgleichungen Gl. (5.21-5.23) erfüllt, nimmt somit ebenfalls zu. Dies führt dazu, dass die Lösung während der Ausbreitung der Welle gegen eine exakte Lösung des diskreten Gleichungssystems strebt. Aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems können diese beiden Effekte nicht differenziert voneinander betrachtet werden.

Einige Beobachtungen deuten jedoch darauf hin, dass die Wellenaufsteilung der dominante Effekt ist. Während die Abweichungen zwischen der Initiallösung und einer exakten Lösung des diskreten Gleichungssystems ausschließlich von der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$  abhängig sind, existieren für das Ausmaß der Wellenaufsteilung einige weitere Einflussparameter. Die Zunahme der Abweichungen bei größeren CFL-Zahlen ist ein Indiz für den dominanten Einfluss der Wellenaufsteilung: nach einer gleichen Anzahl an Zeitschritten hat eine fortschreitende Welle bei zunehmender CFL-Zahl eine ebenfalls zunehmende Strecke zurückgelegt, so dass die Welle bereits weiter aufgesteilt ist und die Amplitude der Grundharmonischen umso mehr abgenommen hat, vgl. Abb. 2.2. Ein weiterer Parameter für den dimensionslosen Abstand  $\sigma$ , der die spektrale Zusammensetzung bedingt durch Wellenaufsteilung bestimmt, ist die Wellenlänge  $\lambda$  bzw. die Wellenzahl  $k (= \frac{2\pi}{\lambda})$ , vgl. Gl. (2.67). Ein zunehmender numerischer Phasenwinkel ist (bei konstanter räumlicher Diskretisierung) gleichbedeutend mit einer zunehmenden Wellenzahl. Bei dem kleinsten untersuchten numerischen Phasenwinkel sind keine Abweichungen zwischen Theorie und numerischen Ergebnissen erkennbar. Mit zunehmendem  $\varphi_{num}$  nehmen die Abweichungen sowohl bei  $CFL = 0,43$  als auch bei  $CFL = 0,86$  ebenfalls zu.

Bei einer Betrachtung der Ergebnisse bei der größten akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-1}$  zeigen sich ebenfalls die zuvor beobachteten Tendenzen, wobei diese noch einmal deutlich stärker ausgeprägt sind. Die akustische Machzahl geht ebenfalls linear in den dimensionslosen Abstand  $\sigma$  ein, so dass dieser doppelt so groß ist im Vergleich zu  $Ma_{ak} = 5 \cdot 10^{-2}$ . Die Abweichungen zwischen der Startlösung und einer exakten Lösung des diskreten Gleichungssystems nehmen ebenfalls - jedoch in unbekanntem Maße - zu. In diesem Fall zeigen sich auch Abweichungen im Amplitudenfehler bei der kleinsten CFL-Zahl von  $CFL = 0,17$  und  $n_t = 200$ . Gleichzeitig konnten die Simulationen bei  $CFL = 0,86$  und  $n_t = 200$  für die größeren numerischen Phasenwinkel nicht ausgewertet werden, da lokal und temporär effektive CFL-Zahlen von  $CFL > 1$  auftreten, was zu Instabilitäten bei dem expliziten Schema führt.

Bei der numerisch-experimentellen Auswertung des Diffusionsbeiwertes kann aufgrund der nichtlinearen gegenseitigen Wechselwirkungen nicht zwischen dem Einfluss von numerischer Diffusion, von

Wellenaufteilung sowie dem Einfluss der Abweichung zwischen Startlösung und exakter Lösung des diskreten Gleichungssystems differenziert werden, so dass die gesamte Amplitudenabnahme fälschlicherweise als numerische Diffusion interpretiert wird. Eine genaue experimentelle Bestimmung des Diffusionsfehlers  $\epsilon_\phi$ , der ausschließlich abhängig von  $CFL$ ,  $\varphi_{num}$  und Schema-Parametern abhängt [Hir07], ist daher bei großen akustischen Machzahlen mit der entwickelten Methode nicht möglich.

Die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte bei Variation der akustischen Machzahl sind in **Abb. 7.8** den analytischen Verläufen gegenübergestellt. Wie zuvor in Abb. 7.5 bei der kleinen akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  zeigt sich auch bei einer moderaten akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-2}$  eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und numerischen Ergebnissen. Lediglich bei der größten CFL-Zahl von  $CFL = 0,86$  sind für  $n_t = 200$  leicht größere Dispersionsbeiwerte resultierend aus den numerischen Experimenten zu erkennen. Diese Abweichungen liegen jedoch in der Größenordnung von  $10^{-4}$  und sind daher als klein zu bewerten. Allerdings zeigt sich eine leichte Abhängigkeit vom Auswertzeitpunkt. Die Tatsache, dass diese ausschließlich bei der größten CFL-Zahl auftritt, deutet wiederum darauf hin, dass die Abweichung von der Lauflänge abhängt und damit physikalisch bedingt ist.

Aufgrund der dominanten Abhängigkeit von der akustischen Machzahl ist davon auszugehen, dass die starken Abweichungen zwischen den experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerten und den analytischen Funktionalen für die Dispersionsfehler wie zuvor - im Kontext des Diffusionsfehlers - im Wesentlichen aus zwei Effekten resultieren: die Abweichungen zwischen Initiaillösung und exakter Lösung des diskreten Gleichungssystems nehmen - wie bereits erläutert - mit zunehmender akustischer Machzahl zu. Der Einfluss auf die Phasengeschwindigkeit der Grundharmonischen, der sich wiederum auf die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte auswirkt, kann jedoch nicht quantifiziert werden. Zudem bestehen mit zunehmender akustischer Machzahl ebenfalls zunehmende nichtlineare Wechselwirkung zwischen der betrachteten Welle der Wellenlänge  $\lambda_{init}$  sowie den auftretenden Höherharmonischen mit geringerer Wellenlänge, die eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit aufweisen. Dieser Effekt kann ebenfalls nicht quantitativ beurteilt werden, die zunehmenden Abweichungen mit zunehmender akustischer Machzahl und zunehmender CFL-Zahl sprechen jedoch für einen Einfluss von Oberschwingungen.

Die beiden genannten Effekte können aufgrund der nichtlinearen Wechselwirkungen wiederum nicht differenziert voneinander betrachtet werden. Es lässt sich jedoch feststellen, dass auch eine experimentelle Bestimmung des numerischen Dispersionsfehlers bei größeren akustischen Machzahlen mit der entwickelten Methode nicht möglich ist. Die Untersuchungen des Einflusses der akustischen Machzahl auf die spektralen Fehler des FV-Schemas weisen die gleichen Tendenzen und Abhängigkeiten auf. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Anhang A.3 dargestellt. Daraus lässt sich schließen, dass für das FV-Schema die gleichen Zusammenhänge gelten wie zuvor für das CV-Schema erläutert.

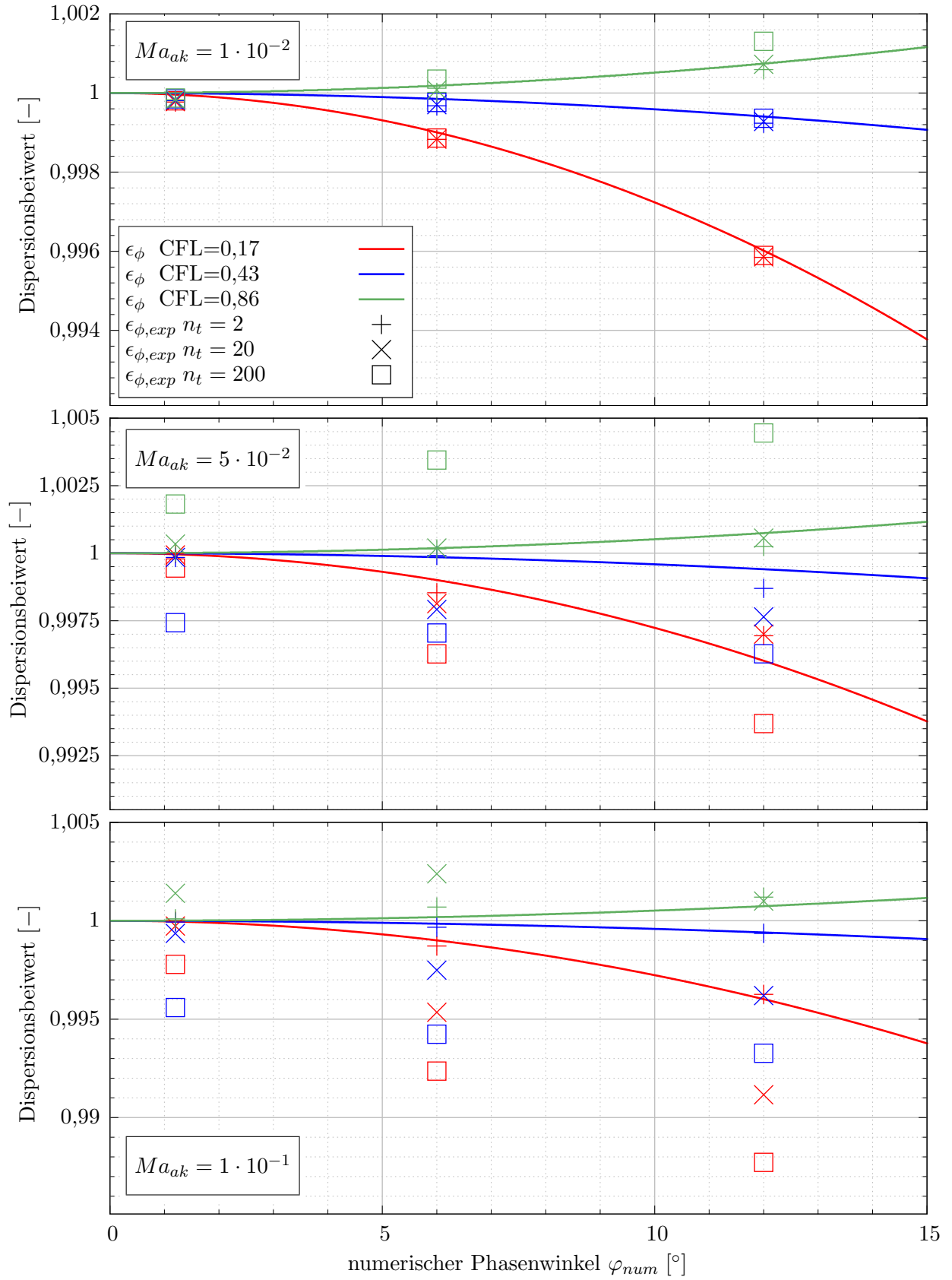


Abbildung 7.8.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Dispersionsbeiwert des CV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene akustischen Machzahlen, CFL-Zahlen und Auswertzeitpunkte  $n_t$  sowie  $\overline{Ma} = 0$ .

### 7.5.3. Einfluss der Machzahl der Gleichströmung

In diesem Abschnitt wird der Einfluss von Gleichströmung auf die numerische Diffusion und Dispersion durch gezielte Variation der Machzahl  $\overline{Ma}$  untersucht. Dazu wird die zu untersuchende Domain wie zuvor beschrieben initialisiert, bei der Initialisierungsgeschwindigkeit wird jedoch ein konstanter Wert überlagert, so dass Gl. (7.30) wie folgt erweitert wird:

$$c_{init}(x) = \frac{p_{init}(x) - \bar{p}}{\rho_{init}(x)a_{init}(x)} + \bar{c} = \frac{p_{init}(x) - \bar{p}}{\rho_{init}(x)a_{init}(x)} + \overline{Ma} \cdot a_{0,init} \quad (7.57)$$

Dabei wird eine Entkopplung der Strömung und der akustischen Welle vorausgesetzt, wie in der linearen Akustik üblich (vgl. Abs. 2.2.1). Erneut werden die Parameter aus Tab. 7.2 untersucht. Die Machzahl wird im Bereich von  $-10^{-1} \leq \overline{Ma} \leq 10^{-1}$  variiert. Die Gleichströmung ist in der Auswertung der numerischen Ergebnisse stets enthalten, daher wird Gl. (7.55) zur experimentellen Bestimmung des Dispersionsbeiwertes mit der Machzahl kompensiert:

$$\epsilon_{\phi,exp} = \frac{\Delta\varphi_{\hat{c}_{num}}}{k_{init} \cdot n_t \cdot \Delta t \cdot a_{exakt} \cdot (1 + \overline{Ma})} \quad (7.58)$$

Die Untersuchungen des FV-Schemas ergeben weder einen Einfluss der Machzahl der Gleichströmung auf den Diffusionsfehler noch auf den Dispersionsfehler. Die initialisierten Wellen breiten sich wie erwartet relativ zu der überlagerten Gleichströmung mit den gleichen numerischen Fehlern wie zuvor im ruhenden Bezugssystem aus. Gleiches gilt bei den Untersuchungen des CV-Schemas für den Diffusionsfehler.

Die Dispersion und damit die numerische Schallgeschwindigkeit zeigen bei dem CV-Schema jedoch eine signifikante Abhängigkeit von der Machzahl der Gleichströmung. In **Abb. 7.9** sind die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  des CV-Schemas bei Variation von  $\overline{Ma}$  zu verschiedenen Auswertzeitpunkten abgebildet. Zudem ist die analytische Lösung des Dispersionsfehlers  $\epsilon_{\phi}$  nach Gl. (7.43) und eine empirische Näherung für den Machzahl-abhängigen Dispersionsfehler  $\epsilon_{\phi,\overline{Ma}}$  dargestellt.

Zunächst wird ein deutlicher Einfluss des Auswertzeitpunkts auf das Ergebnis des Dispersionsfehlers bei sämtlichen untersuchten Machzahlen deutlich. Zu Beginn der Simulation (bei  $n_t = 2$  bzw.  $n_t = 20$ ) liegen die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  im Bereich der analytischen Lösung des Dispersionsfehlers  $\epsilon_{\phi}$ , divergieren mit zunehmender Simulationszeit jedoch sichtlich von dieser. Die vorgegebene Startlösung ist offenbar keine Lösung des nach dem CV-Schema diskretisierten Gleichungssystems (5.18-5.20). Im weiteren Verlauf der Simulationen (bei  $n_t = 400$  bzw.  $n_t = 800$ ) konvergieren die Lösungen gegen konstante Werte, welche offenbar von der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  abhängig sind.

Die numerische Dispersion bei vorhandener Gleichströmung scheint gegenüber derjenigen ohne Gleichströmung mit einer Machzahl-abhängigen Konstante skaliert zu werden. In **Abb. 7.9** ist daher eine Approximation der experimentellen Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  abgebildet, die ausschließlich von dem

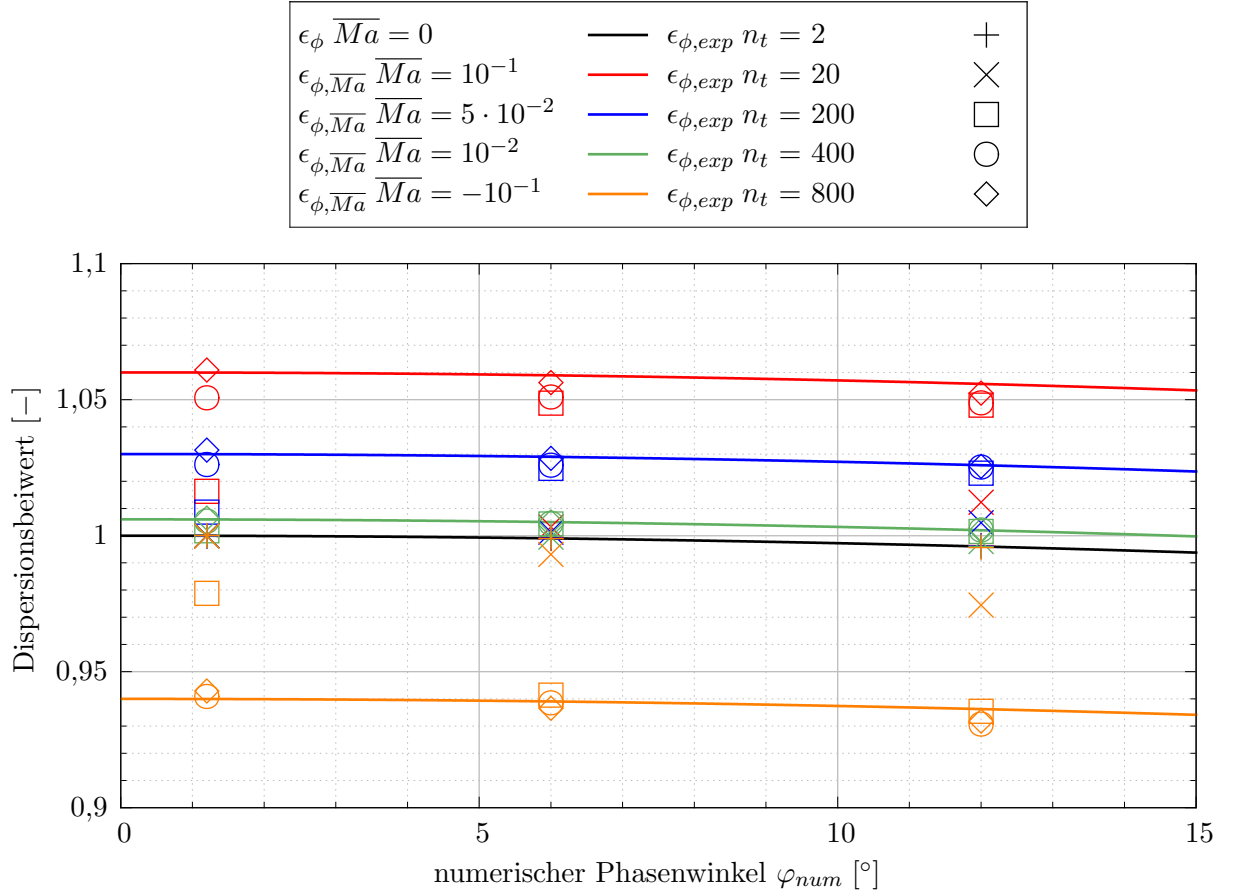


Abbildung 7.9.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Dispersionsbeiwert des CV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels bei  $CFL = 0,17$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  und variabler Machzahl  $\overline{Ma}$ .

numerischen Dispersionsfehler  $\epsilon_{\phi}$  sowie der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  abhängig ist. Das Funktional für die dargestellten empirischen Approximationen lautet:

$$\epsilon_{\phi, \overline{Ma}} = \epsilon_{\phi} \cdot (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) \quad (7.59)$$

Dabei ist  $\zeta_{\overline{Ma}} = 0,6$  gewählt. Es zeigt sich, dass die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi, exp}$  ab etwa  $n_t \geq 200$  gut mit  $\epsilon_{\phi, \overline{Ma}}$  übereinstimmen und Gl. (7.59) zur Beschreibung der Dispersion des CV-Schemas bei vorhandener Gleichströmung geeignet ist.

Die Tatsache, dass die Abhängigkeit der Dispersion von der Machzahl der Gleichströmung bei dem CV-Schema auftritt, jedoch nicht bei dem FV-Schema, deutet daraufhin, dass dieser Effekt nicht methodisch bedingt ist und damit ebenfalls nicht aus der mit Gl. (7.57) einhergehenden vereinfachenden Annahme der Entkopplung von Strömung und akustischer Welle resultiert. Vielmehr scheint die Machzahl-Skalierung der Dispersion somit ein Charakteristikum des CV-Schemas und damit dem numerischen Dispersionsfehler zuzuordnen zu sein.

Die Bestimmung des als konstant angenommenen Machzahl-Skalierungsfaktors  $\zeta_{\overline{Ma}}$  kann durch umstellen von Gl. (7.59) und Einsetzen der experimentell ermittelten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi, exp}$  aus

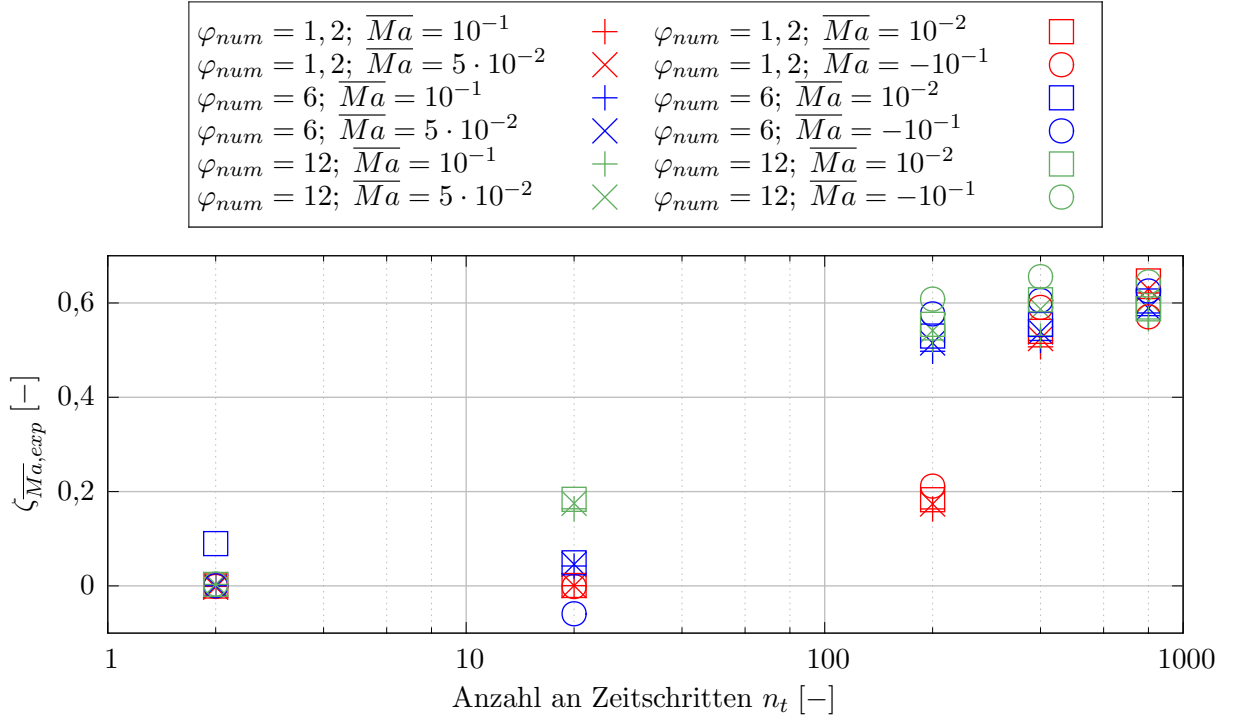


Abbildung 7.10.: Experimentell bestimmter Machzahl-Skalierungsfaktor des Dispersionsbeiwertes des CV-Schemas als Funktion der Anzahl der Zeitschritte  $n_t$  bei  $CFL = 0,17$  sowie  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ .

Abb. 7.9 erfolgen. Der experimentell bestimmte Machzahl-Skalierungsfaktors  $\zeta_{\overline{Ma},exp}$  ergibt sich dann zu

$$\zeta_{\overline{Ma},exp} = \left( \frac{\epsilon_{\phi,exp}}{\epsilon_{\phi}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\overline{Ma}} \quad (7.60)$$

und ist in **Abb. 7.10** als Funktion der Zeitschritte  $n_t$  dargestellt. Es wird deutlich, dass der experimentell ermittelte Machzahl-Skalierungsfaktor nach  $n_t = 400$  Zeitschritten für alle untersuchten numerischen Phasenwinkel und Machzahlen  $\zeta_{\overline{Ma},exp} \approx 0,6$  beträgt. Im weiteren Verlauf der Simulationen konzentrieren sich die Machzahl-Skalierungsfaktoren zunehmend um diesen Wert und liegen nach  $n_t = 800$  Zeitschritten für alle untersuchten  $\varphi_{num}$  und  $\overline{Ma}$  bei  $\zeta_{\overline{Ma},exp} = 0,6 \pm 0,045$ . Unabhängig von dem numerischen Phasenwinkel und der Machzahl lässt sich für  $CFL = 0,17$  der numerische Dispersionsfehler des CV-Schemas also in guter Näherung mit Gl. (7.59) approximieren.

Abschließend wird eine potentielle Abhängigkeit des Machzahl-Skalierungsfaktors von der CFL-Zahl untersucht. Die experimentell bestimmten Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{\phi,exp}$  des CV-Schemas bei  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  und Variation der CFL-Zahl sind in **Abb. 7.11** dargestellt. Zugunsten der Übersicht sind lediglich die Ergebnisse für  $n_t \geq 200$  enthalten. Weiterhin sind die skalierten Funktionale des numerischen Dispersionsfehlers  $\epsilon_{\phi,\overline{Ma}}$  nach Gl. (7.59) abgebildet. Auch hier zeigt sich die Konvergenz gegen den skalierten Dispersionsfehler im Verlauf der Simulation. Bei allen untersuchten CFL-Zahlen zeigt sich eine gute



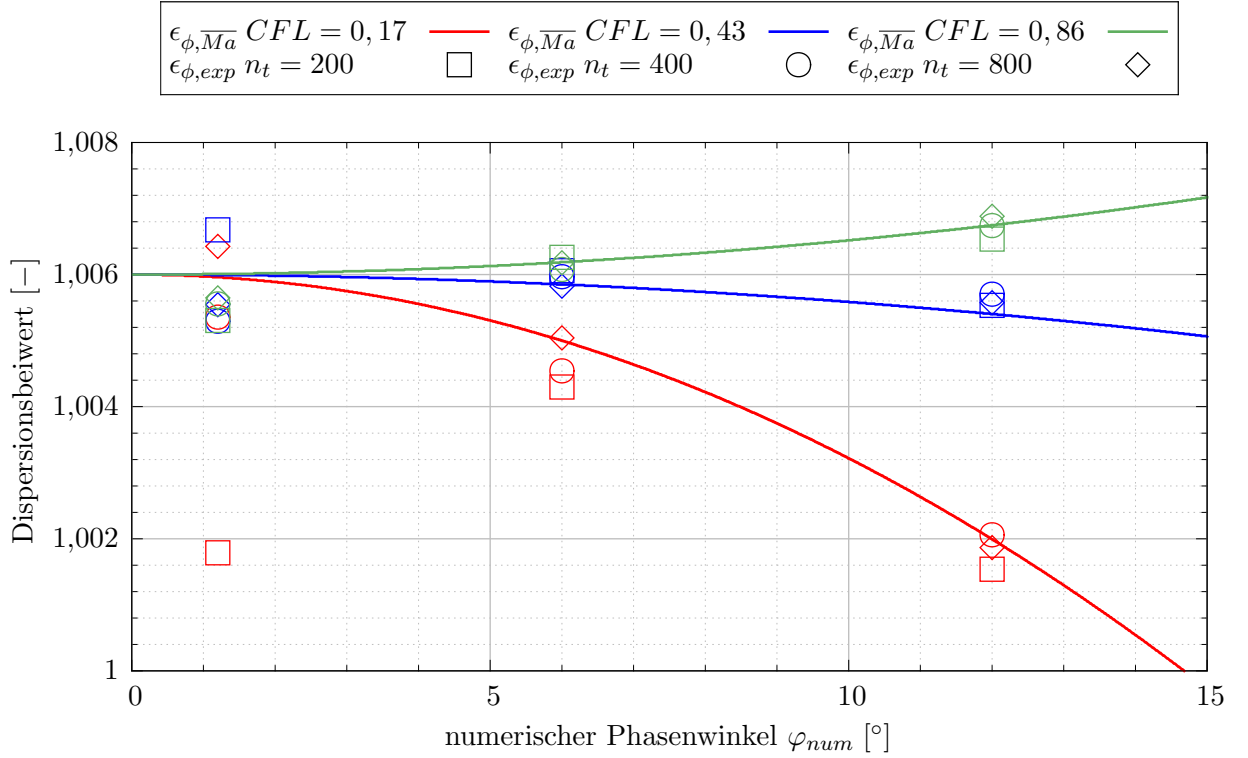


Abbildung 7.11.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Dispersionsbeiwert des CV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  sowie  $\overline{Ma} = 10^{-2}$ .

Übereinstimmung von  $\epsilon_{\phi, \overline{Ma}}$  mit den numerischen Ergebnissen für  $n_t \geq 400$ . Lediglich bei dem kleinen numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 1, 2^\circ$  werden Abweichungen auch bei fortgeschrittener Simulationszeit deutlich, diese liegen jedoch in der Größenordnung von weniger als einem Promill und sind daher als klein anzusehen.

Die Skalierungskonstante  $\zeta_{\overline{Ma}}$  ist also unabhängig von den untersuchten numerischen Parametern  $\varphi_{num}$  und  $CFL$  sowie von der Machzahl  $\overline{Ma}$  selbst. Die numerische Schallgeschwindigkeit in dem verwendeten CV-Schema lässt sich bei vorhandener Gleichströmung somit durch die Machzahl und eine verfahrensinhärente Konstante mit Hilfe von Gl. (7.59) ausdrücken. Die Ursache für diese Veränderung der numerischen Schallgeschwindigkeit durch eine Grundströmung (und die Tatsache, dass dieser Effekt bei dem verwendeten FV-Schema nicht auftritt) lässt sich nur vermuten. Möglicherweise ist die Gegebenheit, dass es sich um ein einseitiges Schema (Upwind) handelt, dafür verantwortlich.

#### 7.5.4. Zwischenergebnis

Abschließend werden die Erkenntnisse zur experimentellen Bestimmung spektraler Fehler zusammengefasst und einige Richtlinien daraus abgeleitet. Für den Fall, dass ein zu untersuchendes numerisches Schema sich auf die skalare Konvektionsgleichung anwenden und explizit nach den numerischen Fehlern

umformen lässt, wie zuvor in Abs. 7.4 beschrieben, können die numerische Diffusion und Dispersion analytisch bestimmt werden. Die so bestimmten Zusammenhänge sind ausschließlich abhängig von den numerischen Parametern  $CFL$  und  $\varphi_{num}$  sowie dem untersuchten Schema selbst und daher auch bei Anwendung auf die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen gültig [Hir07,VB82].

Ist eine analytische Herleitung der Fehler nicht möglich, so kann die in Abs. 7.5 vorgestellte Methode zur experimentellen Bestimmung der spektralen Fehler angewendet werden. Die numerisch-experimentellen Untersuchungen des CV-Schemas zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der experimentell bestimmten Diffusions- und Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  bzw.  $\epsilon_{\phi,exp}$  mit den analytischen spektralen Fehlern  $\epsilon_d$  bzw.  $\epsilon_{\phi}$  für kleine akustische Machzahlen und in Abwesenheit von Gleichströmung. Mit zunehmender akustischer Machzahl weichen die experimentell bestimmten Diffusions- und Dispersionsbeiwerte zunehmend von den Diffusions- bzw. Dispersionsfehlern ab. Die Ursache dafür sind nichtlineare Effekte sowie ein zunehmender Fehler in der Initialisierung der numerischen Domain. Für eine belastbare numerisch-experimentelle Bestimmung spektraler numerischer Fehler sind daher kleine Amplituden vorzugeben.

Es konnte kein Einfluss einer vorhandenen Gleichströmung ( $\overline{Ma} > 0$ ) auf die experimentell bestimmten Diffusionsbeiwerte des CV-Schemas festgestellt werden. Die Dispersion wird hingegen signifikant von der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  beeinflusst. Es konnte für das CV-Schema ein empirisches Funktional entwickelt werden, welches unter Verwendung eines (für das untersuchte Schema) allgemeingültigen Machzahl-Skalierungsfaktors von  $\zeta_{\overline{Ma}} = 0,6$  eine gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Dispersionsbeiwerten aufweist. Dieser Machzahl-Skalierungsfaktor kann nicht aus der analytischen Herleitung des Dispersionsfehlers anhand der linearen Konvektionsgleichung abgeleitet werden und muss daher numerisch-experimentell bestimmt werden.

Bei dem untersuchten FV-Schema - wie bei jedem beliebigen impliziten Schema - ist grundsätzlich ein ausreichend kleines Konvergenzkriterium zu wählen. Für große Residuen sind die Iterationsfehler so groß, dass sich die Lösung nicht entsprechend der spektralen Fehler (der exakten Lösung der diskretisierten linearen Konvektionsgleichung) verhält. Bei ausreichend kleinen Residuen konnte ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung der experimentell ermittelten Diffusions- und Dispersionsbeiwerte mit den spektralen Fehlern des untersuchten FV-Schemas festgestellt werden. Die Abweichungen nehmen auch bei dem FV-Schema mit zunehmender akustischer Machzahl zu, so dass für eine numerisch-experimentelle Bestimmung der spektralen Fehler kleine Amplituden zu wählen sind.

Ein Einfluss von Gleichströmung auf die Diffusion oder Dispersion des FV-Schemas konnte im Rahmen der durchgeführten Parametervariationen nicht festgestellt werden. Die spektralen Fehler des untersuchten FV-Schemas können somit als unabhängig von der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  angesehen werden.

## 7.6. Implementierung der Kopplung

Das generelle Ziel einer Kopplungsmethode zwischen einer dreidimensionalen und einer eindimensionalen numerischen Domain ist die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie bei gleichzeitiger Minimierung der numerisch induzierten Reflexionen an der Kopplungsstelle. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode zur Kopplung numerischer Domains basiert - wie zuvor beschrieben - auf der Angleichung der numerischen Wellenausbreitungseigenschaften. Sich ausbreitende Wellen verhalten sich bei angepassten Impedanzen in der ersten Domain (vor der Kopplungsstelle) genauso wie in der zweiten Domain (hinter der Kopplungsstelle). Durch eine geeignete Übergabe von physikalischen Größen zwischen den Domains kann somit erreicht werden, dass akustische Wellen die Kopplungsstelle ungestört passieren. Wie jedoch zuvor in Abs. 7.1 gezeigt, ist für beliebige Strömungsprofile in der 3D-Domain eine konstante Impedanz bei der Transformation zwischen 3D und 1D nicht mit Konservativität in allen Erhaltungsgrößen vereinbar.

In diesem Abschnitt wird anhand des vereinfachten Falls einer 1DFV/1DCV-Kopplung erläutert, welche Strömungsgrößen auf welche Art und Weise zwischen den Domains übergeben werden und wie diese in den beiden gekoppelten Lösern *FLOAT* und *rhoPimpleFOAM* verarbeitet werden. Für diesen Sonderfall sind sowohl die Konstanz der Impedanz als auch die Konservativität in allen Erhaltungsgrößen erfüllt, vgl. Abs. 7.1. Der einzige Unterschied bei einer 3DFV/1DCV-Kopplung ist die Transformation zwischen den Strömungsgeschwindigkeiten  $c_{3DFV}(r)$  und  $c_{1DCV}$ , die später in Abs. 7.8 detailliert behandelt wird.

Um die Konstanz der Impedanz zwischen den gekoppelten Domains sicherzustellen, werden im Rahmen der Kopplung die primitiven Variablen zwischen den Domains übergeben. Für die Übergabe der Strömungsgrößen werden Geisterzellen bzw. Überlappzellen verwendet (vgl. dazu bspw. [Dei15]). Dabei werden im Bereich der Kopplungsstelle die beiden Domains um  $m$  Zellen (für  $m \in \mathbb{N}^+$ ) überlappt. Die Zuordnung der überlappenden Zellen bei der in dieser Arbeit entwickelten Methode ist in **Abb. 7.12** exemplarisch am Beispiel zweier eindimensionaler Domains skizziert. Die ausgetauschten Variablen beziehen sich - wenn nicht explizit anders erwähnt - stets auf die gleiche Zeitebene in beiden Domains.

Bei dem CV-Verfahren - wie auch bei jedem anderen expliziten FD-Verfahren - sind lediglich die Strömungsgrößen des mit dem Randpunkt der CV-Domain ( $i_{CV,1}$ ) räumlich korrespondierenden Zellzentrums der FV-Domain erforderlich. Die Strömungsgrößen an diesem Punkt werden durch die Lösung der FV-Domain am Punkt  $i_{FV,k-m}$  ersetzt und fungieren an dieser Stelle als Randbedingung der CV-Domain. Das Innere der CV-Domain (ohne den Randpunkt  $i_{CV,1}$ ) kann somit unmittelbar gelöst werden.

Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Domains im Bereich der Kopplungsstelle in Wellenausbreitungsrichtung eine äquidistante Diskretisierung aufweisen, die räumlichen Schrittweiten der gekoppelten Domains müssen jedoch nicht zwangsläufig gleich sein. Wie später in Abs. 7.7 gezeigt wird, ist die räumliche Auflösung in Wellenausbreitungsrichtung bei angepassten numerischen Impedanzen in der

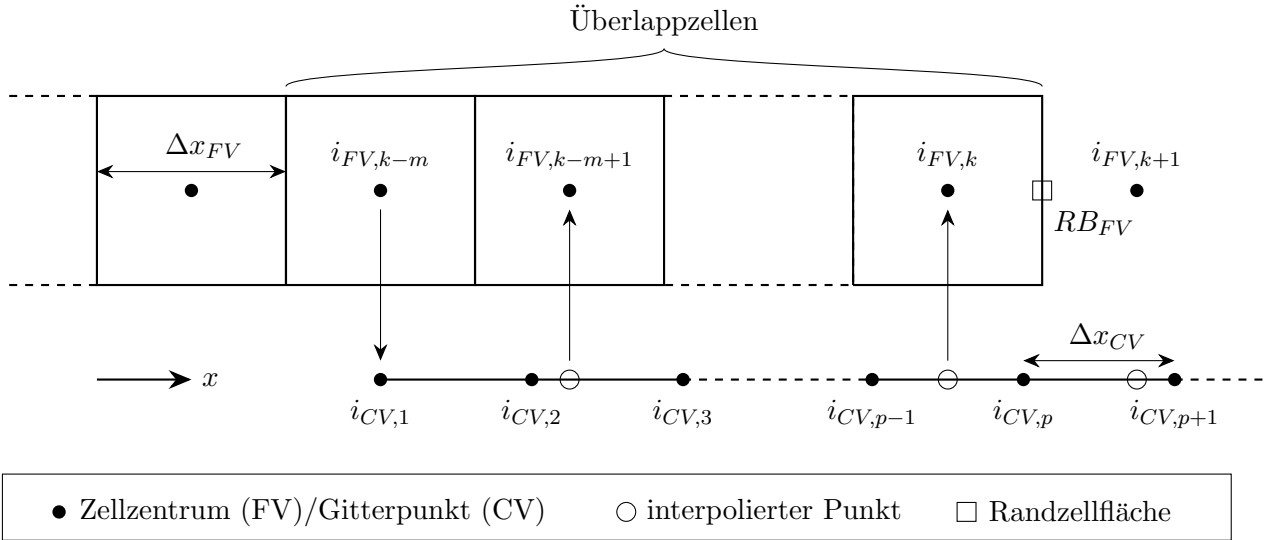


Abbildung 7.12.: Austausch der Strömungsgrößen bei der Kopplung einer FV-Domain (oben) und einer CV-Domain (unten).

Regel in beiden Domains unterschiedlich. Aus diesem Grund liegen die Gitterpunkte der CV-Domain und die Zellzentren der FV-Domain (außer  $i_{CV,1}$  und  $i_{FV,k-m}$ ) nicht auf derselben x-Koordinate. Die Variablen, die an die FV-Domain übergeben werden, werden daher zuvor innerhalb der CV-Domain linear zwischen den entsprechenden Gitterpunkten interpoliert. Daraus ergibt sich als weitere Voraussetzung, dass die räumliche Auflösung des CV-Schemas nicht größer als diejenige des FV-Schemas ist ( $\Delta x_{CV} \leq \Delta x_{FV}$ ). Diese Voraussetzung ist jedoch für die hier untersuchten Schemata aufgrund der starken numerischen Diffusion des CV-Schemas (mit erster Ordnung in Raum und Zeit) immer erfüllt, vgl. Anhang A.4.

Die Randbedingung einer FV-Domain wird in der Regel auf einer Zellfläche definiert. Die Übernahme der Strömungsgrößen aus der CV-Domain in die Zellzentren der FV-Domain ersetzt daher nicht (wie in der CV-Domain) die Vorgabe einer Randbedingung, welche für sämtliche Variablen -  $p$ ,  $c$  und  $T$  - an der Randzellfläche  $RB_{FV}$  definiert werden muss. Zwei unterschiedliche Ansätze für den Umgang mit der Randbedingung der FV-Domain an der Kopplungsstelle ( $RB_{FV}$  in Abb. 7.12) werden im Rahmen dieser Arbeit untersucht und im Folgenden erläutert:

- Rückkopplung der Strömungsgrößen aus der CV-Domain durch Vorgabe der primitiven Variablen und des Massenstroms  $\dot{m}$  an der Randbedingung  $RB_{FV}$  (Flussvorgabe, kurz:  $RdF$ )
- Rückkopplung der Strömungsgrößen aus der CV-Domain durch Übergabe der primitiven Variablen in die Zellzentren der FV-Domain und Vorgabe der Größen an der Randbedingung  $RB_{FV}$  durch Extrapolation aus der inneren FV-Domain (kurz:  $RdE$ )

### 7.6.1. Rückkopplung durch Flussvorgabe

Bei der Rückkopplung durch Flussvorgabe besteht der grundlegende Ansatz darin, den Informationsfluss von der CV- in die FV-Domain über die Randbedingung  $RB_{FV}$  zu realisieren. Dazu werden die primitiven Größen  $(p, c, T)_{RB_{FV}}$  sowie der Massenstrom  $\dot{m}_{RB_{FV}}$  an die Randbedingung übergeben. Aufgrund der impliziten Formulierung des FV-Schemas muss die CV-Domain basierend auf den Größen einer bekannten Zeitebene  $n$  zuerst für die unbekannte Zeitebene  $n + 1$  gelöst werden. Anschließend werden aus den Strömungsgrößen innerhalb der CV-Domain entsprechend der räumlichen Diskretisierungsvorschrift der FV-Domain (lineare Interpolation) die Strömungsgrößen am Ort von  $RB_{FV}$  in den Zeitschritten  $n$  sowie  $n + 1$  bestimmt. Durch die geforderte äquidistante Diskretisierung ergibt sich für eine Strömungsgröße  $\phi$ :

$$\phi_{RB_{FV}}^n = \frac{\phi_{CV}^n(i_{FV,k}) + \phi_{CV}^n(i_{FV,k+1})}{2} \quad \text{sowie} \quad (7.61)$$

$$\phi_{RB_{FV}}^{n+1} = \frac{\phi_{CV}^{n+1}(i_{FV,k}) + \phi_{CV}^{n+1}(i_{FV,k+1})}{2} \quad (7.62)$$

Die mit den Zellzentren der FV-Domain räumlich korrespondierenden Größen in der CV-Domain  $\phi_{CV}(i_{FV,k})$  sowie  $\phi_{CV}(i_{FV,k+1})$  werden bei unterschiedlichen räumlichen Schrittweiten der gekoppelten Domains wiederum im Voraus linear interpoliert. Es sei anzumerken, dass der Punkt  $i_{FV,k+1}$  in der FV-Domain nicht existiert, sondern lediglich als geometrische Position zur Bestimmung der an  $RB_{FV}$  zu übergebenden Zellflächengrößen angenommen wird. Entsprechend des Gewichtungsfaktors der Zeitintegration  $\Theta_{FV}$  wird die zeitliche Gewichtung der Strömungsgrößen vorgenommen:

$$\phi_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1} = \Theta_{FV} \phi_{RB_{FV}}^{n+1} + (1 - \Theta_{FV}) \phi_{RB_{FV}}^n \quad (7.63)$$

Die so berechneten primitiven Variablen  $p_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1}$ ,  $c_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1}$ ,  $T_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1}$  sowie der Massenstrom  $\dot{m}_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1}$  werden schließlich an der Randbedingung  $RB_{FV}$  zur Berechnung der unbekanntenen Zeitebene  $n + 1$  der FV-Domain vorgegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass der Massenstrom in OpenFOAM stets Teil der Lösung ist. Während die primitiven Größen an der Randbedingung während der Lösung des Zeitschritts  $n + 1$  konstant bleiben, weicht der Massenstrom nach dem Lösen leicht von dem vorgegebenen Wert ab.

Aufgrund der Tatsache, dass zur Bestimmung der Größen an der Randbedingung  $\phi_{RB_{FV}}^{n \rightarrow n+1}$  die Lösung in der CV-Domain zum Zeitschritt  $n + 1$  bereits bekannt sein muss, ist eine zusätzliche Überlappzelle für die FV-Domain erforderlich und damit  $m = 1$  in Abb. 7.12. Die Strömungsgrößen im Punkt  $i_{CV,1}$  werden durch die Größen im Punkt  $i_{FV,k-m}$  vorgegeben und sind daher nicht vor dem Lösen der Zeitebene  $n + 1$  in der FV-Domain bekannt. Durch die Verwendung einer Überlappzelle kann der Zustand an der FV-Randbedingung  $RB_{FV}$  anhand der Strömungsgrößen der inneren CV-Domain, die bereits zum Zeitpunkt  $n + 1$  bekannt sind, berechnet werden. Die Strömungsgrößen in der Zelle  $i_{FV,k}$  zum Zeitpunkt  $n$  werden mit den räumlich korrespondierenden Größen der CV-Domain bzw. interpolierten Größen zum Zeitpunkt  $n$  ersetzt.

Wie bereits erläutert, müssen die gekoppelten Domains bei RdF zeitlich versetzt gelöst werden. Ein Flusschema der Datenübergabe und Synchronisation der beiden Löser ist in **Abb. 7.13** dargestellt. Der Datenaustausch erfolgt über die Textdateien *dataFV* und *dataCV*, mithilfe derer die zu übergebenden Strömungsgrößen exportiert bzw. importiert werden. Die Synchronisation der Löser erfolgt über die Dateien *lockFV* und *lockCV*, die gewährleisten, dass die Löser erst nach erfolgreichem Export des jeweils anderen Lösers die Daten importieren.

Die Berechnung eines neuen Zeitschritts  $n + 1$  erfolgt stets zunächst innerhalb der CV-Domain. Anschließend werden die räumlich interpolierten Größen zur Übergabe an das Zellzentrum  $i_{FV,k}$  zum Zeitpunkt  $n$  sowie die räumlich und zeitlich interpolierten Größen nach Gl. (7.63) zur Übergabe an die Randzellfläche  $RB_{FV}$  exportiert (*dataCV*). Durch das Löschen der (im vorherigen Zeitschritt erstellten) Datei *lockFV* wird dem sich in der Warteschleife befindlichen FV-Löser signalisiert, dass der Wartezustand beendet ist. Durch das Erstellen der Datei *lockCV* versetzt sich nun der CV-Löser in den Wartezustand.

Der FV-Löser importiert die Daten aus *dataCV* und setzt diese an das Zellzentrum  $i_{FV,k}$  und die Randzellfläche  $RB_{FV}$ . Somit kann der Zeitschritt  $n + 1$  in der FV-Domain berechnet und die Strömungsgrößen aus der Zelle  $i_{FV,k-1}$  (da  $m = 1$ ) zum Zeitpunkt  $n + 1$  exportiert werden (*dataFV*). Durch das Löschen der Datei *lockCV* wird nun die Warteschleife des CV-Lösers beendet und der FV-Löser versetzt sich mit dem Erstellen von *lockFV* wiederum selbst in den Wartezustand. Der CV-Löser berechnet dann den nächsten Zeitschritt und der Ablauf wiederholt sich.

### 7.6.2. Rückkopplung durch Zellzentren und Extrapolation

Bei dem zweiten untersuchten Ansatz werden die primitiven Größen der CV-Domain nach dem Lösen der inneren CV-Domain in der Zeitebene  $n + 1$  in  $m \in \mathbb{N}^+$  überlappende Zellzentren der FV-Domain in der Zeitebene  $n + 1$  übergeben, vgl. Abb. 7.12. Die Übergabe von der CV- an die FV-Domain erfolgt somit analog zu der Übergabe von der FV- an die CV-Domain am Randpunkt  $i_{CV,1}$  der CV-Domain. Die Größen an der Randbedingung  $RB_{FV}$  werden durch Extrapolation aus der inneren FV-Domain bestimmt. Im Gegensatz zu der *RdF* können die gekoppelten Domains in diesem Fall gleichzeitig gelöst werden.

Ein detailliertes Flusschema der *RdE* ist in **Abb. 7.14** dargestellt. Der Datenaustausch sowie die Synchronisation der Löser erfolgt - wie zuvor - über Textdateien. Zunächst werden beide Domains für den gleichen Zeitschritt ( $n + 1$ ) gelöst und exportieren die relevanten Größen aus diesem Zeitschritt in die Dateien *dataFV* bzw. *dataCV*. Der FV-Löser wird nun in den Wartezustand versetzt bis der CV-Löser die Datei *lockCV* erstellt. Dadurch wird sichergestellt, dass beide Löser zunächst die Daten exportieren. Während sich der CV-Löser nun im Wartezustand befindet, importiert der FV-Löser die Daten aus *dataCV*. Durch das Erstellen der Datei *lockFV* wird der Wartezustand des CV-Lösers beendet, welcher nun die Daten aus *dataFV* importiert. Anschließend wird durch Löschen der Datei *lockFV* der neuerliche Wartezustand des FV-Lösers beendet und der nächste Zeitschritt

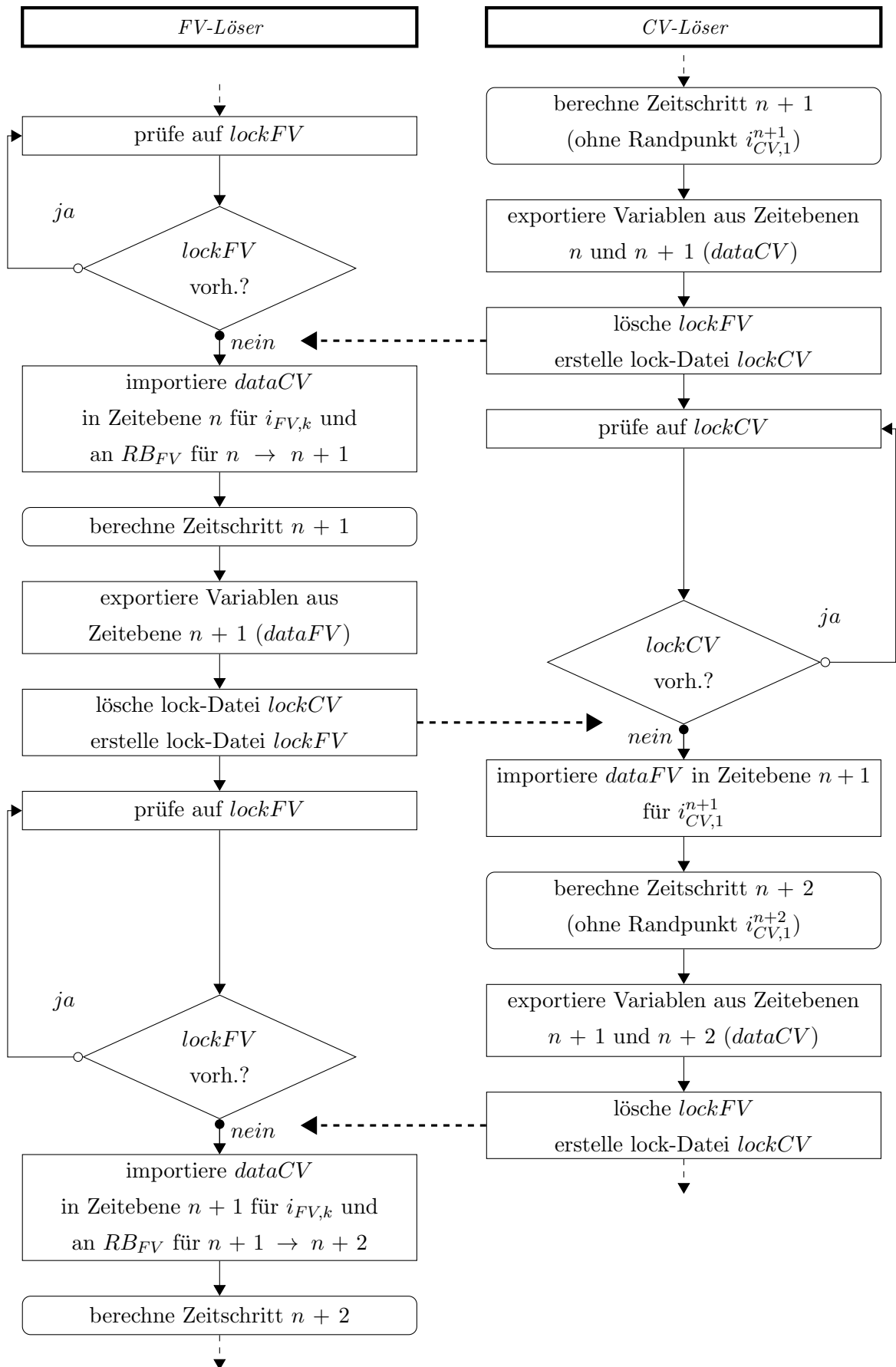


Abbildung 7.13.: Flussdiagramm für die Rückkopplung durch Flussvorgabe.

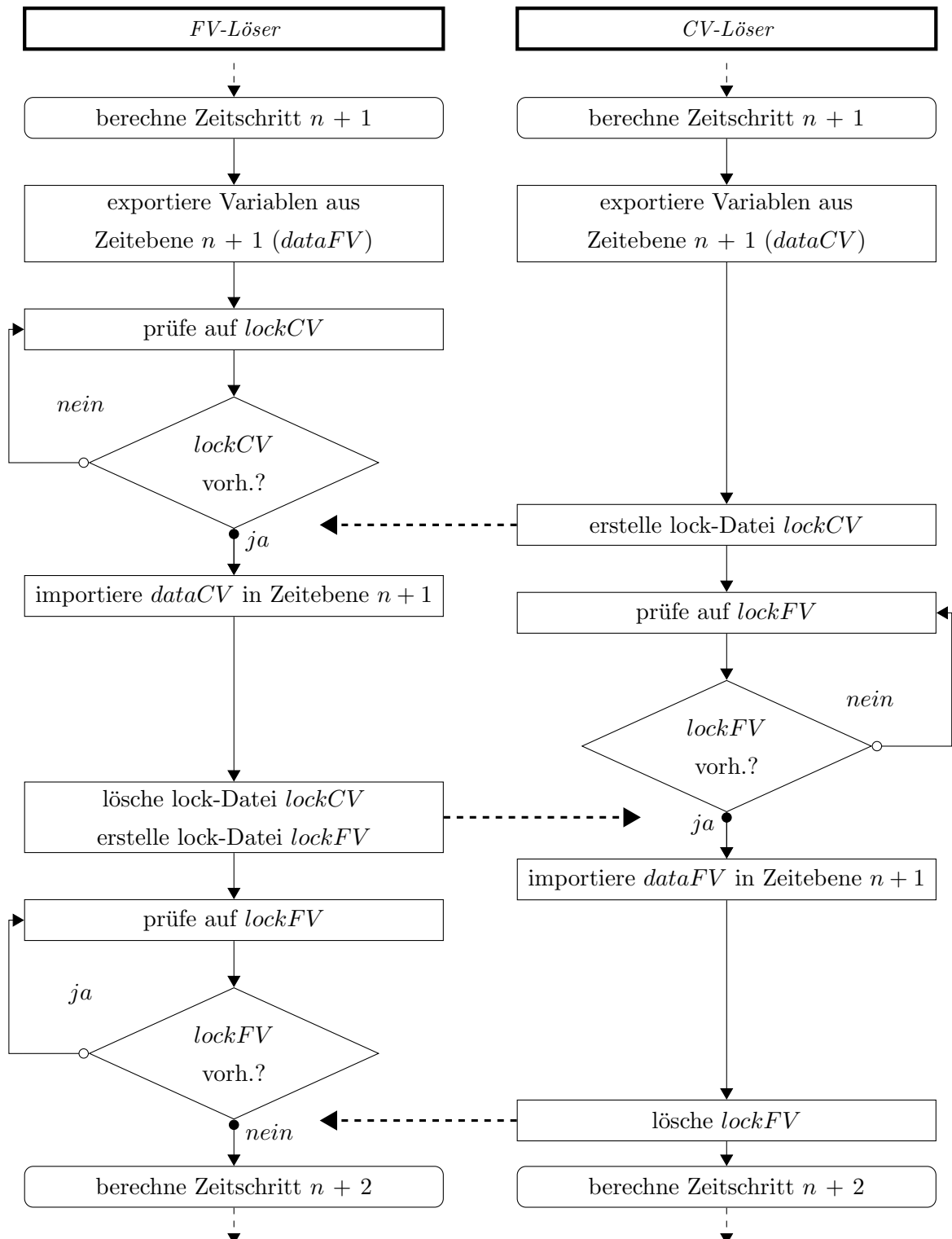


Abbildung 7.14.: Flussdiagramm für die Rückkopplung durch Zellzentren und Extrapolation.



wird wiederum in beiden Lösern parallel berechnet. Der letzte Synchronisationsvorgang dient dazu, sicherzustellen, dass beide Löser die Daten des aktuellen Zeitschritts importiert haben, bevor der nächste Zeitschritt berechnet und exportiert wird.

Bei der impliziten Formulierung und der daraus resultierenden iterativen Lösung mit der Druckkorrekturmethode der FV-Domain wird nicht nur das randnächste Zellzentrum  $i_{FV,k}$  von der Randbedingung beeinflusst. Durch die Lösung in mehreren Iterationsschritten wirkt sich diese auch auf die angrenzenden Zellen im Inneren der Domain aus. Bei einer angenäherten Randbedingung - wie der Extrapolation aus dem Inneren der Domain - können daher Störungen durch diese Randbedingung induziert werden. Um diesen Einfluss der Randbedingung weitestmöglich auszuschließen, werden daher zwei Parameter für die  $RdE$  untersucht:

- Grad der Extrapolation für die Bestimmung der Randwerte bei  $RB_{FV}$
- Anzahl der Überlappzellen  $m$  zur Variation des Abstandes der Randbedingung  $RB_{FV}$  von der inneren, nicht überlappenden FV-Domain

Dazu werden zwei FV-Domains gekoppelt, mit identischen Parametern diskretisiert und gelöst. Die Lösung an der Kopplungsstelle wird mit einer Referenzlösung, der Simulation einer durchlaufenden Welle durch eine FV-Domain mit ebenfalls identischen Parametern verglichen. Jegliche Abweichungen in den Lösungen sind somit auf die angenäherte Randbedingung an der Kopplungsstelle zurückzuführen. Die Übergabe der Variablen bei der Kopplung zweier FV-Domains (1/2) ist in **Abb. 7.15** dargestellt.

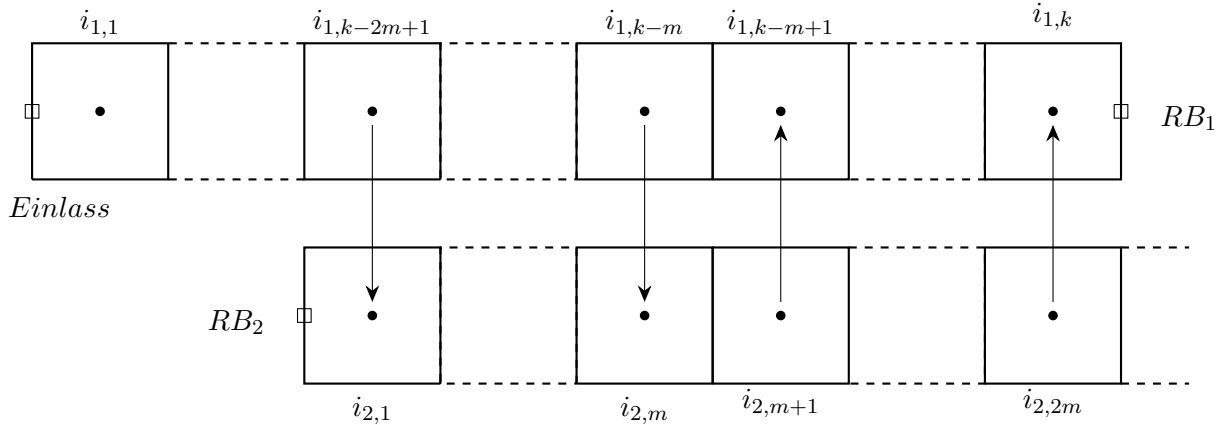


Abbildung 7.15.: Austausch der Strömungsgrößen zwischen zwei gekoppelten FV-Domains.

Für die Validierung der Implementierung der Kopplungsstelle in dem FV-Löser werden exemplarisch zwei eindimensionale FV-Domains der Länge  $l = 2m + m\Delta x$  mit einer konstanten räumlichen Diskretisierung von  $\Delta x = 0,04m$  gekoppelt gelöst. Am Einlass von Domain 1 wird eine Schallwelle mit einer

akustischen Machzahl von  $Ma_{ak,Ein} = 10^{-3}$  und einem numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num} \approx 21$  durch folgenden zeitlichen Geschwindigkeitsverlauf angeregt:

$$c_{Ein}(t) = 0,343 \frac{m}{s} \cdot \sin(2\pi f_G \cdot t) \quad \text{mit } f_G = 500 \text{ Hz} \quad (7.64)$$

Für den Druck  $p_{Ein}$  sowie die Temperatur  $T_{Ein}$  wird am Einlass ein Gradient von 0 (*zeroGradient*) vorgegeben, so dass sich ein mit der Geschwindigkeit korrelierender harmonischer zeitlicher Verlauf dieser Größen am Eintritt einstellt. Diese Nullgradientenvorgabe widerspricht dem sich real einstellenden ebenfalls harmonischen räumlichen Verlauf von Druck und Temperatur an dieser Stelle. Im Rahmen von Testsimulationen konnte jedoch gezeigt werden, dass sich nach wenigen Zellen Abstand von der Randbedingung ein physikalisch sinnvolles akustisches Feld mit gleichphasigen Schallfeldgrößen Druck und Schnelle einstellt, so dass ein Gradient von null eine geeignete Randbedingung am Eintritt darstellt. Der Zeitschritt beträgt  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . Der Testfall wird mit unterschiedlichen Anzahlen an Überlappzellen von  $m = 1..5$  gerechnet. Weiterhin wird die Vorgabe der Randbedingungen an der Kopplungsstelle ( $RB_1$  bzw.  $RB_2$ ) variiert. Es wird eine Extrapolation nullten Grades, was einer *zeroGradient*-Bedingung entspricht, sowie eine quadratische Extrapolation (zweiten Grades) untersucht.

Die Parametervariation wird anhand des Betrags des Reflexionskoeffizienten  $|r|$  an der Kopplungsstelle ausgewertet, da bei (bezüglich des Schemas und der Schrittweite) identisch diskretisierten Domains sämtliche auftretenden Reflexionen auf die angenäherte Randbedingung an der Kopplungsstelle zurückzuführen sind. Die Auswertung erfolgt im Punkt  $i_{1,k-m-1}$  (vgl. Abb. 7.15) und damit der ersten nicht direkt durch die Kopplung beeinflussten Zelle<sup>1</sup>. Für die Bewertung der Reflexionseigenschaften der Kopplungsstelle wird ein zeitlicher Bereich ausgewertet, in dem die angeregte Welle die Kopplungsstelle passiert hat, so dass sich für den Beginn des Auswertzeitfensters  $t_{eva,min}$  folgende Bedingung ergibt:

$$t_{eva,min} > \frac{l_1}{a_{num}} + \frac{1}{f_G} \quad (7.65)$$

Der Zusatz von einer Periode der angeregten Welle dient dazu, einen zeitlichen Abstand zur Wellenfront herzustellen und so sicherzustellen, dass an der Kopplungsstelle ein eingeschwungener Zustand vorliegt. Dieser temporär und lokal eingeschwungene Zustand endet, wenn Reflexionen von einer der Randbedingungen zurück an die Kopplungsstelle gelangen. Für das Ende des Auswertzeitfensters ergibt sich daher folgender Ausdruck:

$$t_{eva,max} < \min\left\{\frac{3l_1}{a_{num}}, \frac{l_1 + 2l_2}{a_{num}}\right\} \quad (7.66)$$

Innerhalb des Auswertzeitfensters entspricht das akustische Feld vor der Kopplungsstelle einer Überlagerung der einlaufenden Welle und der an der Kopplungsstelle entstehenden Reflexionen derselben. An einer ideal reflexionsfreien Kopplungsstelle ist die Lösung somit identisch mit der Referenzlösung, die sich bei Simulation einer FV-Domain (der Referenz) mit denselben numerischen Parametern ergibt.

<sup>1</sup>Da die Größen der Zelle  $i_{1,k-m}$  durch die Flüsse beim Lösen der FV-Domain direkt von den Größen in der Zelle  $i_{1,k-m+1}$  abhängig sind, wird die Zelle  $i_{1,k-m}$  auch als direkt von der Kopplung beeinflusst aufgefasst.

Die evaluierten Lösungen des Druckes  $p_{eva}(t)$  im Auswertzeitraum stellen - wie bereits erwähnt - eine Überlagerung der einlaufenden Welle und der Reflexionen dar. Die einlaufende Welle  $\hat{p}_{ein}$  ist dabei identisch mit der Referenzlösung  $\hat{p}_{ref}$ . In Form von komplexen Amplituden lässt sich der Druck vor der Kopplungsstelle somit mithilfe des Reflexionskoeffizienten ausdrücken:

$$\hat{p}_{eva} = \hat{p}_{ein} \cdot (1 + r) = \hat{p}_{ref} \cdot (1 + r) \quad (7.67)$$

Durch Fouriertransformation der Referenzlösung und der gekoppelten Lösungen lässt sich der Reflexionskoeffizient an der Kopplungsstelle bestimmen zu:

$$\underline{r} = \frac{\hat{p}_{eva}}{\hat{p}_{ref}} - 1 \quad (7.68)$$

Im Folgenden wird der Betrag des Reflexionskoeffizienten betrachtet:

$$r = |\underline{r}| = \left| \frac{\hat{p}_{eva}}{\hat{p}_{ref}} - 1 \right| \quad (7.69)$$

Die Reflexionskoeffizienten der eindimensionalen FV/FV-Kopplung sind in **Abb. 7.16** über der Anzahl an Überlappzellen  $m$  dargestellt. Bei einer Extrapolation nullten Grades zeigen sich bei einer Überlappzelle Reflexionen von nahezu einem Prozent.

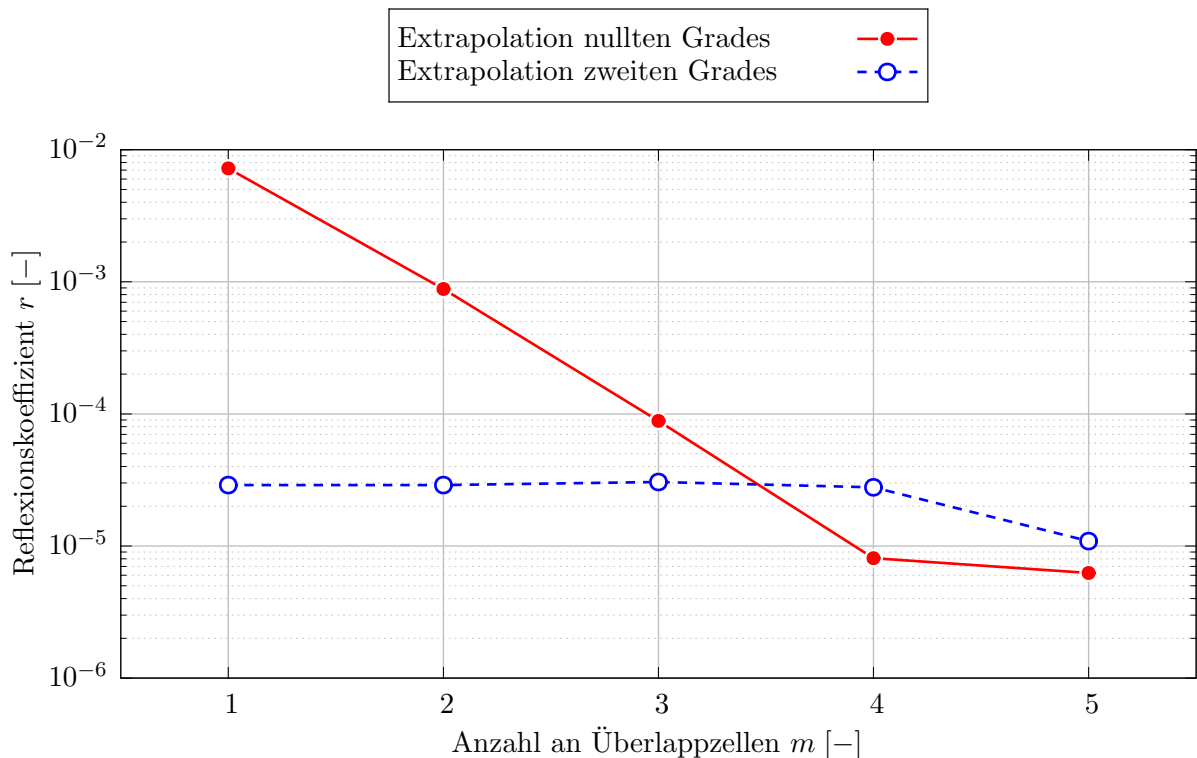


Abbildung 7.16.: Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei eindimensionaler FV/FV-Kopplung und Rückkopplung mit Zellzentren und Extrapolation.

Bis zu  $m = 4$  nehmen die Reflexionen stark ab, zwischen  $m = 4$  und  $m = 5$  sind nur noch leichte Unterschiede auszumachen, der Reflexionskoeffizient für  $m = 5$  liegt bei  $r \approx 6 \cdot 10^{-6}$  und ist damit als vernachlässigbar klein zu bewerten. Bei der Extrapolation zweiten Grades ergeben sich bereits für geringe Anzahlen an Überlappzellen Reflexionen in der Größenordnung von  $r \approx 10^{-4} \dots 10^{-5}$ . Eine Erhöhung der Anzahl an Überlappzellen hat jedoch nur geringe Auswirkungen. Bei  $m = 5$  liegen die Reflexionen mit  $r \approx 10^{-5}$  nahe denjenigen mit Extrapolation nullten Grades.

Die Ursache für die Beobachtung, dass bei  $m = 4$  und  $m = 5$  die Reflexionen bei Extrapolation nullten Grades sogar unterhalb derer bei Extrapolation zweiten Grades liegen, kann nicht geklärt werden. Möglicherweise spielen bei derart geringen Abweichungen die Iterationsfehler (bei einem RMS-gemittelten Residuum von  $10^{-7}$ ) eine Rolle. Aufgrund der geringen Reflexionen wird im Folgenden bei der Rückkopplung mit Extrapolation eine Anzahl an Überlappzellen von  $m = 5$  und eine Extrapolation nullten Grades (*zeroGradient*) verwendet.

## 7.7. Reflexionsminderung durch numerische Impedanzanpassung

Im Folgenden wird die Methode zur Anpassung der numerischen Impedanzen anhand der zuvor ermittelten spektralen Fehler erläutert. Die Kopplungsmethode wird anschließend anhand generischer Testfälle validiert. Dazu werden zunächst reibungsfreie Simulationen mit monofrequenter Anregung und Kopplung von zwei eindimensionalen Domains (1DFV/1DCV) durchgeführt und der Einfluss relevanter numerischer und physikalischer Einflussparameter auf das Reflexionsverhalten der Kopplungsstelle analysiert. Danach werden Möglichkeiten zur spektralen Anpassung bei Anregung mit Oberschwingungen vorgestellt und ebenfalls anhand generischer Testfälle evaluiert. Die multidimensionale Kopplung (3DFV/1DCV), deren wesentlicher Unterschied zu der 1DFV/1DCV-Kopplung in der erforderlichen 3D/1D-Transformation des Profils der Strömungsgeschwindigkeit besteht, wird anschließend in Abs. 7.8 behandelt.

### 7.7.1. Anpassung der numerischen Impedanz bei monofrequenter Anregung

Zur Minimierung der Reflexionen an der Kopplungsstelle müssen - wie in Abs. 7.2 erläutert - die beiden fundamentalen Kopplungsbedingungen Gl. (7.14) sowie Gl. (7.16) erfüllt werden. Es wird vorausgesetzt, dass die zu koppelnden Domains ( $FV/CV$ ) mit dem selben Zeitschritt gelöst werden, d.h. es gilt  $\Delta t_{FV} = \Delta t_{CV}$ . Des Weiteren wird im Bereich der Kopplungsstelle eine äquidistante Diskretisierung in Wellenausbreitungsrichtung in beiden Domains vorausgesetzt.

Ein eindimensionales, monofrequentes physikalisches Wellenausbreitungsproblem ist durch eine Grundfrequenz  $f_G$  respektive die entsprechende Kreiswellenzahl charakterisiert:

$$k_{G,exakt} = 360^\circ \frac{f_G}{a_{exakt} (1 + Ma)} \quad (7.70)$$

Durchläuft eine harmonische Welle der Grundfrequenz  $f_G$  eine numerische Domain, so breitet sich diese innerhalb der Domain mit der Kreiswellenzahl

$$k_{G,num} = 360^\circ \frac{f_G}{a_{num} (1 + \overline{Ma})} \quad (7.71)$$

aus. Nach Gl. (2.77) und Gl. (7.42) bzw. Gl. (7.50) lässt sich bei gegebener Wellenzahl der numerische Phasenwinkel und damit der Diffusionsfehler  $\epsilon_d$  sowie die numerische Dämpfungskonstante  $\alpha_{num}$  (vgl. Gl. (7.25)) in einer numerischen Domain durch die räumliche Auflösung in Wellenausbreitungsrichtung  $\Delta x$  variieren. Bei einem gegebenen  $\varphi_{num}$  in einer der gekoppelten Domains (bspw.  $FV$ ) lässt sich somit durch geeignete Anpassung der räumlichen Diskretisierung in der zweiten Domain (bspw.  $CV$ ) die numerische Dämpfungskonstante anpassen.

Sei die Grundfrequenz der Anregung  $f_G$  sowie die Zeitschrittweite  $\Delta t$  gegeben, so sind über die räumliche Schrittweite der  $FV$ -Domain  $\Delta x_{FV}$  die Parameter  $CFL_{FV}$  und  $\varphi_{num,FV}$  ebenfalls definiert. Die spektralen Fehler  $\epsilon_{d,FV}$  sowie  $\epsilon_{\phi,FV}$  und damit  $\alpha_{num,FV}$  sowie  $a_{num,FV}$  und entsprechend  $k_{G,num,FV}$  sind dann ebenfalls festgelegt. Nach Gl. (7.25) muss dann zur Erfüllung der ersten Kopplungsbedingung Gl. (7.14) für die Parameter in der  $CV$ -Domain gelten:

$$\alpha_{num,CV} = -\frac{k_{G,num,CV}}{\varphi_{num,CV} \cdot CFL_{CV}} \ln(\epsilon_{d,CV}) \stackrel{!}{=} \alpha_{num,FV} \quad (7.72)$$

$$\Leftrightarrow CFL_{CV} = -\frac{k_{G,num,CV}}{\varphi_{num,CV} \cdot \alpha_{num,FV}} \ln(\epsilon_{d,CV}) \quad (7.73)$$

Über die Definition der CFL-Zahl ergibt sich eine weitere Bedingung

$$CFL_{CV} = a_{num,CV} (1 + \overline{Ma}) \frac{\Delta t}{\varphi_{num,CV}} k_{G,num,CV}, \quad (7.74)$$

so dass - unter der Voraussetzung  $k_{G,num,FV} \stackrel{!}{=} k_{G,num,CV}$  - Gl. (7.73-7.74) nach  $CFL_{CV}$  und  $\varphi_{num,CV}$  gelöst werden können. Mit den dadurch ermittelten Parametern ist die erste fundamentale Kopplungsbedingung Gl. (7.14) erfüllt. Gleichzeitig liegen damit  $\epsilon_{\phi,CV}$  und  $\epsilon_{d,CV}$  fest.

Die zweite fundamentale Kopplungsbedingung lässt sich über eine Manipulation der Schallgeschwindigkeit in der  $CV$ -Domain  $a_{exakt,CV}$ , die explizit in den Bestimmungsgleichungen Gl. (5.21-5.23) auftritt, erfüllen. Unter der Voraussetzung, dass an der Kopplungsstelle kein Sprung in den thermodynamischen Variablen auftritt (vgl. Abs. 7.1), gilt  $a_{exakt,CV} = a_{exakt,FV} = a_{exakt}$ . Für gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den numerischen Domains muss unter Berücksichtigung des Machzahl-Skalierungsfaktors des  $CV$ -Schemas  $\zeta_{\overline{Ma}}$  (vgl. Abs. 7.5.3) folgender Zusammenhang gelten:

$$\zeta_{a,CV} \epsilon_{\phi,CV} (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) a_{exakt} \stackrel{!}{=} \epsilon_{\phi,FV} \cdot a_{exakt} \quad (7.75)$$

Sämtliche Größen in Gl. (7.75) sind festgelegt, mit Ausnahme des Skalierungskoeffizienten in der  $CV$ -Domain  $\zeta_{a,CV}$ . Aufgelöst ergibt sich damit für  $\zeta_{a,CV}$ :

$$\zeta_{a,CV} = \frac{\epsilon_{\phi,FV}}{\epsilon_{\phi,CV} (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma})} \quad (7.76)$$

Wird die Schallgeschwindigkeit in den Bestimmungsgleichungen Gl. (5.21-5.23) mit dem Skalierungskoeffizienten  $\zeta_{a,CV}$  multipliziert, so ist auch die zweite fundamentale Kopplungsbedingung Gl. (7.16) erfüllt. Bei derart angepassten numerischen Parametern ergeben sich in beiden gekoppelten Domains gleiche Dämpfungseigenschaften sowie gleiche numerische Schallgeschwindigkeiten und damit gleiche numerische Impedanzen, so dass gemäß der Theorie der numerischen Impedanzanpassung die Reflexionen an der Kopplungsstelle minimiert werden.

### 7.7.2. Reflexionen bei reibungsfreier 1DFV/1DCV-Kopplung mit monofrequenter Anregung

Die zuvor erläuterte spektrale Anpassung der Domains wird zunächst anhand eindimensionaler, reibungsfreier Testfälle validiert. Dazu werden eine FV-Domain und eine CV-Domain wie in Abb. 7.12 dargestellt gekoppelt und bei Variation numerischer sowie physikalischer Parameter simuliert.

#### Generisches 1DFV/1DCV-Modell

Die FV-Domain weist eine Länge von  $l_{FV} = 2 \text{ m}$  zuzüglich der Überlappzellen auf und wird mit einer konstanten räumlichen Schrittweite von  $\Delta x_{FV} = 0,02 \text{ m}$  diskretisiert. Das Verhältnis der numerischen Dämpfungskonstanten  $\xi_d$  (vgl. Gl. (7.14)) wird anhand der räumlichen Auflösung in der CV-Domain  $\Delta x_{CV}$  variiert. Die Länge der CV-Domain beträgt ebenfalls  $l_{CV} \approx 2 \text{ m}$ , wobei diese aufgrund der Variation von  $\Delta x_{CV}$  leicht variiert, da  $l_{CV}$  bei äquidistanter Diskretisierung stets ein ganzzahliges von  $\Delta x_{CV}$  betragen muss. Die zeitliche Schrittweite beträgt  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ , so dass sich in der FV-Domain (bei Simulationen ohne Strömung) eine CFL-Zahl von  $CFL = 0,172$  ergibt.

Am Einlass der FV-Domain wird ein harmonischer Geschwindigkeitsverlauf  $c_{Ein}(t)$  mit einer Anregungsgrundfrequenz vorgegeben, die - wenn nicht anders erwähnt -  $f_G = 500 \text{ Hz}$  beträgt. Für den Druck  $p_{Ein}$  und die Temperatur  $T_{Ein}$  wird - wie zuvor - ein Gradient von null als Randbedingung vorgegeben, vgl. Abs. 7.6.2. Am Austritt wird ein konstanter Druck von  $p_{Aus} = 10^5 \text{ Pa}$  vorgegeben. Beide Domains werden bei sämtlichen Simulationen mit einem Druck von  $p_{init} = 10^5 \text{ Pa}$  sowie einer Temperatur von  $T_{init} = 293,15 \text{ K}$  initialisiert. Die Initialisierungsgeschwindigkeit, wie auch der Gleichanteil der Eintrittsgeschwindigkeit, beträgt bei Simulationen ohne Gleichströmung  $c_{init} = \bar{c}_{Ein} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und bei Simulationen mit Grundströmung der mit der Machzahl der Gleichströmung korrespondierenden Geschwindigkeit  $c_{init} = \bar{c}_{Ein} = \overline{Ma} \cdot a_{exakt}$ . Das Verhältnis der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  (vgl. Gl. (7.16)) wird mit Hilfe des Skalierungskoeffizienten für die Schallgeschwindigkeit  $\zeta_{a,CV}$  (vgl. Gl. (7.76)) angepasst. Als Fluid wird bei sämtlichen Simulationen Luft als ideales Gas modelliert. Die Auswertung der Reflexionen bei den nachfolgenden Parametervariationen erfolgt wie zuvor in Abs. 7.6.2 erläutert und wird im Punkt  $i_{FV,k-m-1}$  in Abb. 7.12 durchgeführt.

### Vergleich der Ansätze zur Rückkopplung

Zunächst wird ein Vergleich der untersuchten Ansätze zur Rückkopplung der Informationen aus der CV-Domain und den damit einhergehenden Umgang mit der Randbedingung  $RB_{FV}$  in Abb. 7.12 vorgenommen. Dazu werden gekoppelte Simulationen mit  $RdF$  nach Abs. 7.6.1 sowie mit  $RdE$  ( $m = 5$ ,  $zeroGradient$ , vgl. Abs. 7.6.2) für einen numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ , eine akustische Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  sowie  $\overline{Ma} = 0$  durchgeführt. Es werden zwei unterschiedliche räumliche Diskretisierungen in der CV-Domain untersucht. Zum Einen der Fall identischer räumlicher Schrittweiten in beiden Domains  $\Delta x_{FV} = \Delta x_{CV}$  und zum Anderen die angepasste räumliche Schrittweite in der CV-Domain, für die sich  $\xi_d = 1$  ergibt. Für beide Fälle wird der Skalierungskoeffizient für die Schallgeschwindigkeit  $\zeta_{a,CV}$  und damit das Verhältnis der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  variiert. Ausgewählte Kombinationen für die numerischen Vorgabeparameter  $\Delta x_{CV}$  sowie  $\zeta_{a,CV}$  und korrespondierenden dimensionslosen Anpassungsparameter  $\xi_d = \frac{\alpha_{num,CV}}{\alpha_{num,FV}}$  sowie  $\xi_a = \frac{a_{num,CV}}{a_{num,FV}}$  sind in **Tab. 7.3** zusammengefasst.

$\Delta x_{CV}$ [m]	$\xi_d$ [-]	$\xi_a$ ( $\zeta_{a,CV} = 1$ ) [-]	$\zeta_{a,CV}$ ( $\xi_a = 1$ ) [-]	$\varphi_{num,CV}$ [°]	$CFL_{CV}$ [-]
0.02	4,9	1,0029	0,9972	10,49	0,1715
0.006825	1,0	1,0059	0,9941	3,57	0,5031

Tabelle 7.3.: Anpassungsparameter und numerische Parameter der CV-Domain bei spektraler Anpassung mit  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$  und Variation von  $\Delta x_{CV}$ .

Die Ergebnisse der Simulationen sind in Form des Betrages des Reflexionskoeffizienten  $r$  als Funktional des Verhältnisses der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  in **Abb. 7.17** dargestellt. Als Referenz zur Bestimmung des Reflexionskoeffizienten dient wiederum eine reine FV-Simulation. Die Simulation mit identischen numerischen Vorgabeparametern ( $\Delta x_{FV} = \Delta x_{CV}$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$ ) ist jeweils mit einem  $\otimes$  markiert. Die Reflexionskoeffizienten für  $\xi_d = 4,9$  verlaufen qualitativ gleich und unterscheiden sich auch quantitativ kaum, wobei die Reflexionen für  $RdF$  im untersuchten Bereich leicht unterhalb derer bei  $RdE$  liegen. Beide Verläufe sind monoton, so dass kein Minimum der Reflexionen im untersuchten Intervall von  $\xi_a$  auftritt. Signifikante Unterschiede zwischen den Ansätzen zur Rückkopplung sind bei gleicher räumlicher Diskretisierung der gekoppelten Domains nicht ersichtlich. Die Reflexionskoeffizienten bei identischen Vorgabeparametern ( $\otimes$ ) liegen bei  $r = 5 \dots 6 \cdot 10^{-3}$ .

Die Reflexionen bei angepasster räumlicher Diskretisierung hingegen zeigen signifikante Unterschiede in Abhängigkeit des Ansatzes zur Rückkopplung. Bei  $RdF$  verlaufen die Reflexionskoeffizienten in dem untersuchten Bereich des Verhältnisses der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  in der Größenordnung der unangepassten Domains. Ein Minimum der Reflexionen ist bei  $\xi_a \approx 1.007$  zu erkennen, die Reflexionen liegen in diesem Bereich unterhalb derjenigen mit unangepassten räumlichen Schrittweiten. Die Reflexionen bei angepassten Domains und  $RdE$  liegen im untersuchten Bereich stets unterhalb derjenigen bei  $RdF$ . Der Reflexionskoeffizient weist ein ausgeprägtes Minimum bei

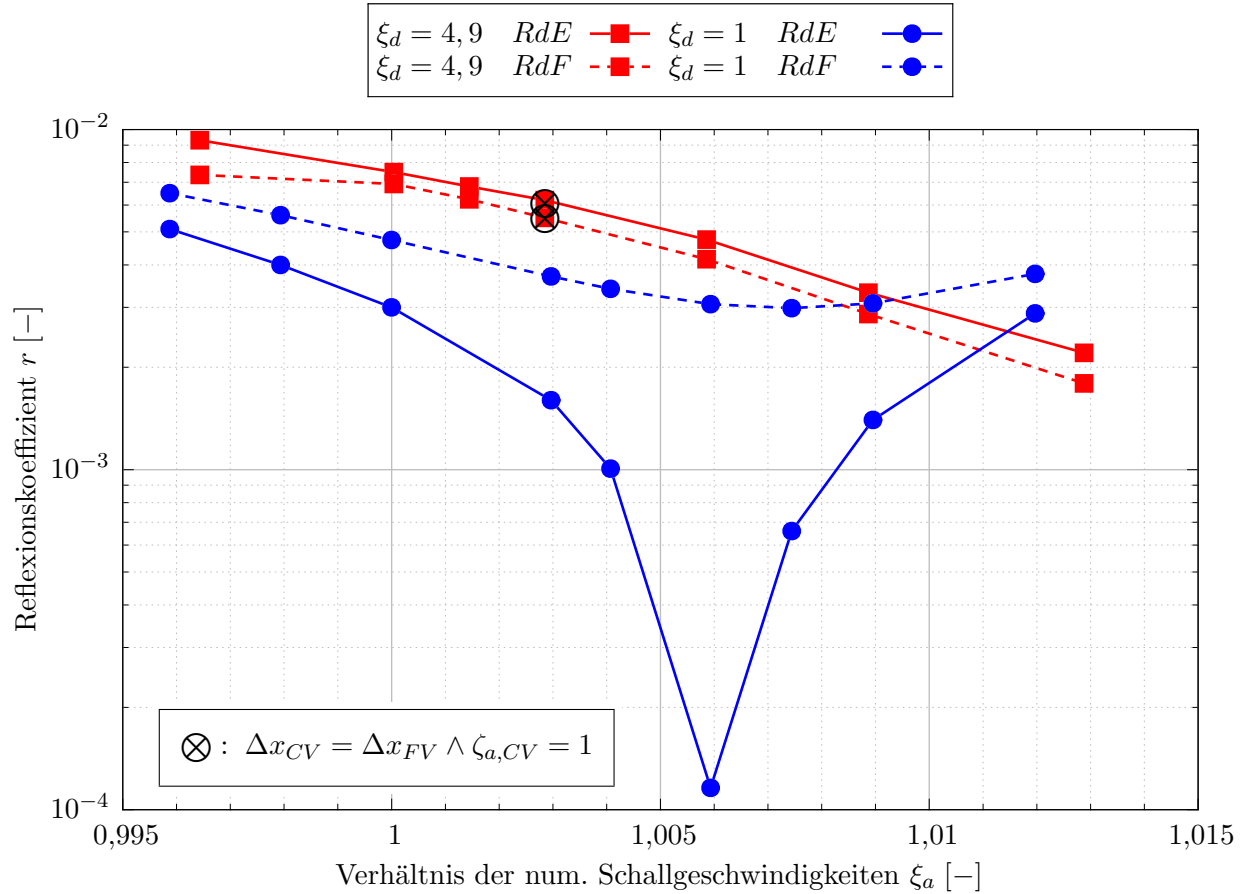


Abbildung 7.17.: Vergleich von Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei Rückkopplung mit Flüssen und bei Rückkopplung mit Zellzentren und Extrapolation für  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 1$ .

$\xi_a \approx 1.006$  auf. In diesem Punkt werden die Reflexionen an der Kopplungsstelle auf  $r \approx 10^{-4}$  signifikant reduziert. Die Lage des Punktes minimaler Reflexionen in Abhängigkeit von  $\xi_a$  liegt überraschend nicht genau bei  $\xi_a = 1$  und wird im Folgenden noch weiter untersucht. Es lässt sich anhand des dargestellten Vergleichs feststellen, dass mit *RdF* keine signifikante Reduktion der Reflexionen an der Kopplungsstelle durch Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften der Domains realisierbar ist. Demgegenüber wird mit *RdE* ( $m = 5$ , *zeroGradient*) eine signifikante Reduktion der Reflexionen mit einem ausgeprägten Minimum im untersuchten Bereich von  $\xi_a$  erreicht. Im Folgenden wird daher ausschließlich dieser Ansatz verwendet und einer tiefergehenden Analyse unterzogen.

### Untersuchung der Richtungsabhängigkeit

Nach der Auswahl der Methode der Rückkopplung wird nun eine potentielle Richtungsabhängigkeit der Kopplungsmethode untersucht. Aufgrund der allgemeingültigen Formulierung der Kopplungsbedingungen sollte keine Abhängigkeit der Laufrichtung einer akustischen Welle (*FV zu CV* oder



$CV$  zu  $FV$ ) auftreten. Um diese These zu untersuchen, werden Simulationen mit den gleichen Parametern wie zuvor (vgl. Tab. 7.3) durchgeführt, wobei die akustische Anregung nun in Form einer Schnellevorgabe an der "freien" Randbedingung der  $CV$ -Domain (zuvor Auslass mit konstantem Druck) aufgeprägt wird. An der "freien" Randbedingung der  $FV$ -Domain (zuvor Einlass mit Schnellevorgabe) wird ein konstanter Druck von  $p = 10^5 \text{ Pa}$  sowie ein Gradient von null für die Strömungsgeschwindigkeit und die Temperatur vorgegeben<sup>1</sup>. Die angeregte akustische Welle läuft somit von der  $CV$ -Domain in die  $FV$ -Domain. Die Auswertung erfolgt in diesem Fall analog zu der  $FV$ -Domain im Punkt  $i_{CV,3}$  in Abb. 7.12. Für jede gekoppelte Simulation wird eine reine  $CV$ -Simulation mit entsprechendem  $\zeta_{a,CV}$  durchgeführt, die als Referenz zur Berechnung von  $r$  dient. Die Ergebnisse sind in **Abb. 7.18** dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse von zuvor ( $FV$  zu  $CV$ ) ebenfalls abgebildet.

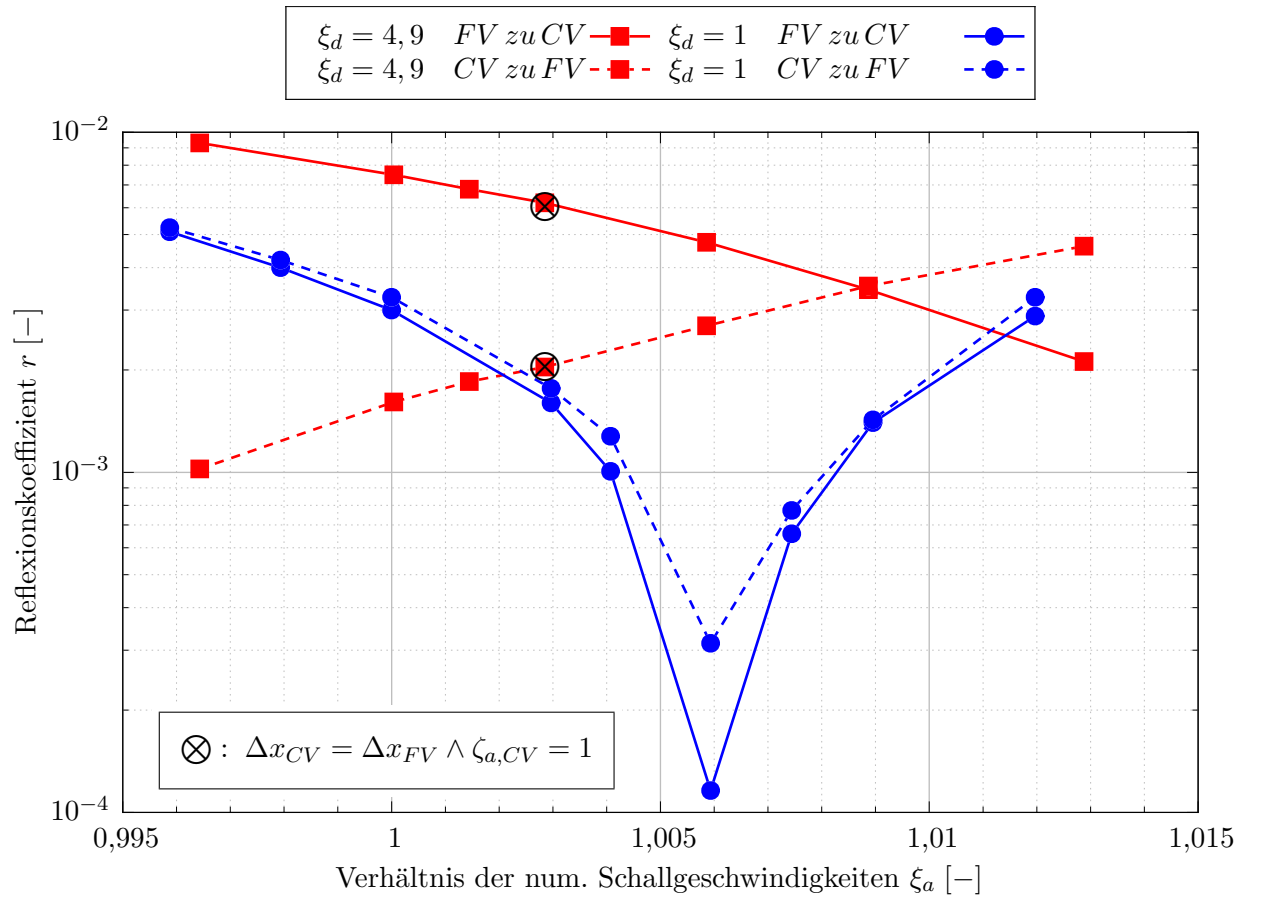


Abbildung 7.18.: Vergleich von Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei Anregung in der  $FV$ -Domain ( $FV$  zu  $CV$ ) und in der  $CV$ -Domain ( $CV$  zu  $FV$ ) für  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 1$ .

<sup>1</sup>Durch diese Nullgradienten-Vorgabe für  $c$  und  $T$  ist das Modell  $CV$  zu  $FV$  nicht exakt symmetrisch zu dem Modell  $FV$  zu  $CV$  aufgebaut. Die akustische Austrittsrandbedingung der  $FV$ -Domain im Modell  $CV$  zu  $FV$  ist aufgrund des ausgewerteten Zeitfensters jedoch irrelevant.

Die Verläufe für  $\xi_d = 4,9$  weisen beide ein monotones, jedoch gegenläufiges Verhalten auf. Diese Gegenläufigkeit resultiert vermutlich aus der Tatsache, dass hinsichtlich der Konsistenz der Darstellung die Reflexionskoeffizienten stets als Funktional von  $\xi_a = \frac{a_{num,CV}}{a_{num,FV}}$  dargestellt sind. Ausgehend von der CV-Domain ist der Sprung in der numerischen Schallgeschwindigkeit an der Kopplungsstelle bei identischen Parametern somit reziprok zu demjenigen ausgehend von der FV-Domain. Vor diesem Hintergrund wird deutlich, dass die beiden Verläufe für  $\xi_d = 4,9$  ein vergleichbares Verhalten in Abhängigkeit von  $\xi_a$  aufweisen, wobei die Reflexionen bei der Anregung in der CV-Domain (CV zu FV) leicht niedriger liegen.

Die Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  sind bei Anregung in der FV- und in der CV-Domain nahezu identisch. Der Punkt minimaler Reflexionen ist für beide Varianten mit  $\xi_a \approx 1,006$  der gleiche. Die Reflexionen unterscheiden sich bei dieser Parameterkombination geringfügig. In beiden Fällen verlaufen die Reflexionen ausgehend von dem Minimum nahezu symmetrisch, wobei die Reflexionskoeffizienten bei der Anregung in der CV-Domain stets leicht höher liegen. Die ausgeprägten Minima in beiden Verläufen, die bei dem gleichen  $\xi_a$  auftreten zeigen jedoch eine richtungsunabhängige Minimierung der Reflexionen durch die Anpassung der numerische Impedanz.

### Analyse der Anpassungsparameter

In den vorherigen Abschnitten wurde bereits festgestellt, dass sich bei einem Verhältnis der numerischen Dämpfungskonstanten von  $\xi_d = 1$  die Reflexionen an der Kopplungsstelle signifikant reduzieren lassen, das ausgeprägte Minimum der Reflexionen jedoch nicht wie erwartet bei  $\xi_a = 1$ , sondern für die untersuchte Parameterkombination bei  $\xi_a \approx 1,006$  liegt. Daher wird für einen numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  mit dem Modell *FV zu CV* eine umfassendere Parametervariation mit weiteren räumlichen Schrittweiten in der CV-Domain und damit zusätzlichen Werten für  $\xi_d$  simuliert. Die Referenz zur Bestimmung von  $r$  stellt - wie zuvor - eine reine FV-Simulation dar. Ein Auszug der numerischen Vorgabe- und Anpassungsparameter ist ergänzend zu Tab. 7.3 in **Tab. 7.4** aufgeführt.

$\Delta x_{CV}$ [m]	$\xi_d$ [-]	$\xi_a$ ( $\zeta_{a,CV} = 1$ ) [-]	$\zeta_{a,CV}$ ( $\xi_a = 1$ ) [-]	$\varphi_{num,CV}$ [°]	$CFL_{CV}$ [-]
0.01341	2,94	1,0050	0,9950	7,03	0,2558
0.005516	0,61	1,0060	0,9941	2,89	0,6218
0.0035	0,02	1,0059	0,9941	1,84	0,9805

Tabelle 7.4.: Anpassungsparameter und numerische Parameter der CV-Domain bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$  und Variation von  $\Delta x_{CV}$ , vgl. Abb. 7.19.

Die Ergebnisse sind in **Abb. 7.19** in Form von Reflexionskoeffizienten an der Kopplungsstelle dargestellt. Die Verläufe der Reflexionskoeffizienten über  $\xi_a$  weisen im Rahmen der untersuchten Werte für  $\xi_d \leq 1$  ausgeprägte Minima auf. Für  $\xi_d < 1$  liegen die Minima der Reflexionen bei kleineren

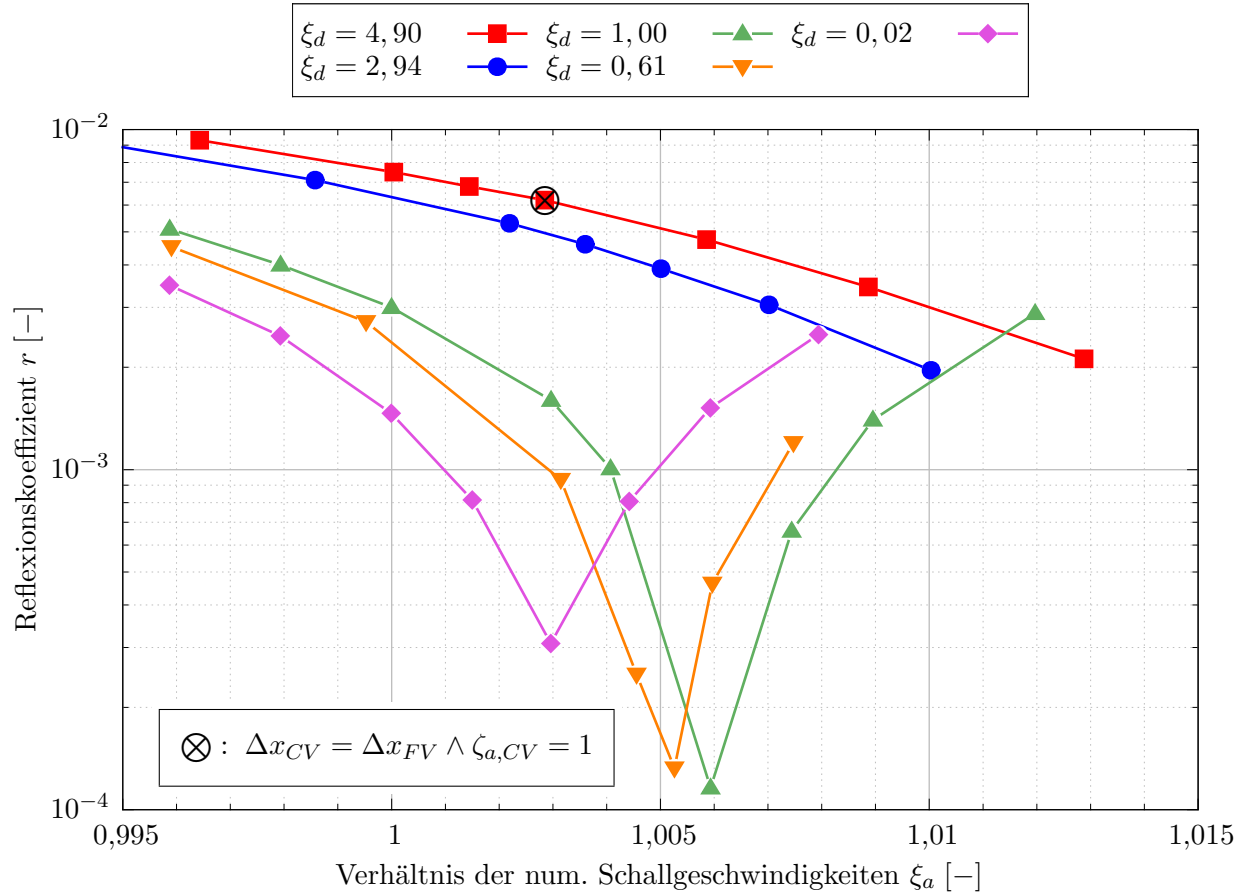


Abbildung 7.19.: Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\overline{Ma} = 0$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  und  $\Theta = 1$ .

$\xi_a$  als für  $\xi_d = 1$ . Daher und aufgrund der monoton fallenden Verläufe ist davon auszugehen, dass für  $\xi_d = 2,94$  bzw.  $\xi_d = 4,90$  ebenfalls Minima existieren, diese jedoch außerhalb des untersuchten Parameterraumes liegen.

Ein Vergleich der Verläufe für  $\xi_d \leq 1$  zeigt, dass diese stets nahezu symmetrisch zum Punkt kleinster Reflexionen verlaufen. Die kleinsten Reflexionen insgesamt werden dabei mit angepasster numerischer Dämpfungskonstante in der CV-Domain und damit  $\xi_d = 1$  erreicht. Mit weiter abnehmender räumlicher Schrittweite nimmt der minimal erreichbare Reflexionskoeffizient kontinuierlich zu.

Wie bereits festgestellt, liegt das Minimum der Reflexionen für  $\xi_d = 1$  bei  $\xi_a = 1,006$ . Nach der in Abs. 7.2 erläuterten Theorie der numerischen Impedanzanpassung und der zweiten fundamentalen Kopplungsbedingung Gl. (7.16) müsste dies bei  $\xi_a = 1$  liegen. Der Punkt  $\xi_a = 1,006$ , bei dem die minimalen Reflexionen auftreten, ist jedoch derjenige mit  $\zeta_{a,CV} = 1$ . Diese unerwartete Beobachtung legt nahe, dass durch eine Manipulation der Schallgeschwindigkeit in der CV-Domain eine Störung

induziert wird, die in größeren Reflexionen resultiert als eine relative Abweichung der numerischen Schallgeschwindigkeiten von

$$\xi_a - 1 = 6 \cdot 10^{-3} . \quad (7.77)$$

Die Minima der Verläufe für  $\xi_d = 0,61$  bzw.  $\xi_d = 0,02$  weichen ebenfalls deutlich sichtbar von  $\xi_a = 1$  ab. Gleichzeitig liegen die Minima in diesen Fällen jedoch auch bei  $\zeta_{a,CV} \neq 1$ . Mit  $\xi_d \rightarrow 1$  (ausgehend von  $\xi_d = 0,02$ ) strebt jedoch auch der Skalierungskoeffizient der Schallgeschwindigkeit, bei dem die minimalen Reflexionen auftreten,  $\zeta_{a,CV}(r_{min})$  gegen eins. Dieser konsistente und systematische Verlauf deutet darauf hin, dass das Auftreten minimaler Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$  kein Resultat arbiträrer Störungen durch numerische Ungenauigkeiten oder kumulierte Fehler ist. Vielmehr scheint ein in der Theorie nicht berücksichtigter Effekt die Ursache zu sein.

Im Folgenden werden einige potentielle Erklärungsansätze für diese Abweichungen analysiert: Ein erster Ansatz ist der Einfluss des Skalierungskoeffizienten der Schallgeschwindigkeit  $\zeta_{a,CV}$  auf die numerischen Parameter in der CV-Domain. Nach Gl. (7.71) sowie Gl. (7.74) werden durch eine Manipulation der numerischen Schallgeschwindigkeit  $a_{num,CV}$  mithilfe von  $\zeta_{a,CV}$  auch die Wellenzahl  $k_{num,CV}$  sowie die CFL-Zahl  $CFL_{CV}$  in der CV-Domain verändert. Dadurch ergibt sich eine implizite Abhängigkeit der gesuchten numerischen Vorgabeparameter  $\Delta x_{CV}$  und  $\zeta_{a,CV}$  von deren Einflussgrößen  $\epsilon_{\phi,CV}(\varphi_{num,CV}, CFL_{CV})$  und  $\epsilon_{d,CV}(\varphi_{num,CV}, CFL_{CV})$  bzw.  $\alpha_{num,CV}(k_{num,CV}, CFL_{CV}, \varphi_{num,CV}, \epsilon_{d,CV})$ . Die Vernachlässigung dieser Abhängigkeiten könnte in einer Verstimmung der Anpassung der gekoppelten Domains resultieren. Daher wird der Einfluss der Skalierung von  $k_{num,CV}$  und  $CFL_{CV}$  durch  $\zeta_{a,CV}$  exemplarisch mit den Parametern der angepassten Domains in Abb. 7.19 und damit  $\zeta_{a,CV} = 0,9941$  untersucht. Die relative Abweichung der räumlichen Diskretisierung in der CV-Domain  $\epsilon_{\Delta x_{CV}}$  mit und ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit von  $\zeta_{a,CV}$  ergibt sich zu

$$\epsilon_{\Delta x_{CV}} = \frac{\Delta x_{CV}(a_{num}) - \Delta x_{CV}(a_{num} \cdot \zeta_{a,CV})}{\Delta x_{CV}(a_{num})} = 6 \cdot 10^{-3} . \quad (7.78)$$

Die Ergebnisse der Variationen in Abb. 7.19 in Verbindung mit den Vorgabeparametern in Tab. 7.3 bzw. Tab. 7.4 lassen erahnen, dass der Einfluss dieser Abweichung auf den Reflexionskoeffizienten vernachlässigbar klein ist. Die relative Abweichung  $\epsilon_{\zeta_{a,CV}}$  des theoretisch zur Anpassung erforderlichen Skalierungskoeffizienten der Schallgeschwindigkeit  $\zeta_{a,CV}$  in der CV-Domain mit und ohne Berücksichtigung desselben ergibt sich zu

$$\epsilon_{\zeta_{a,CV}} = \frac{\zeta_{a,CV}(a_{num}) - \zeta_{a,CV}(a_{num} \cdot \zeta_{a,CV})}{\zeta_{a,CV}(a_{num})} = 6 \cdot 10^{-5} . \quad (7.79)$$

Auch diese Abweichungen lassen vor dem Hintergrund der Ergebnisse in Abb. 7.19 keinen wesentlichen Einfluss der impliziten Abhängigkeit von  $\zeta_{a,CV}$  auf die Reflexionen an der Kopplungsstelle erwarten.

Um diese Annahme zu überprüfen, werden exemplarisch Simulationen mit der Parameterkombination  $\xi_d = 1$  sowie  $\xi_a = 1$  unter Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit von  $\zeta_{a,CV}$  durchgeführt,

wobei sich in diesem Fall  $\zeta_{a,CV} = 0,99404$  und  $\Delta x_{CV} = 0,006785 \text{ m}$  ergibt. Der resultierende Reflexionskoeffizient an der Kopplungsstelle beträgt - wie zuvor -  $r = 3 \cdot 10^{-3}$ . Eine Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit der numerischen Vorgabeparameter von  $\zeta_{a,CV}$  hat also praktisch keinen Einfluss auf die Reflexionen, so dass eine Vernachlässigung dieser Abhängigkeit nicht die Ursache für die von der Theorie abweichende Beobachtung der minimalen Reflexionen bei  $\zeta_{a,CV} = 1$  sein kann.

Als weitere mögliche Ursache wird eine potentielle Änderung der Dichte und damit der spezifischen Schallkennimpedanz  $Z_0 = \bar{\rho} a_{num}$  durch die Manipulation der Schallgeschwindigkeit in der CV-Domain untersucht. Dazu werden bei den gekoppelten Simulationen mit  $\xi_d = 1$  die mittlere numerische Schallgeschwindigkeit  $a_{num}$  sowie die mittlere Dichte  $\bar{\rho}$  in beiden Domains ausgewertet. Die numerische Schallgeschwindigkeit wird durch Spektraltransformation und Auswertung des Phasenversatzes der Schallschnelle für je zwei Monitorpunkte in der FV-Domain und der CV-Domain bestimmt. Zur Bestimmung der mittleren Dichte wird der arithmetische Mittelwert an der Kopplungsstelle im Punkt  $i_{FV,k-m}$  in der FV-Domain und im Punkt  $i_{CV,2}$  in der CV-Domain gebildet, vgl. Abb. 7.12. Der räumliche Versatz der ausgewerteten Punkte ist erforderlich, da für einen sinnvollen Vergleich Punkte im Inneren beider Domains ausgewertet werden müssen. Räumlich miteinander korrespondierende Punkte weisen aufgrund der Übergabe der Größen im Rahmen der Kopplung ohnehin dieselben Werte sämtlicher Strömungsgrößen auf. Da jedoch keine viskose Reibung modelliert wird, ist trotz des räumlichen Versatzes die gleiche mittlere Dichte in beiden ausgewerteten Punkten zu erwarten.

Die Verhältnisse der ermittelten spezifischen Schallkennimpedanzen  $\frac{Z_{0,CV}}{Z_{0,FV}}$  sind in **Abb. 7.20** als Funktional des Verhältnisses der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  dargestellt. Es zeigt sich, dass das Verhältnis der numerischen Schallkennimpedanzen praktisch linear mit dem Verhältnis der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  zunimmt. Abgesehen von minimalen Abweichungen entspricht das Verhältnis der Schallkennimpedanzen sogar dem jeweils korrespondierenden  $\xi_a$ . Diese Abweichungen sind vermutlich auf eine Kumulation von Fehlern und numerischen Ungenauigkeiten zurückzuführen. Es wird jedoch deutlich, dass auch die Dichte und damit die Schallkennimpedanz nicht nennenswert durch die Manipulation der Schallgeschwindigkeit verändert wird, sondern praktisch identisch in beiden Domains ist. Damit ist auch eine potentielle Änderung der Dichte als Ursache für die unerwartete Verschiebung des Punktes minimaler Reflexionen zu  $\zeta_{a,CV} = 1$  auszuschließen.

Die Ursachen für die Abweichung des Punktes minimaler Reflexionen von der zweiten Kopplungsbedingung Gl. (7.16) und der aus den bisherigen Ergebnissen resultierenden Erfordernis  $\zeta_{a,CV} = 1$  zur Erzielung minimaler Reflexionen kann anhand der untersuchten Ansätze nicht geklärt werden und bleibt daher offen. Aufgrund der eindeutigen Systematik ist davon auszugehen, dass ein in der Theorie der numerischen Impedanzanpassung nicht erfasster und damit nicht berücksichtigter Effekt die Ursache ist. Im Folgenden wird die Gültigkeit der Kopplungsbedingungen anhand weiterer Parametervariationen untersucht.

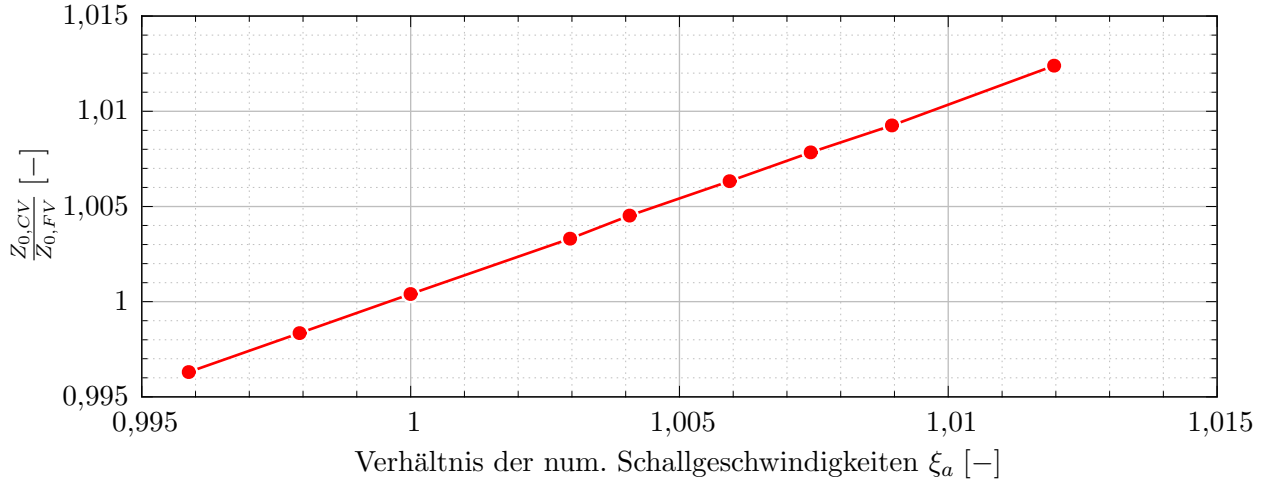


Abbildung 7.20.: Verhältnis der numerischen Schallkennimpedanzen bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\overline{Ma} = 0$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\Theta = 1$  und  $\xi_d = 1$ .

### Einfluss numerischer Parameter

Zur weitergehenden Analyse der Reflexionseigenschaften der Kopplungsstelle werden nun Simulationen mit dem Modell *FV zu CV* und den gleichen Parametern wie zuvor, jedoch doppelter Anregungsgrundfrequenz  $f_G = 1000 \text{ Hz}$  und damit einem doppelten numerischen Phasenwinkel von  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  durchgeführt. Exemplarische numerische Vorgabe- und Anpassungsparameter sind wiederum ergänzend zu Tab. 7.3 in **Tab. 7.5** aufgeführt. Die Referenzlösung für die Bestimmung von  $r$  wird wieder mit reinen FV-Simulationen ermittelt.

$\Delta x_{CV}$ [m]	$\xi_d$ [-]	$\xi_a$ ( $\zeta_{a,CV} = 1$ ) [-]	$\zeta_{a,CV}$ ( $\xi_a = 1$ ) [-]	$\varphi_{num,CV}$ [°]	$CFL_{CV}$ [-]
0.02	5,03	1,0115	0,9887	20,98	0,1715
0.006721	1,0	1,0240	0,9766	7,05	0,5109

Tabelle 7.5.: Anpassungsparameter und numerische Parameter der CV-Domain bei  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$  und Variation von  $\Delta x_{CV}$ , vgl. Abb. 7.21.

Ein Vergleich der Vorgabeparameter in Tab. 7.3 und Tab. 7.5 macht deutlich, dass sich die erforderliche räumliche Auflösung in der CV-Domain  $\Delta x_{CV}$  zur Anpassung der numerischen Dämpfungskonstante trotz einer Verdoppelung des numerischen Phasenwinkels in der FV-Doman  $\varphi_{num,FV}$  nur unwesentlich ändert. Die Parameter bezüglich der numerischen Schallgeschwindigkeit ( $\xi_a$  ( $\zeta_{a,CV} = 1$ ) bzw.  $\zeta_{a,CV}$  ( $\xi_a = 1$ )) ändern sich hingegen relativ deutlich.

Die Reflexionen für  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  sind in **Abb. 7.21** denjenigen mit  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  nach Tab. 7.3 gegenübergestellt. Anhand der Skalierung der Abszisse wird der deutlich aufgeweitete Parameterbereich des Verhältnisses der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  deutlich. Auch bei  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  zeigt sich, wie zuvor beobachtet, dass bei identischen räumlichen Schrittweiten  $\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV}$  und damit  $\xi_d = 5,03$  kein Minimum der Reflexionen im betrachteten Intervall von

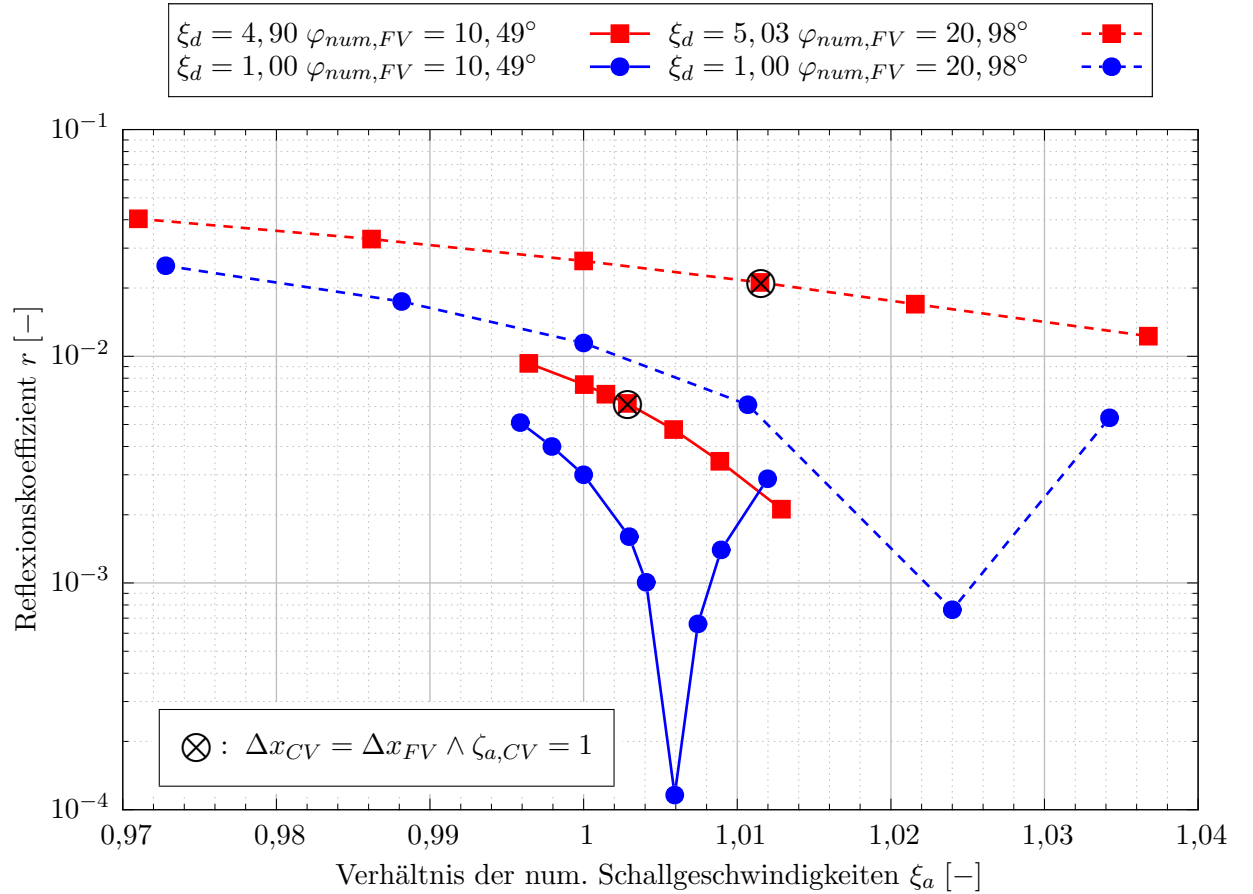


Abbildung 7.21.: Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  bzw.  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 1$ .

$\xi_a$  auftritt. Bei angepassten numerischen Dämpfungskoeffizienten hingegen ist wiederum ein ausgeprägtes Minimum der Reflexionen zu erkennen. Dies liegt ebenfalls nicht im Punkt angepasster Schallgeschwindigkeiten ( $\xi_a = 1$ ), sondern bei  $\xi_a = 1,024$ . Wie aus Tab. 7.5 hervorgeht, ist dies wiederum die Simulation mit  $\zeta_{a,CV} = 1$ , also ohne Anpassung der numerischen Schallgeschwindigkeit in der CV-Domain.

Ein Vergleich der Ergebnisse bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  und  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  zeigt, dass bei dem größeren numerischen Phasenwinkel größere Reflexionen auftreten. Dies gilt sowohl für die Reflexionen bei unangepassten Domains, die für  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  bei  $r \approx 2 \cdot 10^{-2}$  liegen, als auch die minimalen Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  und  $\zeta_{a,CV} = 1$ . Die minimalen Reflexionen liegen für  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  bei  $r \approx 7 \cdot 10^{-4}$ . Für beide untersuchten numerischen Phasenwinkel lassen sich somit die Reflexionen bei kleinen Amplituden und ohne Gleichströmung durch Anpassung der Domains um ein bis zwei Größenordnungen reduzieren. Zudem bestätigen die Untersuchungen bei  $\varphi_{num,FV} = 20,98^\circ$  die vorherige Beobachtung, dass die größte Reduktion von Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  und  $\zeta_{a,CV} = 1$  erreicht wird.

Als weiterer numerischer Parameter wird der Gewichtungsfaktor der zeitlichen Integration  $\Theta$  des FV-Schemas variiert. Dadurch ändern sich die Wellenausbreitungseigenschaften des FV-Schemas<sup>1</sup> (vgl. Gl. (7.50-7.51)), so dass das CV-Schema nun mit einem anderen FV-Schema gekoppelt wird. Die Vorgabe- und Kopplungsparameter der Parametervariation bei  $\Theta = 0,55$  sind in **Tab. 7.6** zusammengefasst. Drei unterschiedliche räumliche Diskretisierungsschritte in der CV-Domain  $\Delta x_{CV}$  werden untersucht. Wie zuvor wird der Fall konstanter räumlicher Auflösung  $\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV}$  simuliert. Weiterhin wird die Parameterkombination mit  $\xi_d = 1$ , sowie eine räumliche Schrittweite zwischen diesen beiden analysiert. Untersuchungen - wie zuvor - mit  $\xi_d < 1$  konnten mit  $\Theta = 0,55$  nicht durchgeführt werden, da die CFL-Zahl für  $\Delta x_{CV} = 0,003774$  bereits nahe an eins liegt, vgl. Tab. 7.6. Eine weitere Reduktion der räumlichen Diskretisierung würde zu einer weiteren Zunahme der CFL-Zahl und damit einer Nichteinhaltung der Stabilitätsbedingung  $CFL_{CV} \stackrel{!}{\leq} 1$  des expliziten CV-Schemas führen.

$\Delta x_{CV}$ [m]	$\xi_d$ [-]	$\xi_a$ ( $\zeta_{a,CV} = 1$ ) [-]	$\zeta_{a,CV}$ ( $\xi_a = 1$ ) [-]	$\varphi_{num,CV}$ [°]	$CFL_{CV}$ [-]
0.02	48,60	1,0026	0,9974	10,49	0,1715
0.0085	15,96	1,0055	0,9945	4,46	0,4033
0.003774	1,0	1,0057	0,9943	1,98	0,9097

Tabelle 7.6.: Anpassungsparameter und numerische Parameter der CV-Domain bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$  und  $\Theta = 0,55$ , vgl. Abb. 7.22.

Die Ergebnisse der Variationen für  $\Theta = 0,55$  sind in **Abb. 7.22** dargestellt. Es zeigen sich sehr ähnliche Verläufe wie zuvor bei  $\Theta = 1$ , vgl. Abb. 7.19. Bei identischer räumlicher Schrittweite ( $\xi_d = 48,6$ ) ist kein Minimum im untersuchten Parameterraum auszumachen. Gleiches gilt für  $\xi_d = 15,96$ . Für angepasste numerische Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 1$ ) ist wiederum ein deutlich ausgeprägtes Minimum der Reflexionen erkennbar. Der Punkt minimaler Reflexionen liegt in diesem Fall bei  $\xi_a = 1,0057$  und damit bei  $\zeta_{a,CV} = 1$ . Erneut bestätigt sich also die zuvor getroffene Beobachtung, dass sich für  $\zeta_{a,CV} = 1$  bei angepassten numerischen Dämpfungskonstanten die größte Reduktion von Reflexionen an der Kopplungsstelle erzielen lässt.

Die Tatsache, dass die Reflexionen sowohl für angepasste numerische Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 1$ ) insbesondere jedoch auch für identische Vorgabeparameter bei  $\Theta = 0,55$  (Abb. 7.22) zwar leicht oberhalb derjenigen bei  $\Theta = 1$  (Abb. 7.19) liegen, sich jedoch kaum voneinander unterscheiden, scheint angesichts der großen Unterschiede im Verhältnis der numerischen Dämpfungskonstanten im unangepassten Fall ( $\xi_d(\Theta = 0,55) = 48,60$  sowie  $\xi_d(\Theta = 1) = 4,9$ ) zunächst überraschend. Das Verhältnis der numerischen Dämpfungskonstanten ist folglich nicht als unabhängiger Parameter zur quantitativen Beurteilung zu erwartender Reflexionen zu interpretieren. Während das Kriterium angepasster numerischer Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 1$ ) zur Minimierung von Reflexionen an der Kopplungs-

<sup>1</sup>Die Diffusions- und Dispersionsfehler des FV-Schemas bei Variation des Gewichtungsfaktors der zeitlichen Integration  $\Theta$  sind in Anhang A.4 dargestellt.



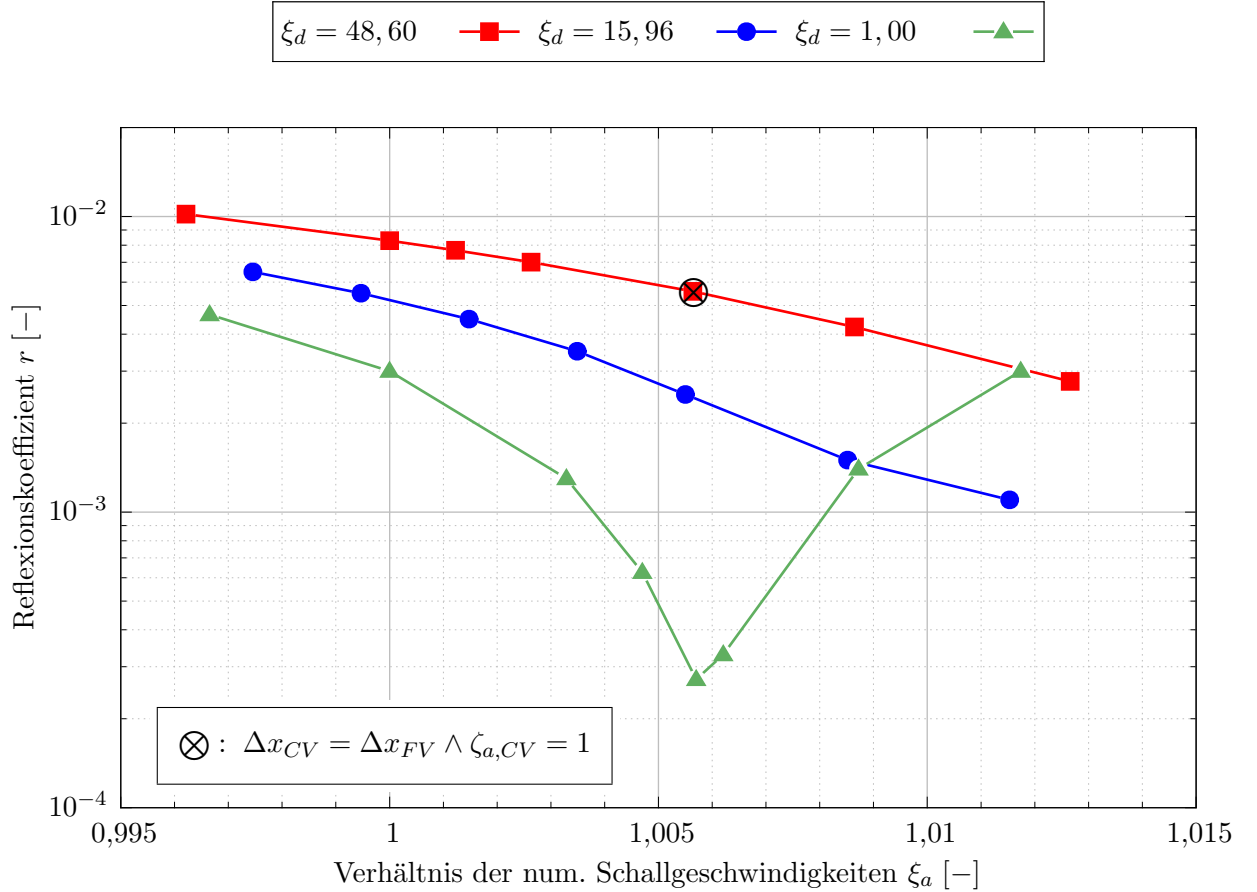


Abbildung 7.22.: Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 0,55$ .

stelle allgemeingültig ist, lässt sich keine allgemeingültige Aussage über die Quantität auftretender Reflexionen bei Abweichung von diesem Kriterium treffen.

In **Tab. 7.7** ist exemplarisch ein Vergleich von theoretischen numerischen Reflexionskoeffizienten  $r_{th,num}$  nach Gl. (7.12) und korrespondierenden numerisch-experimentell ermittelten Reflexionskoeffizienten  $r_{exp}$  dargestellt. Die theoretischen Reflexionskoeffizienten  $r_{th,num}$  werden dabei mit den spektralen Fehlern der Schemata nach Gl. (7.42-7.43) bzw. Gl. (7.50-7.51) berechnet und ergeben sich für  $\xi_d = \xi_a = 1$  entsprechend zu null. Es zeigt sich, dass die numerisch-experimentell ermittelten Reflexionskoeffizienten stets um etwa eine Größenordnung kleiner sind als die theoretischen.

Die Verhältnisse zwischen Reflexionen bei unangepassten und angepassten Domains sind trotz der Abweichungen zwischen Theorie und numerischem Experiment durchaus vergleichbar. Sowohl die theoretischen als auch die numerisch-experimentell ermittelten Reflexionskoeffizienten sind bei angepassten numerischen Dämpfungskonstanten um ein bis zwei Größenordnungen geringer als bei identisch diskretisierten Domains.

$\Theta$ [-]	$r_{th,num}(\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV};$ $\zeta_{a,CV} = 1)$ [-]	$r_{th,num}(\xi_d = 1;$ $\zeta_{a,CV} = 1)$ [-]	$r_{exp}(\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV};$ $\zeta_{a,CV} = 1)$ [-]	$r_{exp}(\xi_d = 1;$ $\zeta_{a,CV} = 1)$ [-]
1	0,030	0,0029	0,0062	0,000116
0,55	0,037	0,0028	0,0025	0,00027

Tabelle 7.7.: Theoretische und experimentell ermittelte numerische Reflexionskoeffizienten bei gekoppelten Simulationen mit  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$ ,  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  und  $\overline{Ma} = 0$ .

Es wäre zu erwarten gewesen, dass aufgrund von residualen Fehlern und numerischen Ungenauigkeiten die experimentell ermittelten Reflexionskoeffizienten  $r_{exp}$  tendenziell größer sind als die theoretischen numerischen Reflexionskoeffizienten  $r_{th,num}$ . Die Systematik in den genau gegenteiligen Verhältnissen nach Tab. 7.7 spricht wiederum für die zuvor getroffene Annahme, dass in der Theorie der numerischen Impedanzanpassung ein -weiterhin unbekannter - relevanter Effekt nicht erfasst wird und in den dargelegten Betrachtungen damit nicht berücksichtigt wird.

### Einfluss der akustischen Machzahl

Nachdem anhand der oben erläuterten umfassenden Parametervariationen festgestellt wurde, dass die maximale Reduktion von Reflexionen an der Kopplungsstelle mit  $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$  und damit ohne Anpassung der numerischen Dispersion erzielt wird, wird im Folgenden der Einfluss physikalischer Parameter auf das Reflexionsverhalten der Kopplungsstelle untersucht. Dazu wird zunächst eine Variation der akustischen Machzahl  $Ma_{ak}$  und damit der Amplitude durchgeführt.

Es werden Simulationen mit den in Tab. 7.3 aufgeführten Parametern und dem gleichen Modell wie zuvor (*FV zu CV*) durchgeführt, wobei die akustische Machzahl der Anregung zwischen  $10^{-3} \leq Ma_{ak} \leq 10^{-1}$  variiert wird. Die Reflexionskoeffizienten sind in **Abb. 7.23** abgebildet. Die Reflexionskoeffizienten bei akustischen Machzahlen von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  und  $Ma_{ak} = 10^{-2}$  weisen keine signifikanten Abweichungen auf. Sowohl für  $\xi_d = 4,9$  als auch für  $\xi_d = 1$  liegen die Verläufe der Reflexionskoeffizienten nahezu übereinander. Für beide akustischen Machzahlen liegt der Punkt minimaler Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$ . Die minimalen Reflexionskoeffizienten sind mit  $r \approx 1..2 \cdot 10^{-4}$  ebenfalls nahezu gleich.

Bei  $Ma_{ak} = 5 \cdot 10^{-2}$  zeigen sich deutliche Abweichungen von den Tendenzen der kleineren akustischen Machzahlen. Die Reflexionen bei unangepassten Domains liegen konstant unterhalb derjenigen bei kleineren akustischen Machzahlen, während die Reflexionskoeffizienten bei angepassten Domains über einen weiten Bereich von  $\xi_a$  deutlich darüber liegen. Das Minimum der Reflexionen bei  $\xi_d = 1$  ist weitaus weniger stark ausgeprägt. Der Punkt minimaler Reflexionen weicht ebenfalls von dem bei kleineren akustischen Machzahlen ab. Es wird ersichtlich, dass die minimalen Reflexionen nicht bei  $\zeta_{a,CV} = 1$  erreicht werden, so dass keine Aussage über die erforderlichen Parame-

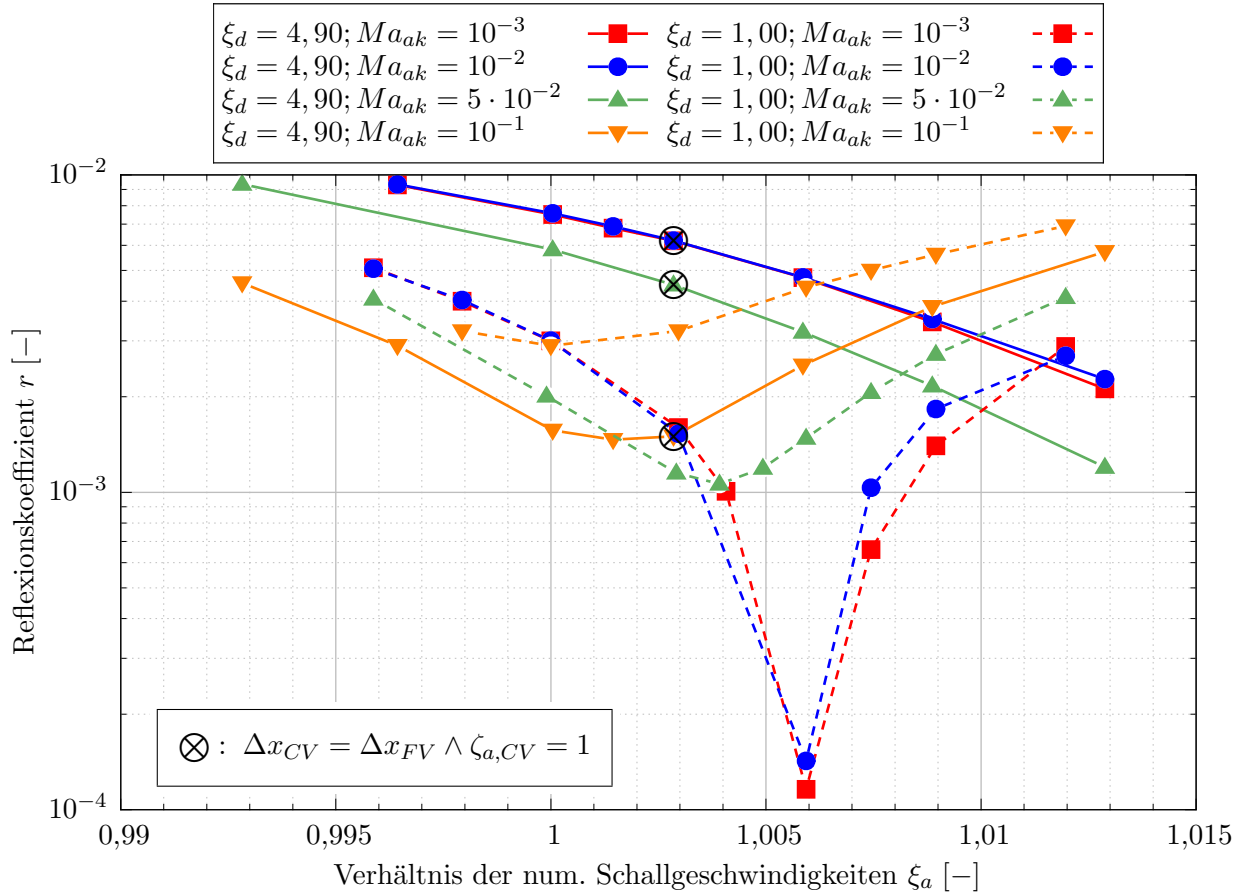


Abbildung 7.23.: Reflexionskoeffizienten akustisch vor der Kopplungsstelle bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\overline{Ma} = 0$ ,  $\Theta = 1$  und Variation der akustischen Machzahl.

ter für die maximale Reduktion der Reflexionen bei dieser akustischen Machzahl getroffen werden kann.

Die Ergebnisse bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-1}$  weichen zunehmend von den bekannten Verläufen bei kleineren akustischen Machzahlen ab. In diesem Fall liegen die Reflexionen bei unangepassten Domains sogar in dem gesamten untersuchten  $\xi_a$ -Intervall unterhalb derjenigen mit  $\xi_d = 1$ . Die Tatsache, dass die minimalen Reflexionen für  $\xi_d = 1$  auch bei nahezu  $\xi_a = 1$  auftreten, darf als Zufall gewertet werden. Offenbar können die Reflexionen durch Anpassung der numerischen Impedanzen, dessen Theorie basierend auf der Annahme linearer Zusammenhänge hergeleitet wurde, bei großen akustischen Machzahlen nicht reduziert werden.

Bei großen akustischen Machzahlen treten zum Einen zunehmend Höherharmonische durch Wellenaufteilung auf. Zum Anderen nehmen die nichtlineare Wechselwirkungen zwischen diesen Frequenzanteilen zu. In **Abb. 7.24** sind die Amplitudenverhältnisse der Grundschwingung und der ersten beiden Oberschwingungen der Referenzlösung an der Auswertestelle bezogen auf die Amplitude der Anregung  $\Lambda_p = \frac{\hat{p}}{\hat{p}(f_G, x=0)}$  bei unterschiedlichen akustischen Machzahlen über der normierten Frequenz  $\frac{f}{f_G}$  abgebildet. Bei den kleineren akustischen Machzahlen von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  bzw.  $Ma_{ak} = 10^{-2}$ ,

bei denen eine signifikante Reduktion von Reflexionen durch numerische Impedanzanpassung erzielt wird, treten lediglich moderate Oberschwingungen auf. Demgegenüber sind die auftretenden Oberschwingungen bei den größeren untersuchten akustischen Machzahlen, bei denen keine gezielte Reduktion der Reflexionen durch numerische Impedanzanpassung erreicht werden konnte, signifikant größer.

Es kann nicht zweifelsfrei geklärt werden, ob die großen akustischen Machzahlen selbst und die damit einhergehenden nichtlinearen Wechselwirkungen oder das Auftreten von signifikanten Oberschwingungen primär für die großen residualen Reflexionen bei angepassten numerischen Impedanzen verantwortlich ist. Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen werden im Folgenden in Abs. 7.7.4 tiefergehend untersucht. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass die akustische Machzahl ein limitierender Parameter für die entwickelte Kopplungsmethode ist. Bei zu großer akustischer Machzahl lassen sich die Reflexionen an der Kopplungsstelle durch Anpassung der numerischen Impedanzen nicht bzw. nicht signifikant reduzieren.

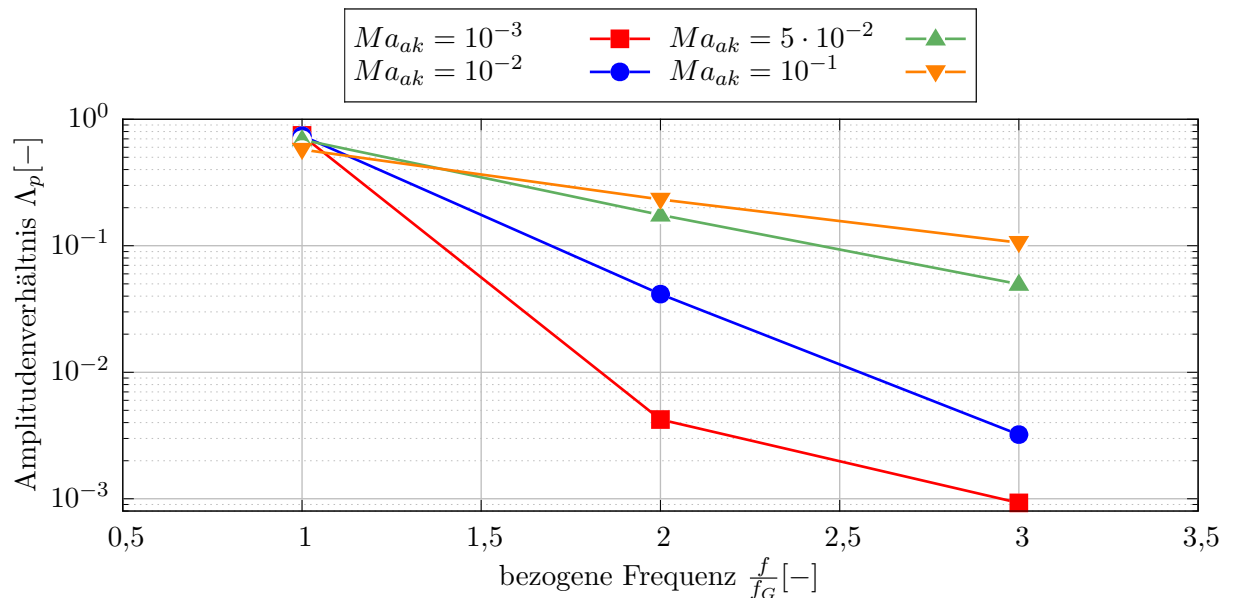


Abbildung 7.24.: Amplitudenverhältnisse vor der Kopplungsstelle bei  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\overline{Ma} = 0$ ,  $\Theta = 1$  und Variation der akustischen Machzahl.

### Einfluss von Gleichströmung

Im Folgenden wird der Einfluss von Gleichströmung auf das Reflexionsverhalten der Kopplungsstelle anhand einer Variation der Machzahl der Gleichströmung im Bereich von  $0 \leq \overline{Ma} \leq 10^{-1}$  analysiert. Wiederum wird das Modell *FV* zu *CV* und eine reine *FV*-Simulation als Referenz verwendet. Durch die Überlagerung der Gleichströmung ergeben sich neue Anpassungsparameter, vgl. Abs. 7.7.1. Diese sind in **Tab. 7.8** zusammengefasst. Es wird deutlich, dass sich der numerische Phasenwinkel  $\varphi_{num}$  und die CFL-Zahl mit der Machzahl der Gleichströmung ändern, vgl. Abs. 2.3. Für gleiche räumliche

$\overline{Ma}$	$\Delta x_{CV} [m]$	$\xi_d [-]$	$\xi_a (\zeta_{a,CV} = 1) [-]$	$\zeta_{a,CV} (\xi_a = 1) [-]$	$\varphi_{num,CV} [^\circ]$	$CFL_{CV} [-]$
$10^{-2}$	0,02	4,82	1,0028	0,9972	10,38	0,1734
	0,006895	1,0	1,0058	0,9942	3,58	0,5029
$10^{-1}$	0,02	4,34	1,0026	0,9974	9,53	0,1888
	0,007516	1,0	1,0050	0,9951	3,58	0,5025

Tabelle 7.8.: Anpassungsparameter und numerische Parameter der CV-Domain bei spektraler Anpassung mit  $\Delta x_{FV} = 0,02 m$ ,  $\Delta t = 10^{-5} s$  und Variation der Machzahl  $\overline{Ma}$ .

Auflösungen ( $\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV} = 0,02 m$ ) gilt in sehr guter Näherung  $\varphi_{num,FV} = \varphi_{num,CV}$  sowie  $CFL_{FV} = CFL_{CV}$ .

Die Ergebnisse sind in **Abb. 7.25** abgebildet. Die Reflexionen bei einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  zeigen die typischen, zuvor beobachteten Verläufe. Bei unangepassten numerischen Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 4,82$ ) existiert kein Minimum im untersuchten Bereich. Bei  $\xi_d = 1$  ist wiederum ein ausgeprägtes Minimum der Reflexionen ersichtlich, welches bei  $\xi_a \approx 1,0$  liegt. Dies entspricht einem Skalierungskoeffizienten der Schallgeschwindigkeit von  $\zeta_{a,CV} = 0,9941$ . In Abs. 7.5.3 wurde gezeigt, dass die numerische Schallgeschwindigkeit in der CV-Domain  $a_{num,CV}$  mit der Machzahl der Gleichströmung variiert.

Die Multiplikation von Gl. (7.59) mit  $a_{exakt}$  ergibt:

$$a_{num,CV,\overline{Ma}} = a_{num,CV} \cdot (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) \quad (7.80)$$

Vor dem Hintergrund der Erkenntnis, dass sich minimale Reflexionen ohne Gleichströmung bei Erfüllung der Bedingung  $\zeta_{a,CV} = 1$  erzielen lassen, erweitert sich diese Bedingung unter Berücksichtigung der Machzahlskalierung mit  $\zeta_{\overline{Ma}} = 0,6$  zu

$$\zeta_{a,CV} \cdot (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) = \zeta_{a,CV} \cdot (1 + 0,6 \overline{Ma}) = 1,0 \quad (7.81)$$

Der erforderliche Skalierungskoeffizient der Schallgeschwindigkeit ergibt sich bei einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  somit zu

$$\zeta_{a,CV} = \frac{1}{(1 + 0,6 \overline{Ma})} = \frac{1}{(1 + 0,6 \cdot 10^{-2})} = 0,99404, \quad (7.82)$$

was in guter Näherung dem Punkt minimaler Reflexionen bei  $\xi_a = 1$  und damit  $\zeta_{a,CV} = 0,9941$  entspricht. Dadurch bestätigt sich die in Abs. 7.5.3 getroffene und in Gl. (7.58) formulierte Annahme, dass sich die aus einer Grundströmung resultierende Änderung der numerischen Dispersion und damit der numerischen Schallgeschwindigkeit in der CV-Domain durch eine Skalierung mit der Machzahl der Gleichströmung und einem Koeffizienten von  $\zeta_{\overline{Ma}} = 0,6$  beschreiben lässt.

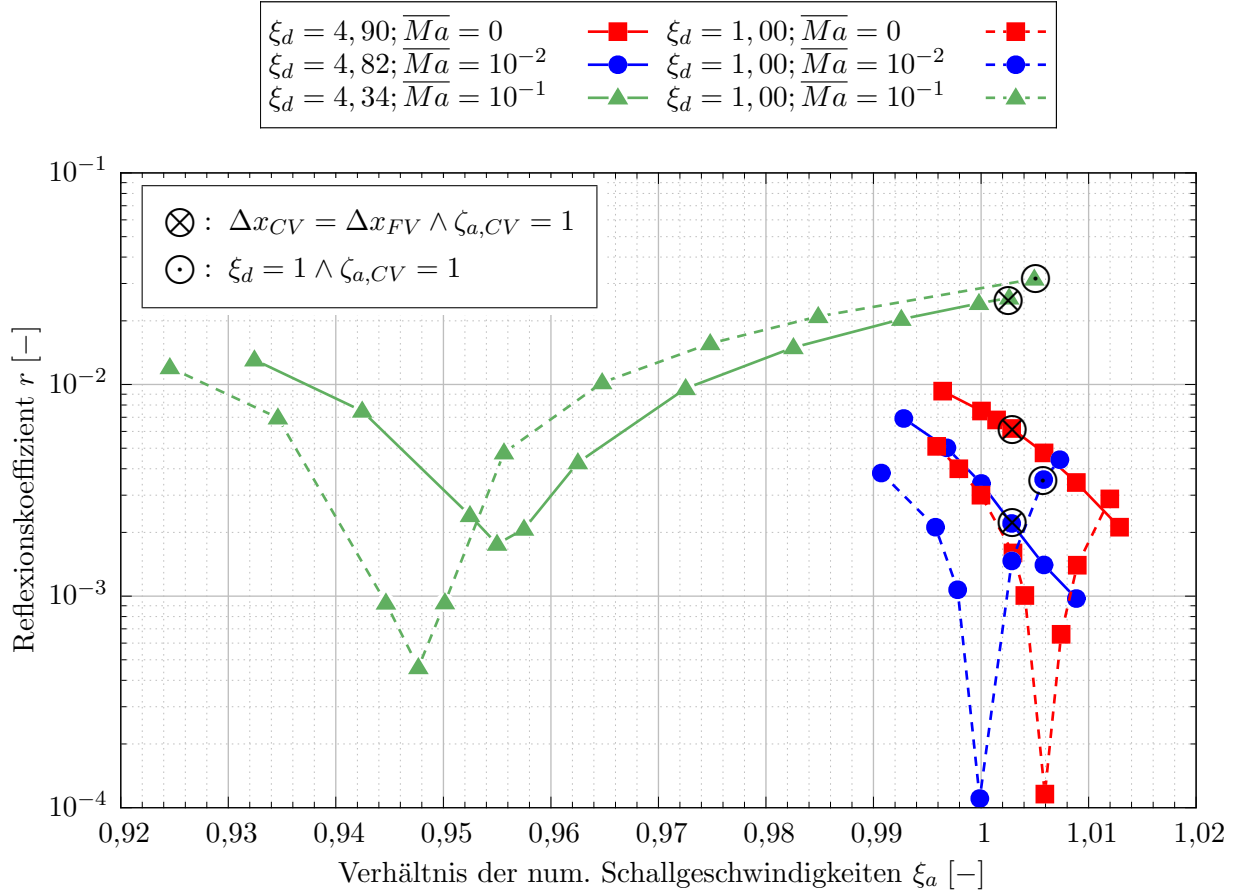


Abbildung 7.25.: Reflexionskoeffizienten vor der Kopplungsstelle bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\Theta = 1$  und Variation der Machzahl der Gleichströmung.

Dies bestätigt sich auch durch die Ergebnisse bei einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 10^{-1}$ . Das Minimum der Reflexionen für  $\xi_d = 1$  liegt bei  $\xi_a = 0,9477$ . Dies entspricht  $\zeta_{a,CV} = 0,9430$ . Der erforderliche Skalierungskoeffizient der Machzahl zur Erfüllung von Gl. (7.81) ergibt sich zu

$$\zeta_{a,CV} = \frac{1}{(1 + 0,6 \cdot 10^{-1})} = 0,9434. \quad (7.83)$$

Dies entspricht wiederum dem Punkt minimaler Reflexionen in Abb. 7.25.

Es lässt sich somit feststellen, dass sich für die untersuchten Machzahlen der Gleichströmung die Reflexionen durch Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten und Berücksichtigung der Skalierung der Dispersion mit der Machzahl gegenüber unangepassten Domains ( $\otimes$ ) um mehr als eine Größenordnung reduzieren lassen. Mit zunehmender Machzahl der Gleichströmung nehmen die Reflexionen trotz Einhaltung der Kriterien

$$\xi_d \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.84)$$

$$\zeta_{a,CV} \cdot (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) \stackrel{!}{=} 1 \quad (7.85)$$

jedoch leicht zu.

Die Bedeutung der Berücksichtigung der Machzahl-Skalierung der numerischen Dispersion in der CV-Domain wird noch einmal besonders deutlich bei einer Betrachtung der auftretenden Reflexionen bei Anpassung der Domains ohne Berücksichtigung der Machzahl ( $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$ ), welche in Abb. 7.25 mit  $\odot$  gekennzeichnet sind. Die Reflexionen nehmen sowohl für  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  als auch für  $\overline{Ma} = 10^{-1}$  gegenüber denjenigen mit unangepassten Domains noch zu. Die Berücksichtigung der Gleichströmung und einer daraus resultierenden Skalierung der Dispersion erweist sich somit als wichtig für die Reduktion von Reflexionen an der entwickelten Kopplungsstelle.

Gleichzeitig erweist sich die Machzahl der Gleichströmung als begrenzender Parameter der Reflexionsreduktion durch numerische Impedanzanpassung bei Systemen mit Reflexionen und damit hin- und rücklaufenden Wellen. Im Fall von nennenswerter Gleichströmung weisen die hin- und rücklaufenden Wellen unterschiedliche Parameter wie  $k$ ,  $\varphi_{num}$  und  $CFL$  auf, so dass die gekoppelten Schemata nur an die Wellen einer Laufrichtung angepasst werden können. Als Kompromiss können bei Systemen mit Reflexionen die Domains unter Vernachlässigung der Gleichströmung angepasst werden. Dabei sind jedoch im Fall hin- und rücklaufender Wellen stets leichte Reflexionen zu erwarten.

### 7.7.3. Anpassung der numerischen Impedanz bei Anregung mit Oberschwingungen

Wie zuvor gezeigt, kann eine (theoretisch) exakte Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften zweier numerischer Schemata nur für eine definierte Frequenz erfolgen. Eine exakte spektrale Anpassung an mehrere diskrete Frequenzen oder gar ein kontinuierliches Frequenzband erfordert identische Funktionale von Dispersions- und Diffusionsfehler und ist daher nur mit identischen Schemata realisierbar. Da in praktischen Anwendungen technischer Systeme häufig mehrere Frequenzen auftreten, muss die spektrale Anpassung als bestmöglicher Kompromiss zur Minimierung der Reflexionen bei den relevanten auftretenden Frequenzen umgesetzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die spektrale Kopplung zur Simulation der Pulsationen an Fluidenergiemaschinen entwickelt. Diese sind gekennzeichnet durch eine Grundharmonische und eine Reihe von Höherharmonischen und damit durch ein tonal geprägtes Spektrum.

Für den Fall  $FV$  zu  $CV$  und ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) werden zwei Ansätze zur spektralen Anpassung bei multifrequenter Anregung untersucht: Die erste Option ist eine Variation derjenigen Frequenz, an die die spektralen Parameter ideal angepasst werden. Diese liegt sinnvollerweise innerhalb des Frequenzbandes zwischen der Grundfrequenz  $f_G$  und der höchsten Oberschwingung. Die zweite Option besteht in der Variation des zeitlichen Integrationskoeffizienten  $\Theta$ . Dadurch werden die Verläufe von Dispersions- und insbesondere Diffusionsfehler des FV-Schemas modifiziert<sup>1</sup> (vgl. Gl. (7.50-7.51)) und lassen sich potentiell an die Verläufe des CV-Schemas angleichen. Die Variation von  $\Theta$  ist aus praktischer Hinsicht tendentiell ungünstig, da mit diesem Parameter üblicherweise der für ein

<sup>1</sup>Die Diffusions- und Dispersionsfehler des FV-Schemas bei Variation des Gewichtungsfaktors der zeitlichen Integration  $\Theta$  sind in Anhang A.4 dargestellt.

gegebenes Problem geeignete Kompromiss aus Genauigkeit ( $\Theta \downarrow$ ) und Stabilität ( $\Theta \uparrow$ ) eingestellt wird, wobei übliche Werte zwischen  $0,55 \leq \Theta \leq 0,6$  liegen [Sch13, Ope17]. Hinsichtlich der Eignung zur spektralen Anpassung bei mehrfrequenter Anregung wird der Ansatz dennoch zunächst untersucht. Aufgrund der Erkenntnisse aus Abs. 7.7.2 hinsichtlich der Anpassung der numerischen Dispersion wird im Folgenden bei den Untersuchungen zu Anregung mit Oberschwingungen sowohl der Fall  $\xi_a = 1$  als auch der Fall  $\zeta_{a,CV} = 1$  (da  $\overline{Ma} = 0$ ) betrachtet.

Zur Analyse der oben beschriebenen Ansätze wird deren Einfluss auf die Kopplungsparameter  $\xi_d$  sowie  $\xi_a$  anhand exemplarischer numerischer Parameter bei einer Anregungsgrundfrequenz von  $f_G = 500 \text{ Hz}$  untersucht. Mit den numerischen Vorgabeparametern von  $\Delta x_{FV} = 0,01 \text{ m}$  und  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  ergibt sich ein numerischer Phasenwinkel der Grundfrequenz von  $\varphi_{num,FV,G} = 5,24^\circ$  und eine CFL-Zahl in der FV-Domain von  $CFL_{FV} = 0,172$ . Durch diese Parameterkombination sind somit Frequenzanteile mit dem numerischen Phasenwinkel der vorherigen Untersuchungen von  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  sowie mit einem kleineren und einem größeren Phasenwinkel enthalten.

Spektren der Pulsationsanregung von Fluidenergiemaschinen beinhalten typischerweise etwa zwei signifikante Oberschwingungen [LB13, Gü13]. Daher wird nun exemplarisch eine Anregung bestehend aus der Grundharmonischen von  $f_G = 500 \text{ Hz}$  sowie zwei Oberschwingungen mit  $f_1 = 1000 \text{ Hz}$  bzw.  $f_2 = 1500 \text{ Hz}$  betrachtet. Für die beiden Oberschwingungen ergeben sich bei den oben genannten Parametern numerische Phasenwinkel von  $\varphi_{num,FV,1} = 10,49^\circ$  sowie  $\varphi_{num,FV,2} = 15,72^\circ$ . Die numerischen Parameter der CV-Domain werden durch separate Anpassung der Domains an  $f_G$ ,  $f_1$  sowie  $f_2$  bei  $\Theta = 0,6$  ermittelt. Weiterhin werden die numerischen Parameter bei Anpassung an die Grundfrequenz  $f_G$  mit  $\Theta = 0,8$  sowie  $\Theta = 1$  bestimmt. Das Vorgehen entspricht dabei dem in Abs. 7.7.1 beschriebenen. Die resultierenden numerischen Parameter in der CV-Domain sind in **Tab. 7.9** jeweils für  $\xi_d = 1$  aufgeführt.

	$\Delta x_{CV} [m]$	$\zeta_{a,CV}(\xi_a = 1) [-]$	$\xi_a(\zeta_{a,CV} = 1)$	$\varphi_{num,CV,G} [^\circ]$	$CFL_{CV} [-]$
$\Theta = 0,6; f_G$	0.002059	0.9986	1.001426031	1,0795	0,8337
$\Theta = 0,6; f_1$	0.002056	0.9943	1.00572155	1,0779	0,8349
$\Theta = 0,6; f_2$	0.002051	0.9872	1.01293313	1,0754	0,8369
$\Theta = 0,8; f_G$	0.002744	0.9986	1.001449097	1,4384	0,6257
$\Theta = 1,0; f_G$	0.003428	0.9985	1.001479185	1,7973	0,5008

Tabelle 7.9.: Numerische Parameter der CV-Domain bei spektraler Anpassung (jeweils für  $\xi_d = 1$ ) mit  $\varphi_{num,FV,G} = 5,24^\circ$ ,  $\varphi_{num,FV,1} = 10,48^\circ$  sowie  $\varphi_{num,FV,2} = 15,72^\circ$ ,  $CFL_{FV} = 0,172$  und variabler Zeitintegration.

Eine Betrachtung der räumlichen Diskretisierungen bei  $\Theta = 0,6$  macht deutlich, dass diese sich nur minimal unterscheiden, eine Anpassung an die niedrigste oder die höchste relevante Frequenz in dem betrachteten Frequenzband somit nur zu unwesentlich voneinander abweichenden numerischen Parametern führt. Bei der Variation von  $\Theta$  ist eine größere Änderung der erforderlichen räumlichen Diskre-



tisierung erkennbar. Die Ursache dafür ist die abnehmende numerische Diffusion in der FV-Domain bei ebenfalls abnehmendem  $\Theta$ .

Demgegenüber wird anhand einer Betrachtung der räumlichen Diskretisierungsschritte bei Variation des zeitlichen Integrationskoeffizienten  $\Theta$  die zunehmende Divergenz der Diffusionsfehler des CV- und FV-Schemas bei abnehmendem  $\Theta$  deutlich.

Die Verläufe der Anpassungsparameter  $\xi_a$  bzw.  $\xi_d$  sind für die zuvor erläuterten Ansätze und damit die in Tab. 7.9 aufgeführten Parameter in **Abb. 7.26** über der normierten Frequenz  $\frac{f}{f_G}$  dargestellt. Dazu wird das Funktional für die numerische Dämpfungskonstante Gl. (7.25) unter Verwendung von Gl. (7.50) sowie das Funktional des Dispersionsfehlers Gl. (7.51) mit den (konstanten) numerischen Parametern der FV-Domain entlang der Abszisse mit dem Faktor  $\frac{1}{\varphi_{num,FV,G}}$  skaliert. Anschließend werden die Funktionale Gl. (7.25) mit Gl. (7.42) sowie Gl. (7.51) unter Verwendung der zuvor bestimmten spektral angepassten Parametern in Tab. 7.9 mit dem jeweils resultierenden numerischen Phasenwinkel der Grundharmonischen  $\varphi_{num,CV,G}$  ebenfalls entlang der Abszisse skaliert. Durch Quotientenbildung ergeben sich schließlich die dargestellten Verläufe der Anpassungsparameter  $\xi_d$  und  $\xi_a$  als Funktional des normierten numerischen Phasenwinkels und damit über den gesamten betrachteten Frequenzbereich. Dabei verlaufen prinzipgemäß die Anpassungsparameter bei Anpassung an die Grundfrequenz  $f_G$  durch den Punkt(1|1), bei Anpassung an die erste Oberschwingung  $f_1$  durch den Punkt(2|1) und bei Anpassung an die zweite Oberschwingung  $f_2$  durch den Punkt(3|1).

Zunächst wird deutlich, dass sich beide Anpassungsparameter in dem betrachteten Frequenzintervall in einem Wertebereich nahe eins bewegen, wobei die Variation des Verhältnisses der numerischen Schallgeschwindigkeiten  $\xi_a$  geringer ist als diejenige des Verhältnisses der numerischen Dämpfungskonstanten  $\xi_d$ . Die Intervalle der resultierenden Anpassungsparameter sind nahezu gleich, unabhängig von der angepassten Frequenz ( $f_G$ ,  $f_1$  oder  $f_2$ ). Die geringsten Abweichungen beider Anpassungsparameter vom erwünschten Wert eins treten jedoch erwartungsgemäß bei Anpassung an die mittlere der auftretenden Frequenzen auf. Bei Anpassung an die niedrigste Frequenz  $f_G$  ergibt sich eine relativ starke Abweichung der Anpassungsparameter von eins für die höchste auftretende Frequenz, so dass in diesem Fall bei den hohen Frequenzen starke Reflexionen zu erwarten sind. Demgegenüber weichen die Kopplungsparameter bei Anpassung an die höchste Frequenz im niederfrequenten Bereich stark von eins ab, was in diesem Frequenzbereich wiederum erhöhte Reflexionen erwarten lässt.

Die Intervalle der auftretenden Anpassungsparameter bei der hier dargestellten exemplarischen Grenze des betrachteten Frequenzbandes in Höhe der dreifachen Grundfrequenz lassen - basierend auf den Ergebnissen bei monofrequenter Anregung - für sämtliche auftretenden Frequenzanteile geringe Reflexionen erwarten. Die auftretenden Abweichungen der Anpassungsparameter hängen jedoch neben dem betrachteten Frequenzintervall von numerischen ( $\Delta x$  sowie  $\Delta t$ ) und physikalischen Parametern ( $f_G$ ) ab, so dass allgemeingültige quantitative Aussagen nicht getroffen werden können. Um jedoch einen Eindruck von auftretenden Größenordnungen der Anpassungsparameter über einen größeren Frequenzbereich zu vermitteln, sind in Anhang A.5 die Verläufe derselben bis zu der zehnfachen Frequenz der Grundharmonischen abgebildet.

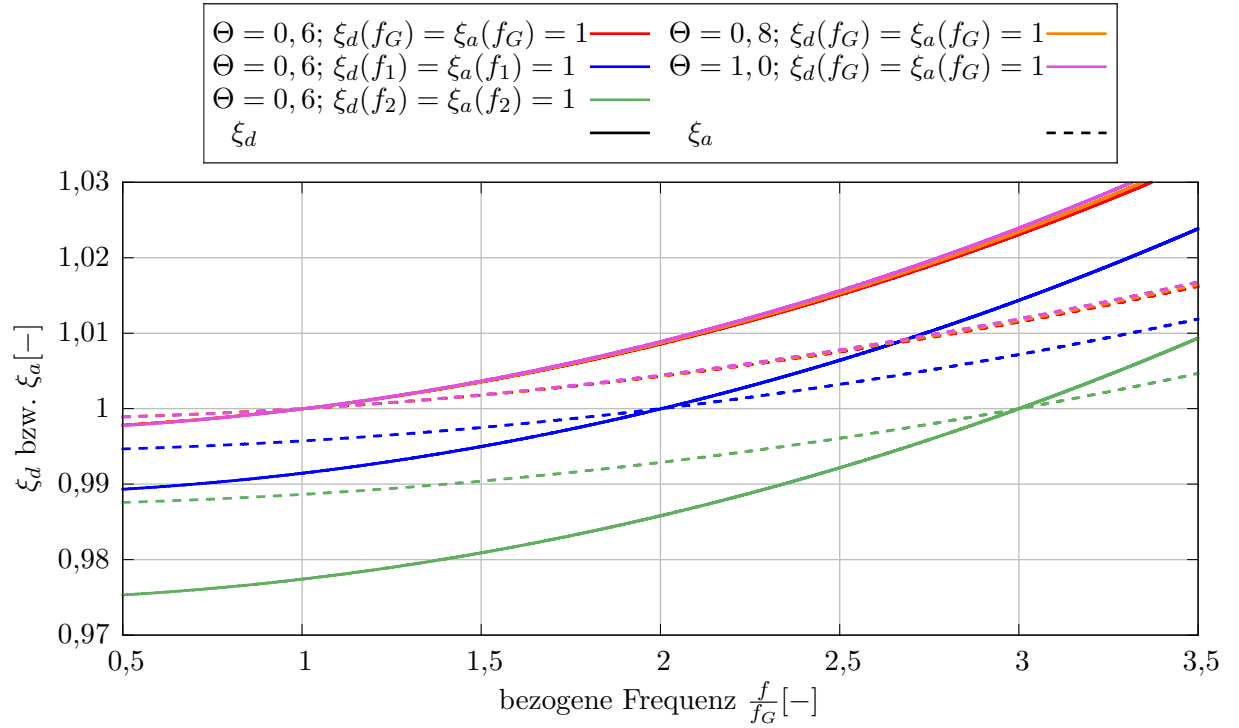


Abbildung 7.26.: Anpassungsparameter für das FV-Schema bei Variation von  $\Theta$  und das CV-Schema angepasst an die Grundfrequenz ( $f_G$ ), die erste ( $f_1$ ) bzw. zweite ( $f_2$ ) Harmonische bei  $f_G = 500 \text{ Hz}$  ( $\varphi_{num,FV,G} = 5,24^\circ$ ).

Ein weiterer Aspekt, der aus den Verläufen in Abb. 7.26 hervorgeht, ist die Tatsache, dass sich durch eine Variation des numerischen Integrationskoeffizienten  $\Theta$  keine nennenswerte Veränderung der Anpassungsparameter erreichen lässt. Der Grund dafür liegt im Verlauf des spektralen Fehlers des FV-Schemas über dem numerischen Phasenwinkel, der sich bei Variation von  $\Theta$  nur leicht ändert. Anhand der bisherigen Betrachtungen erscheint damit eine geeignete Wahl der anzupassenden Frequenz innerhalb des relevanten Frequenzintervalls als sinnvoller Ansatz zur spektralen Anpassung bei gekoppelten Simulationen mit multifrequenter Anregung. Die Ergebnisse der Simulationen mit den oben vorgestellten Parametervariationen werden im Folgenden erläutert.

#### 7.7.4. Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen

Für die Untersuchungen von Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen werden wiederum Simulationen mit einem eindimensionalen, generischen Modell - entsprechend dem Modell *FV zu CV* bei monofrequenter Anregung in Abs. 7.7.2 - durchgeführt. In diesem Fall wird die in Abs. 7.7.3 vorgestellte Anregung mit zwei Oberschwingungen als Eintrittsrandbedingung der FV-Domain aufgebracht und diese mit den zuvor entwickelten Parameterkombinationen in der gekoppelten CV-Domain nach Tab. 7.9 gelöst, wobei die akustische Machzahl der drei phasengleich überlagerten Frequenzanteile  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  beträgt. Zudem wird eine Referenzlösung mit Hilfe einer reinen FV-Domain erstellt.

Die Ergebnisse für  $\Theta = 1$  sind in **Abb. 7.27** über der bezogenen Frequenz  $\frac{f}{f_G}$  abgebildet. Enthalten sind die Reflexionskoeffizienten für unangepasste Domains mit identischen numerischen Parametern ( $\Delta x_{CV} = \Delta x_{FV}$ ;  $\zeta_{a,CV} = 1$ ), an die Frequenz  $f_n$  angepasste Domains nach der Theorie der numerischen Impedanzanpassung ( $\xi_d(f_n) = \xi_a(f_n) = 1$ ) sowie für angepasste numerische Dämpfungskonstanten ohne Manipulation der numerischen Schallgeschwindigkeit ( $\xi_d = 1$ ;  $\zeta_{a,CV} = 1$ ). Für die letzte Parameterkombination wurden in den vorhergehenden Untersuchungen mit monofrequenter Anregung die geringsten Reflexionen an der Kopplungsstelle erzielt.

Bei unangepassten Domains nehmen die Reflexionen mit zunehmendem numerischen Phasenwinkel ebenfalls zu. Durch Anpassung der Domains mit  $\xi_d = \xi_a = 1$  werden nahezu gleiche Reflexionen bei jeder Frequenzkomponente realisiert. Die niedrigsten Reflexionen treten dabei bei Anpassung an die Grundfrequenz  $f_G$  auf. Bei Anpassung an die erste Oberschwingung  $f_1$  bzw. die zweite Oberschwingung  $f_2$  nehmen die Reflexionen bei allen drei numerischen Phasenwinkeln signifikant zu, wobei für angepassten Domains die Reflexionen bei der entsprechenden Frequenz stets niedriger sind als für unangepasste Domains.

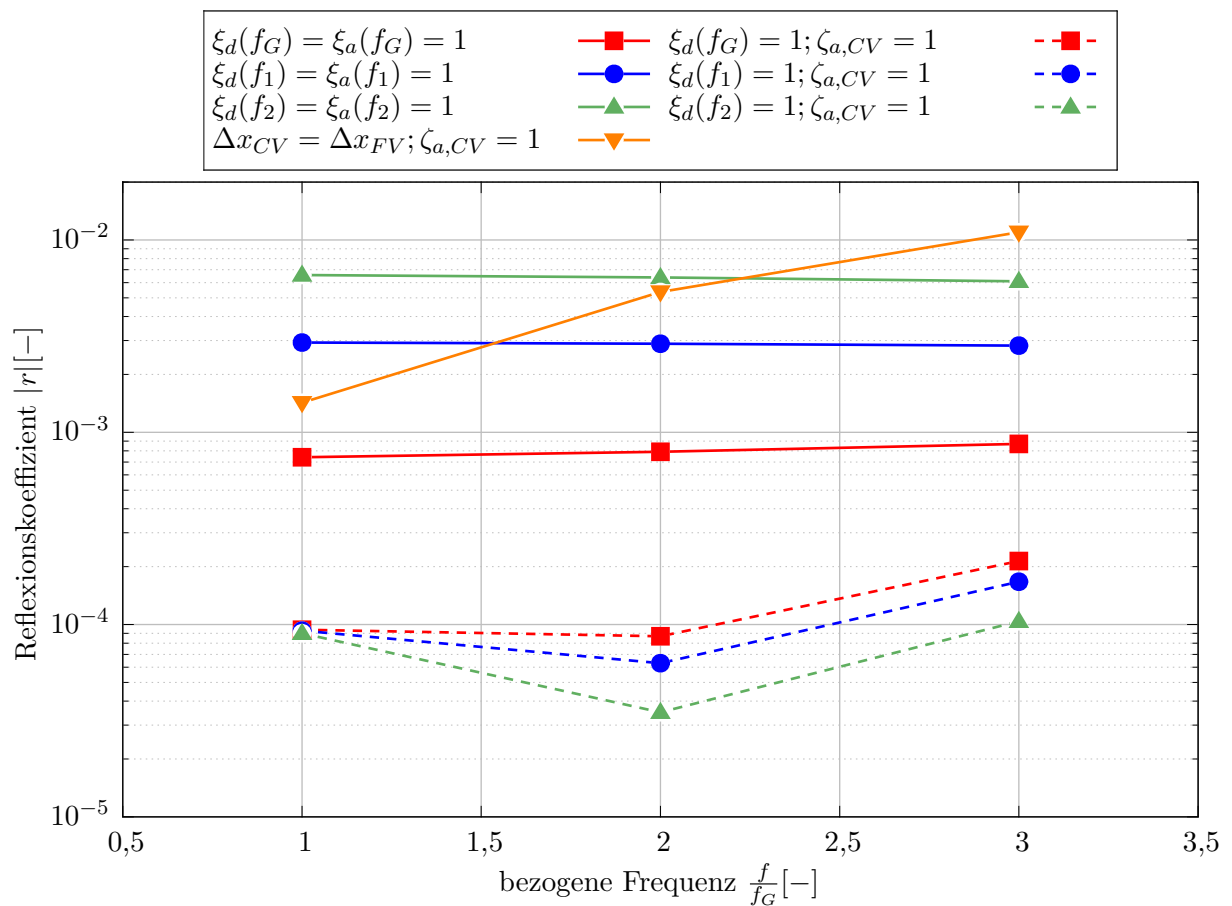


Abbildung 7.27.: Reflexionskoeffizienten vor der Kopplungsstelle bei Anregung mit Oberschwingungen von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 5, 25/10, 49/15, 75^\circ$  und  $\Theta = 1$ .

Bei Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$ ) ergeben sich erheblich reduzierte Reflexionen bei allen Frequenzkomponenten. Für die Grundfrequenz unterscheiden sich die Reflexionen nicht signifikant in Abhängigkeit der angepassten Frequenz. Bei den Oberschwingungen werden leicht erhöhte Abweichungen in Abhängigkeit der angepassten Frequenz sichtbar, wobei die Reflexionskoeffizienten stets in einer Größenordnung liegen. Bei Anpassung an die zweite Oberschwingung ergeben sich leicht geringere Reflexionen als bei Anpassung an die erste Oberschwingung oder die Grundfrequenz. Auch bei Anregung mit Oberschwingungen erweist sich somit die Anpassung der numerischen Dämpfungskonstante und  $\zeta_{a,CV}$  als die Parameterkombination mit den geringsten Reflexionen an der Kopplungsstelle.

In **Abb. 7.28** sind die Reflexionen bei Anregung mit Oberschwingungen und  $\Theta = 0,8$  bzw.  $\Theta = 0,6$  abgebildet. Im Fall unangepasster Domains und für  $\xi_d = \xi_a = 1$  zeigen sich keine signifikanten Abweichungen zu den Ergebnissen für  $\Theta = 1$ . Die Reflexionen für  $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$  zeigen jedoch einen deutlichen Einfluss des zeitlichen Integrationskoeffizienten. Mit zunehmendem  $\Theta$  gleichen sich die Reflexionskoeffizienten der für die unterschiedlichen Frequenzen angepassten numerischen Dämpfungskonstanten aneinander an. Bei  $\Theta = 0,8$  liegen diese bereits sehr dicht beieinander, während sich die Reflexionen bei  $\Theta = 0,6$  praktisch nicht mehr unterscheiden. Zudem nehmen die Reflexionen bei angepassten numerischen Dämpfungskonstanten für  $\Theta = 0,8$  gegenüber denjenigen bei  $\Theta = 1$  leicht zu und für  $\Theta = 0,6$  tendenziell wieder leicht ab. Insgesamt ist festzuhalten, dass die Reflexionskoeffizienten stets in der Größenordnung von  $10^{-4}$  liegen.

Die Ursache für die zunehmende Konvergenz der Reflexionskoeffizienten für unterschiedliche angepasste Frequenzen mit abnehmendem  $\Theta$  liegt vermutlich in den unterschiedlichen spektralen Zusammensetzungen der Welle an der Kopplungsstelle bei unterschiedlichen zeitlichen Integrationskoeffizienten. Mit abnehmendem  $\Theta$  nimmt auch die numerische Diffusion des FV-Schemas ab, vgl. **Abb. A.5**. Die Spektren der Referenzlösung an der Auswertestelle sind für die drei angeregten Frequenzkomponenten in Form des Amplitudenverhältnisses  $\Lambda_p$  in **Abb. 7.29** dargestellt.

Es zeigen sich sehr unterschiedliche Amplituden der Frequenzanteile für das diffusivste Schema mit  $\Theta = 1$  mit abnehmender Amplitude bei zunehmender Frequenz. Mit abnehmendem  $\Theta$  gleichen sich die Amplituden der einzelnen Frequenzanteile an und für  $\Theta = 0,6$  sind sämtliche Amplituden nahezu gleich. Es ist zu vermuten, dass aus dieser Angleichung der Amplituden die Konvergenz der Reflexionskoeffizienten mit abnehmendem  $\Theta$  resultiert. Frequenzanteile mit nahezu gleichen Amplituden werden auch nahezu gleich stark reflektiert, wie bei den Ergebnissen für  $\Theta = 0,6$  in **Abb. 7.28** (unten) deutlich wird.

Möglicherweise ist auch der zunehmend flache Verlauf des Diffusionsfehlers des FV-Schemas mit abnehmendem  $\Theta$  die Ursache für die Konvergenz der Reflexionskoeffizienten, vgl. **Abb. A.5**. Aufgrund der geringen Steigung für  $\Theta = 0,6$  im relevanten Bereich der numerischen Phasenwinkel ergeben sich somit nahezu gleiche Anpassungsparameter für die Anpassung an die Grundfrequenz oder eine der Oberschwingungen. Dies wurde bereits in **Tab. 7.9** deutlich und ist eine mögliche Erklärung dafür, dass

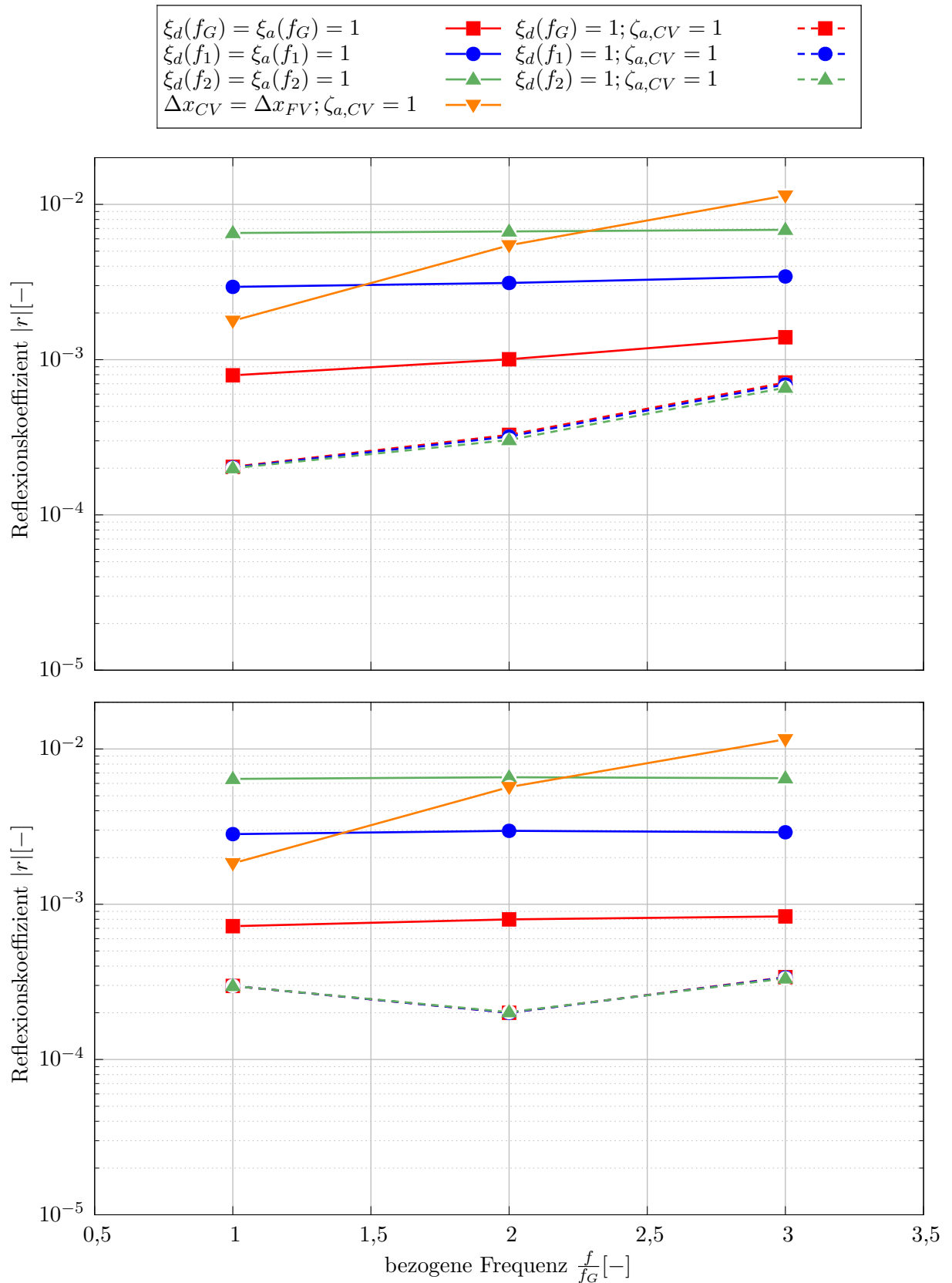


Abbildung 7.28.: Reflexionskoeffizienten vor der Kopplungsstelle bei Anregung mit Oberschwingungen von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 5, 25/10, 49/15, 75^\circ$  und  $\Theta = 0,8$  (oben) bzw.  $\Theta = 0,6$  (unten).

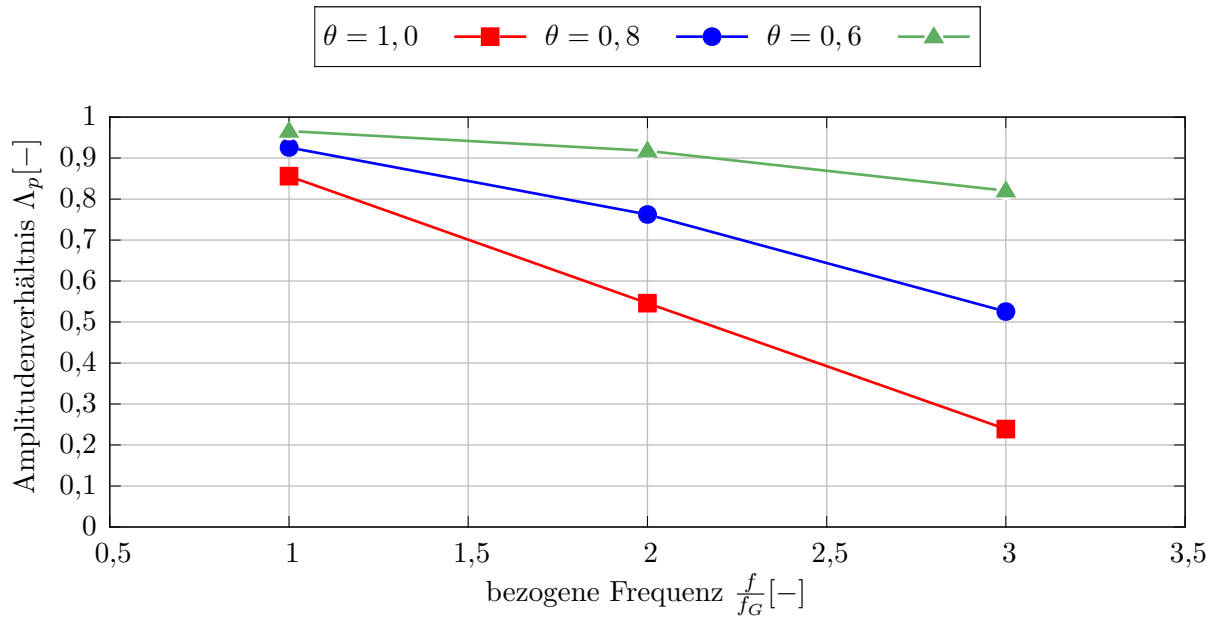


Abbildung 7.29.: Amplitudenverhältnisse an der Auswertestelle bei Anregung mit Oberschwingung für  $f_G = 500 \text{ Hz}$ ,  $\Delta x_{FV} = 0,01 \text{ m}$  und  $CFL_{FV} = 0,172$ .

sich bei  $\Theta = 0,6$  unabhängig von der angepassten Frequenz praktisch gleiche Reflexionskoeffizienten ergeben.

Auch bei Anregung mit Oberschwingungen zeigt sich, dass minimale Reflexionen an der Kopplungsstelle mit angepassten numerischen Dämpfungskonstanten und unveränderter Schallgeschwindigkeit ( $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$ ) auftreten. Im Fall stark unterschiedlicher Amplituden der Frequenzanteile bietet es sich an, die numerischen Dämpfungskonstanten an die Frequenz mit der dominanten Amplitude anzupassen. Üblicherweise sind die Amplitudenverhältnisse im Voraus jedoch nicht bekannt. Bei ähnlich großen Amplituden ist es unerheblich, an welche der auftretenden Frequenz die Domains angepasst werden.

Die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurden stets mit diskreten Frequenzen und damit tonal geprägten Spektren durchgeführt. Die Verläufe der Verhältnisse der numerischen Dämpfungskonstanten  $\xi_d$  in Abb. 7.26 sowie die zuvor angeführten Ergebnisse lassen jedoch die Annahme zu, dass die Kopplungsmethode auch für breitbandige Anregung mit vergleichbaren Frequenzbändern wie den hier untersuchten anwendbar ist.

## 7.8. Multidimensionale Kopplung

In den bisherigen Betrachtungen wurden stets eindimensionale, reibungsfreie Domains untersucht. Ziel der Kopplungsmethode ist es jedoch, die Reflexionen an der Kopplungsstelle einer eindimensionalen CV-Domain und einer dreidimensionalen FV-Domain zu minimieren. Zwei Aspekte sind bei einer 3D-Domain im Gegensatz zu einer 1D-Domain zu berücksichtigen: Zum einen wird in einer 3D-Domain der

Spannungstensor in der Impulserhaltung berücksichtigt, so dass die Rohrreibung und die damit einhergehende physikalische Dämpfung ebenfalls erfasst wird. Zwar existiert auch bei eindimensionaler Wellenausbreitung viskose Dämpfung durch die Kompression und die damit einhergehende innere Reibung des Fluids, diese ist jedoch vernachlässigbar klein im Vergleich zu der viskosen Dämpfung durch Scherspannungen aufgrund von begrenzenden Wänden und der daraus resultierenden Grenzschicht [Šut84]. Zum anderen muss ein sich in einer 3D-Domain ausbildendes Geschwindigkeitsprofil über dem Rohrquerschnitt berücksichtigt werden. Wie bereits in Abs. 7.1 diskutiert, ist die Strömungsgeschwindigkeit die einzige Größe, die bei quasi-eindimensionaler Strömung und ebener Wellenausbreitung nicht konstant über dem Querschnitt ist.

### 7.8.1. Effektive Dämpfungskonstante

Bei der numerischen Simulation einer pulsierenden Rohrströmung treten - unter der Voraussetzung, dass die Haftbedingung an den Rohrwänden gefordert oder Wandreibung durch einen Modellterm berücksichtigt wird - zwei Arten von Dämpfung auf. Durch die Diskretisierung entsteht die zuvor ausgiebig analysierte numerische Dämpfung, charakterisiert durch den numerischen Dämpfungskoeffizienten  $\alpha_{num}$ . Zusätzlich wird aber nun auch die physikalische Dämpfung, charakterisiert durch den Dämpfungskoeffizienten der analytischen Modellgleichungen  $\alpha_{exakt}$ , welcher bei einem idealen analytischen Modell dem physikalischen Dämpfungskoeffizienten  $\alpha_{phys}$  entspricht, erfasst. Aus der Summe beider Anteile ergibt sich die effektive Dämpfungskonstante  $\alpha_{eff}$ , die bei reibungsbehafteter Simulation die relevante Größe für die spektrale Anpassung der Domains ist, vgl. Abs. 7.2.3. Die effektive Dämpfungskonstante wird im Folgenden sowohl für die 1DCV-Domain als auch für die 3DFV-Domain untersucht.

#### Effektive Dämpfung in der 1DCV-Domain

In der 1DCV-Domain wird physikalische Dämpfung durch den Modellterm  $f_x$  nach Gl. (5.1) berücksichtigt. Diese Formulierung beschreibt die Reibung des stationären Anteils der Strömung. Ein instationärer Verlustterm wird in dem CV-Schema nicht verwendet. Die spektrale Anpassung an die gegebenen effektiven Dämpfungseigenschaften einer zu koppelnden FV-Domain wird durch die numerischen Parameter vorgenommen. Im Folgenden wird zunächst untersucht, ob der vorhandene Verlustterm nach Gl. (5.1) einen nennenswerten Einfluss auf die Dämpfung akustischer Wellen in der CV-Domain hat. In diesem Kontext wird auch ein potentieller Einfluss auf die numerische Dispersion untersucht.

Dazu wird - wie zuvor in Abs. 7.5.1 erläutert - die Diffusion und Dispersion bei Variation des numerischen Phasenwinkels mit numerischen Experimenten bestimmt, wobei in diesem Fall der Reibungsterm  $f_x$  berücksichtigt wird. Die CFL-Zahl beträgt  $CFL = 0,172$  und die akustische Machzahl beträgt  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ . In der verwendeten Definition von  $f_x$  ist (zur Bestimmung der Rohrreibungszahl  $\lambda$ ) die Reynoldszahl  $Re$  ein relevanter Parameter. Die im Weiteren durchgeführten Si-

mulationen basieren durchweg auf dem Berechnungsansatz nach Blasius für die Rohrreibungszahl  $\lambda$ . Zusätzlich tritt die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  in Gl. (5.1) explizit auf. Aus diesem Grund wird sowohl  $Re$  als auch die Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  variiert. Dabei wird  $\overline{Ma}$  mithilfe der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{c}$  und  $Re$  anhand des Rohrleitungsdurchmessers  $D_{RL}$  festgelegt. Der mittlere Druck und die mittlere Temperatur betragen - wie in Abs. 7.5 - stets  $\bar{p} = 10^5 \text{ Pa}$  sowie  $\bar{T} = 293,15 \text{ K}$ . Die resultierenden numerisch-experimentell bestimmten Diffusions- bzw. Dispersionsbeiwerte  $\epsilon_{d,exp}$  bzw.  $\epsilon_{\phi,exp}$  sind in **Abb. 7.30** dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der reibungsfreien Simulationen aus Abs. 7.5 sowie die Lösungen der analytischen Funktionale der spektralen Fehler nach Gl. (7.42-7.43) bzw. Gl. (7.59) ebenfalls abgebildet.

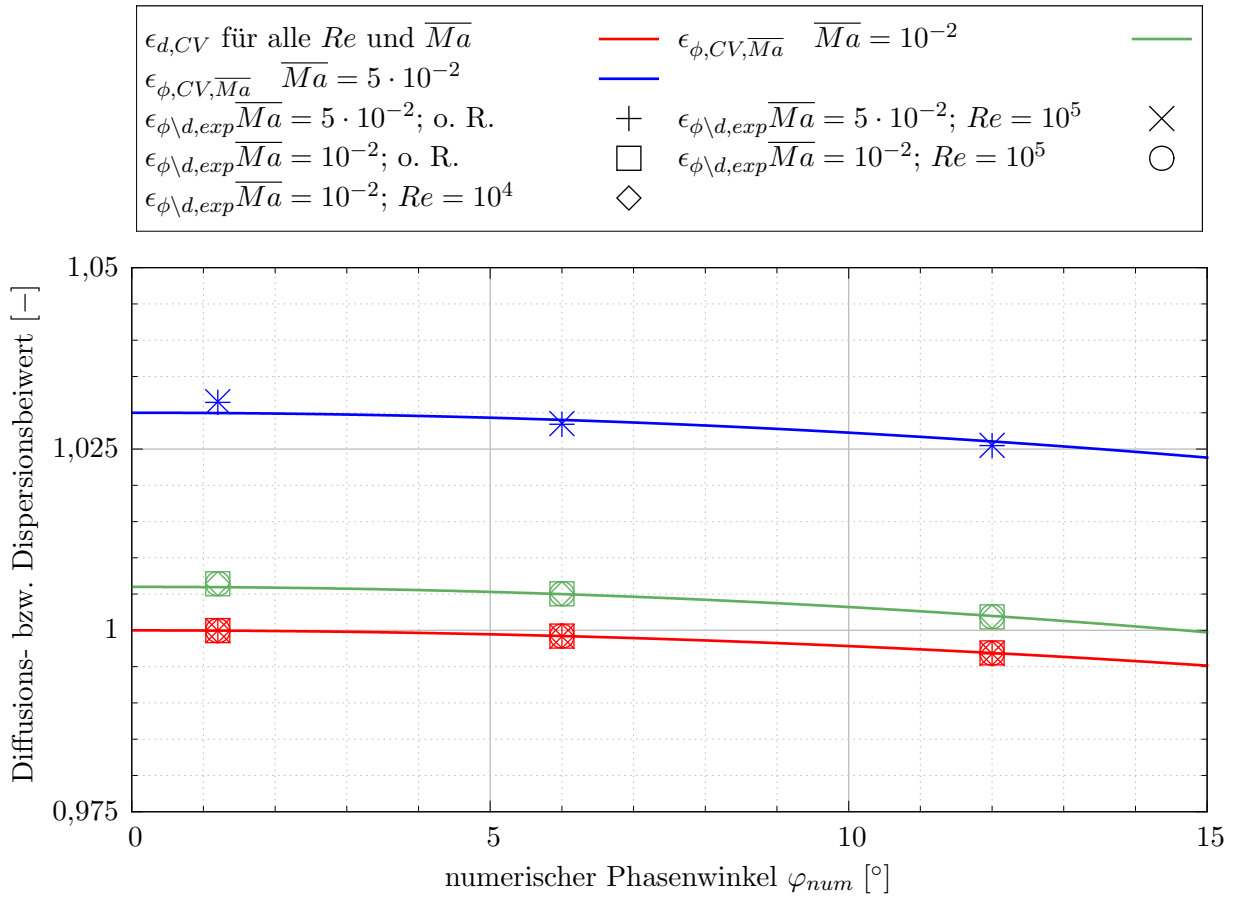


Abbildung 7.30.: Analytische sowie numerisch-experimentell bestimmte Diffusions- bzw. Dispersionsbeiwerte des CV-Schemas mit und ohne Reibung (o. R.), bei Variation der Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$ , der Reynoldszahl  $Re$  sowie einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  und  $CFL = 0,172$ .

Eine Betrachtung der Diffusionsfehler macht deutlich, dass der Reibungsterm  $f_x$  keinen signifikanten Einfluss auf die effektive Dämpfung in der CV-Domain hat. Für sämtliche untersuchten Reynoldszahlen und Machzahlen ergibt sich praktisch die gleiche Dämpfung. Der Reibungsterm  $f_x$ , der den stationären Reibungsanteil abbildet, hat also keinen signifikanten Einfluss auf die viskose Dämpfung einer akustischen Welle in der CV-Domain. Auch bei Berücksichtigung von physikalischer Reibung in der CV-Domain gilt daher:



$$\alpha_{eff,CV} = \alpha_{num,CV} \quad (7.86)$$

Auch auf die Schallgeschwindigkeit hat der Reibungsterm keinen signifikanten Einfluss. Die numerisch-experimentell ermittelten Dispersionsbeiwerte ohne Reibung (o. R.) weisen keine nennenswerten Unterschiede zu denjenigen mit Reibung ( $Re = 10^4$  bzw.  $Re = 10^5$ ) auf.

### Effektive Dämpfung in der 3DFV-Domain

In einer 3D-Domain wird die viskose Dämpfung durch die Haftbedingung an den Rohrwänden und die Berücksichtigung des Spannungstensors in der Impulserhaltung erfasst. Im Folgenden wird untersucht, inwiefern sich die physikalische Dämpfung von Pulsationen in durchströmten Rohren in einer 3DFV-Domain abbilden lässt und wie sich eine Auflösung der Strömungsgrenzschicht oder die Anwendung von Wandgesetzen darauf auswirkt. Es ist anzunehmen, dass eine Auflösung der akustischen Grenzschicht, auch Stokes-Schicht genannt, die beste Abbildung der Dämpfung akustischer Wellen ermöglicht. Da die Dicke der akustischen Grenzschicht  $\delta_a$  üblicherweise jedoch um etwa zwei Größenordnungen kleiner ist als diejenige einer turbulenten Strömungsgrenzschicht  $\delta_t$  [WBH14,Sch06], ist eine Auflösung der akustischen Grenzschicht mit vertretbarem numerischen Aufwand nicht möglich.

Zur Untersuchung der effektiven Dämpfungskonstante  $\alpha_{eff,3DFV}$  in einer 3DFV-Domain wird ein zylindrisches Rohr dreidimensional vernetzt und simuliert. Dabei werden die gleichen Reynoldszahlen und Machzahlen wie zuvor betrachtet. Um den Einfluss der Grenzschichtauflösung zu untersuchen, wird im Folgenden pro Parameterkombination ein Modell mit Grenzschichtauflösung und ein Modell ohne Grenzschichtauflösung erstellt und simuliert. Bei Modellen mit Grenzschichtauflösung sollte im Allgemeinen für den dimensionslosen Wandabstand  $y^+$  des wandnächsten Zellzentrums gelten  $y^+ \approx 1$ . Bei Anwendung von Wandfunktionen (ohne Grenzschichtauflösung) sollte der dimensionslose Wandabstand des wandnächsten Zellzentrums im Bereich von  $30 \leq y^+ \leq 300$  liegen (vgl. dazu bspw. [Sch13, LO13]). Hinsichtlich der Vergleichbarkeit wird in den hier erstellten Modellen ein wandnächstes Element im Bereich von  $30 \leq y^+ \leq 40$  realisiert.

Für jede Kombination von  $Re$  und  $\overline{Ma}$  ist eine angepasste Vernetzung erforderlich. Die Untersuchung und Anpassung der  $y^+$ -Werte erfolgt bei stationärer Strömung, wobei die Machzahl der Gleichströmung  $\overline{Ma}$  anhand einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit am Einlass und die Reynoldszahl  $Re$  anhand des Rohrleitungsdurchmessers  $D_{RL}$  variiert wird. Die Ergebnisse der stationären Simulationen werden zudem als Initialisierung für die anschließenden instationären Simulationen verwendet. Für die Simulationen mit  $\overline{Ma} = 0$  werden die gleichen Netze wie für die Simulationen mit  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  und  $Re = 10^4$  verwendet. In **Abb. 7.31** sind exemplarisch die Rechenetze für die Simulationen mit  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  und  $Re = 10^4$  bei einer räumlichen Auflösung von  $\Delta x = 0,01 \text{ m}$  dargestellt. Es werden Modelle mit einer räumlichen Auflösung in Wellenausbreitungsrichtung von  $\Delta x = 0,002/0,01/0,02 \text{ m}$  untersucht. Daraus ergeben sich bei der im Folgenden verwendeten Grundfrequenz der Anregung von  $f_G = 600 \text{ Hz}$  numerische Phasenwinkel von  $\varphi_{num} = 1,26/6,29/12,58^\circ$ . Dies entspricht in guter Näherung den in

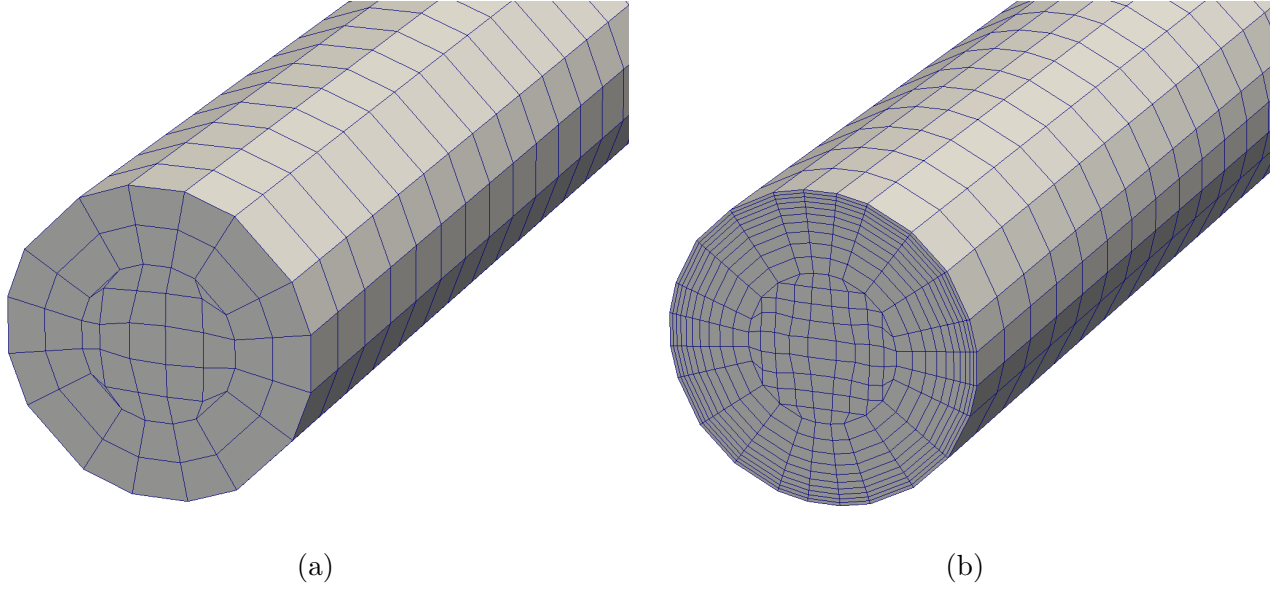


Abbildung 7.31.: Rechenetze ohne (a) und mit (b) Grenzschichtauflösung für Simulationen mit  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  und  $Re = 10^4$  und einem Rohrdurchmesser von  $D_{RL} = 0,045 \text{ m}$ .

	$\overline{Ma} [-]$	$Re [-]$	$D_{RL} [m]$	$y^+ [-]$
$Ma0WF$	0	0	0,045	–
$Ma0GSA$	0	0	0,045	–
$Ma10^{-2}Re10^4WF$	$10^{-2}$	$10^4$	0,045	31...34
$Ma10^{-2}Re10^4GSA$	$10^{-2}$	$10^4$	0,045	0,9...1,1
$Ma10^{-2}Re10^5WF$	$10^{-2}$	$10^5$	0,45	33...36
$Ma10^{-2}Re10^5GSA$	$10^{-2}$	$10^5$	0,45	0,8...1,1
$Ma5 \cdot 10^{-2}Re10^5WF$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^5$	0,09	37...39
$Ma5 \cdot 10^{-2}Re10^5GSA$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^5$	0,09	1,2...1,5

Tabelle 7.10.: Parameter und  $y^+$ -Werte bei stationären Simulationen der Modelle zur Untersuchung des effektiven Dämpfungskoeffizienten in 3DFV-Domains.

Abs. 7.5 untersuchten numerischen Phasenwinkeln. Der zeitliche Diskretisierungsschritt wird bei der Variation von  $\varphi_{num}$  mit der räumlichen Schrittweite skaliert, so dass sich eine konstante CFL-Zahl von  $CFL = 0,172$  ergibt. Die Länge der Domain beträgt stets  $l_{RL} = 6 \text{ m}$ . Als Fluid wird Luft als ideales Gas modelliert.

In **Tab. 7.10** ist ein Überblick über die untersuchten Parametervariationen und die resultierenden  $y^+$ -Werte der stationären Simulationen gegeben. Bei einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 0$  werden keine stationären Voruntersuchungen durchgeführt, so dass sich auch keine  $y^+$ -Werte ergeben. Bei den übrigen Modellen zeigt sich, dass mit Grenzschichtauflösung (*GSA*) und bei Verwendung von Wandfunktionen (*WF*) die geforderten  $y^+$ -Werte bzw. Intervalle erfüllt werden.

Bei den Modellen ohne Grenzschichtauflösung wird zur Turbulenzmodellierung das  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodell verwendet. Für die turbulente kinetische Energie wird dabei die in OpenFOAM unter *kqRWallFunction* implementierte Wandfunktion verwendet, die eine Neumann-Randbedingung mit einem Gradienten von null darstellt. Für die Dissipationsrate  $\epsilon$  wird die *epsilonWallFunction* verwendet. Die turbulente Viskosität  $\nu_t$  wird mit Hilfe der *nutkWallFunction* modelliert (vgl. [Ope17]). Bei den Modellen mit Grenzschichtauflösung wird das  $k$ - $\omega$ -*SST*-Turbulenzmodell verwendet [Men93].

Am Einlass wird eine harmonisch schwankende Strömungsgeschwindigkeit in axiale Richtung  $c_{x,Ein}$  in Form einer Dirichlet-Randbedingung mit einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  bei einer Frequenz von  $f_G = 600 \text{ Hz}$  sowie für den Druck eine Neumann-Randbedingung mit einem Gradienten von null vorgegeben. Für die Temperatur wird eine Dirichlet-Randbedingung mit  $T_{Ein} = 293,15 \text{ K}$  aufgeprägt. Die turbulenten Größen am Eintritt werden als Dirichlet-Randbedingung mit Werten nach folgenden Abschätzungsformeln vorgegeben [Sch13]:

$$k = \frac{3}{2}(c_x I)^2 \quad \text{mit } I = 0,16 \cdot Re^{-\frac{1}{8}} \quad (7.87)$$

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad \text{mit } l = 0,07 \cdot D_{RL} \text{ sowie } C_\mu = 0,09 \quad (7.88)$$

$$\omega = C_\mu^{-\frac{1}{4}} \frac{k^{\frac{1}{2}}}{l} \quad \text{mit } l = 0,07 \cdot D_{RL} \text{ sowie } C_\mu = 0,09 \quad (7.89)$$

Dabei steht  $D_{RL}$  für den Rohrleitungsdurchmesser und  $I$  für die Turbulenzintensität,  $C_\mu$  ist eine Konstante. Am Auslass wird ein konstanter Druck von  $p_{Aus} = 10^5 \text{ Pa}$  sowie für die Geschwindigkeit, die Temperatur und die turbulenten Größen ein Gradient von null vorgegeben.

Die innere Domain wird bei den Simulationen mit  $\overline{Ma} = 0$  bzw.  $Re = 0$  mit einem Druck von  $p_{init} = 10^5 \text{ Pa}$ , einer Temperatur von  $T_{init} = 293,15 \text{ K}$  und einer Strömungsgeschwindigkeit von  $c_{init} = 0$  initialisiert. Die Initialisierungswerte der turbulenten Größen werden nach Gl. (7.87-7.89) ermittelt. Die turbulente Viskosität wird über folgenden Zusammenhang bestimmt und initialisiert [Sch13]:

$$\nu_t = \sqrt{1,5} c_x I l \quad \text{mit } l = 0,07 \cdot D_{RL} \text{ sowie } I = 0,16 \cdot Re^{-\frac{1}{8}} \quad (7.90)$$

Für die Fälle mit vorhandener Gleichströmung wird zunächst mit dem kompressiblen, stationären Löser *rhoSimpleFoam* eine stationäre Lösung mit den oben angegebenen Initialisierungswerten für  $p, T$  und die turbulenten Größen durchgeführt. Die Eintritts- sowie die Initialisierungsgeschwindigkeit werden in Abhängigkeit der jeweiligen Machzahl der Gleichströmung zu  $c_{Ein} = c_{init} = \overline{Ma} \cdot a_{\text{exakt}}$  gesetzt. Die stationäre Lösung wird anschließend als Initialisierungszustand von  $p, c, T$  und den turbulenten Größen für die instationären Simulationen vorgegeben.

Bei den Simulationen der 3DFV-Domain wird ausschließlich die Dämpfung untersucht. Voruntersuchungen zeigten, dass bei Aufprägung einer Schwankung an einer Randbedingung die Bestimmung der numerischen Dispersion innerhalb der Domain durch diese Randbedingung verfälscht wird. Die

Dämpfung kann jedoch verlässlich bestimmt werden. Da aufgrund der unbekanntenen Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt die Domain nicht (wie zuvor bei den eindimensionalen Simulationen) sinnvoll mit einer pulsierenden Strömung initialisiert werden kann, muss für die Bestimmung der effektiven Dämpfung in der 3DFV-Domain die Schwankung an der Randbedingung aufgeprägt werden.

Die Bestimmung der effektiven Dämpfung erfolgt anhand des statischen Druckes  $p$ . Dieser wird an zwei axial versetzten Stellen  $x_{eva,1}$  und  $x_{eva,2}$  ausgewertet. In Testsimulationen mit  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  und  $Re = 10^4$  konnte gezeigt werden, dass sich der statische Druck, wie erwartet, über den Querschnitt nicht nennenswert ändert. Die relative Abweichung von Maximum und Minimum des Schalldruckes  $\tilde{p}(= p - \bar{p})$  über dem Querschnitt ergibt sich stets zu

$$\epsilon_{p,min,max} = \frac{\tilde{p}(r)_{max} - \tilde{p}(r)_{min}}{\tilde{p}(r)_{max}} < 10^{-6}. \quad (7.91)$$

Daher wird der zeitliche Verlauf des Druckes an den beiden Auswertepositionen in der Rohrleitungsachse ausgewertet.

Der erste Auswertepunkt  $x_{eva,1}$  befindet sich in einem Abstand von  $x_{eva,1} = 10 \cdot D_{RL}$  zum Einlass und der zweite Auswertepunkt  $x_{eva,2}$  befindet sich im Abstand von einer Wellenlänge zum Punkt  $x_{eva,1}$ . Die Zeitsignale an den Auswertepunkten  $p(x_{eva,1}, t)$  und  $p(x_{eva,2}, t)$  werden zunächst in den Spektralbereich transformiert. Es werden jeweils - wie zuvor - exakt drei Perioden abzüglich eines Abtastwertes auf eine Anzahl an Abtastpunkten von  $2^n$  nachabgetastet und mit Rechteck-Fensterung bewertet. Anhand der Amplituden bei Anregungsfrequenz  $\hat{p}_{eva,1}$  und  $\hat{p}_{eva,2}$  lässt sich unter Verwendung von Gl. (2.48) mit  $\hat{p} = \hat{f}$  und  $\hat{g} = 0$  die effektive Dämpfung bestimmen zu:

$$\alpha_{eff,3D} = -\ln \left( \frac{\hat{p}_{eva,2}}{\hat{p}_{eva,1}} \right) \cdot \frac{1}{x_{eva,2} - x_{eva,1}} \quad (7.92)$$

Die ermittelten effektiven Dämpfungskoeffizienten für Gewichtungsfaktoren der Zeitintegration von  $\Theta = 1$  sowie für  $\Theta = 0,55$  sind in **Abb. 7.32** dargestellt. Ebenfalls abgebildet ist die zu erwartende physikalischen Dämpfungskonstante  $\alpha_{phys}$  für einen Rohrlungsdurchmesser von  $D_{RL} = 0,045 \text{ m}$  und eine Frequenz von  $f_G = 600 \text{ Hz}$ . Die akustische (viskothermische) Dämpfung ebener Wellen in einer Rohrleitung ohne Gleichströmung  $\alpha_{phys,Akustik}$  lässt sich berechnen mit [Ron75]:

$$\alpha_{phys,Akustik} = k \left( \frac{1}{s\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{Pr}} \right) + \frac{1}{s^2} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{Pr}} - \kappa \frac{\kappa - 1}{2Pr} \right) \right) \quad (7.93)$$

Dabei ist  $k$  die Kreiswellenzahl,  $\kappa$  der Isentropenexponent,  $s = \frac{D_{RL}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  die Schubwellenzahl, die das Verhältnis von Rohrlungsdurchmesser und akustischer Grenzschicht darstellt, und  $Pr$  die Prandtlzahl.

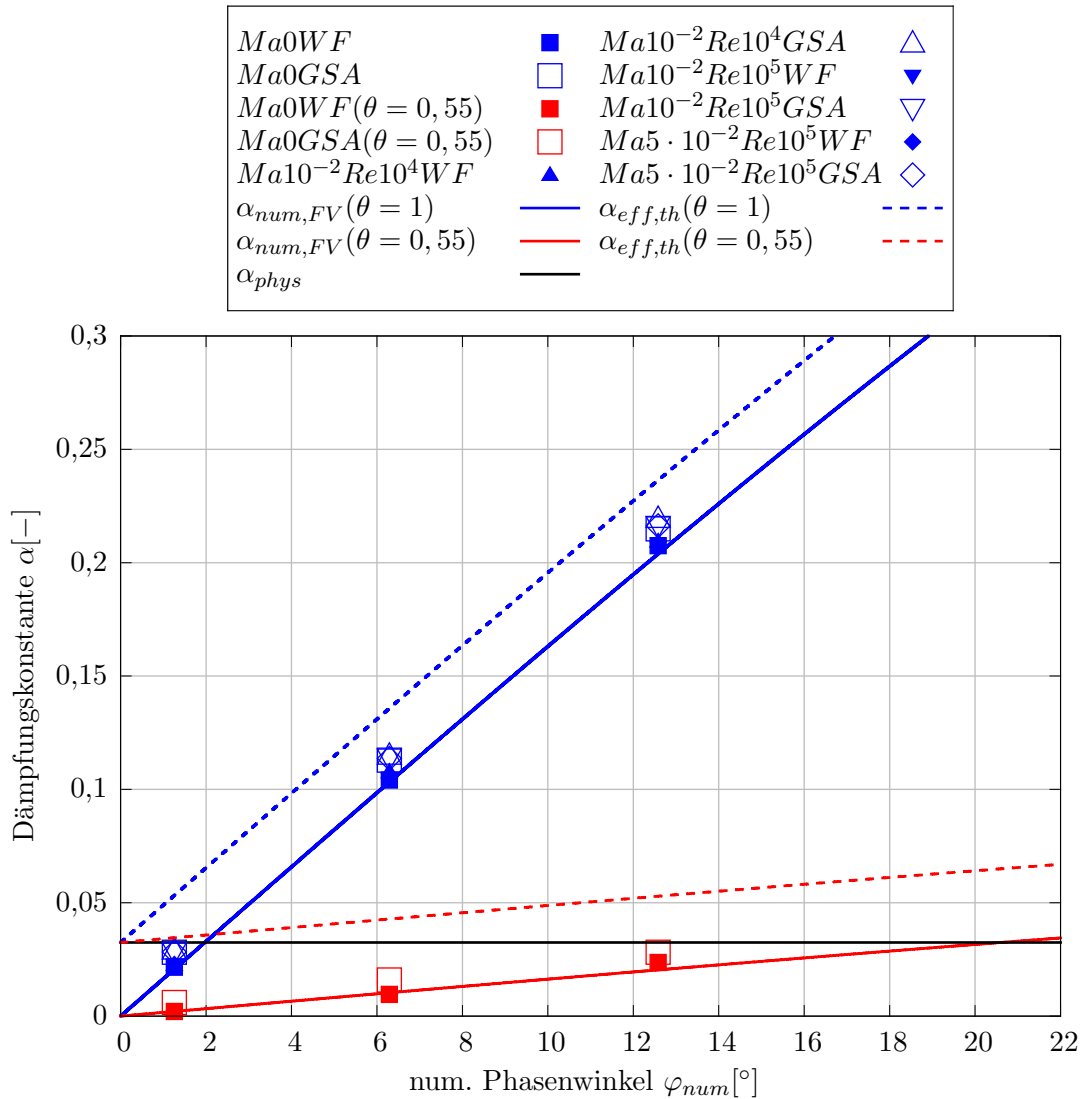


Abbildung 7.32.: Numerische, physikalische und theoretische sowie numerisch-experimentell bestimmte effektive Dämpfungskonstante bei 3DFV-Simulationen von Wellenausbreitung in Rohrleitungen bei Variation der Machzahl  $\overline{Ma}$  und der Reynoldszahl  $Re$  sowie einer Anregungsfrequenz von  $f_G = 600 \text{ Hz}$ . Numerische Ergebnisse wurden - soweit nicht anders gekennzeichnet - mit impliziter Euler-Zeitintegration ( $\Theta = 1$ ) ermittelt.

Gl. (7.93) ist in guter Näherung gültig für sämtliche untersuchten Parameterkombinationen: Die Helmholtzzahl  $He = \frac{D_{RL}}{\lambda}$ , definiert als das Verhältnis einer charakteristischen Länge zu der Wellenlänge ist stets kleiner eins, so dass räumliche Effekte nicht auftreten. Weiterhin tritt nennenswerte Dämpfung durch turbulente Absorption nur für den Fall sehr großer akustischer Grenzschichten und damit sehr kleiner Frequenzen auf, was hier ebenfalls nicht gegeben ist. Aufgrund der kleinen  $He$  und  $\overline{Ma}$  tritt zudem kein signifikanter Einfluss der Gleichströmung auf die Dämpfung auf. [WBH14]

Somit gilt

$$\alpha_{phys,Strömung} \ll \alpha_{phys,Akustik} \quad \text{und damit} \quad (7.94)$$

$$\alpha_{phys} = \alpha_{phys,Strömung} + \alpha_{phys,Akustik} \approx \alpha_{phys,Akustik} \quad (7.95)$$

Zusätzlich ist der theoretische, effektive Dämpfungskoeffizient

$$\alpha_{eff,th} = \alpha_{phys} + \alpha_{num,FV} \quad (7.96)$$

dargestellt, der sich ergibt, falls die physikalische Dämpfung in dem numerischen Modell unter Annahme der Gültigkeit von Gl. (7.93) ideal abgebildet wird .

Es zeigt sich, dass bei Verwendung von Wandfunktionen in Abwesenheit von Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) die effektive Dämpfung für  $\Theta = 1$  sehr gut mit der numerischen Dämpfung des Schemas  $\alpha_{num,FV}$  übereinstimmt. Gleiches gilt für die Simulationen mit  $\Theta = 0,55$ . Bei Verwendung von Wandfunktionen werden die Strömungsgrenzschicht und somit die (kleinere) akustische Grenzschicht nicht aufgelöst. Dadurch wird die physikalische Dämpfung offenbar nicht hinreichend erfasst, so dass kein signifikanter physikalischer Einfluss auf die effektive Dämpfung in der 3DFV-Domain  $\alpha_{eff,3DFV}$  auftritt. Dies gilt für alle untersuchten numerischen Phasenwinkel. Für  $\varphi_{num} = 12^\circ$  liegt die Dämpfung für beide untersuchten Schemata leicht oberhalb der rein numerischen Dämpfung  $\alpha_{num,FV}$ , die Abweichungen sind jedoch gering.

Wird die Strömungsgrenzschicht aufgelöst, so ergibt sich durchgehend eine erhöhte Dämpfung sowohl bei  $\Theta = 1$  als auch bei  $\Theta = 0,55$ . Die resultierenden numerisch-experimentell bestimmten Dämpfungskonstanten liegen sichtlich oberhalb der numerischen Dämpfungskonstanten  $\alpha_{num,FV}$  allerdings ebenfalls deutlich unterhalb der theoretischen effektiven Dämpfungskonstanten  $\alpha_{eff,th}$ . Offenbar wird die viskose Dämpfung der akustischen Wellen durch die Auflösung der Strömungsgrenzschicht ansatzweise erfasst. Da die akustische Grenzschicht jedoch nicht ausreichend aufgelöst ist, wird auch die physikalische Dämpfung der Wellen nur unzureichend abgebildet.

Die Simulationen mit Gleichströmung weisen keine wesentliche Unterschiede zu denjenigen ohne Gleichströmung auf. Die effektive Dämpfung ist bei Anwendung von Wandfunktionen für sämtliche untersuchten Parameterkombinationen praktisch identisch. Die entsprechenden Symbole in Abb. 7.32 liegen direkt aufeinander und sind daher nicht voneinander zu unterscheiden. Bei Auflösung der Grenzschicht zeigt sich, dass die Dämpfung für alle untersuchten Mach- und Reynoldszahlen zunimmt. Dabei

sind ebenfalls keine wesentlichen Unterschiede zwischen den untersuchten Parameterkombinationen festzustellen. Dies bestätigt den angenommenen vernachlässigbaren Einfluss der stationären Strömung auf die physikalische Dämpfung.

Die Untersuchungen der Dämpfung ebener Wellen in einer 3DFV-Domain zeigen, dass eine Auflösung der Strömungsgrenzschicht zu effektiven Dämpfungskonstanten führt, die nicht im Voraus anhand numerischer Parameter bestimmbar sind. Bei Anwendung von Wandfunktionen ohne Auflösung der Strömungsgrenzschicht entspricht demgegenüber die effektive Dämpfung praktisch der rein numerischen Dämpfungskonstante. Für die in dieser Arbeit entwickelten Kopplungsmethode muss zur spektralen Impedanzanpassung der gekoppelten Domains die effektive Dämpfung beider Domains im Voraus bekannt sein.

Im Weiteren werden in dieser Arbeit daher Wandfunktionen verwendet. Unter der Voraussetzung, dass keine druckinduzierte Ablösung auftritt, liefert das  $k - \epsilon$ -Turbulenzmodell in Verbindung mit Wandfunktionen eine gute Approximation realer Strömungsfelder [FP08, LO13, Sch13] und wurde auch bei pulsierenden Strömungen erfolgreich eingesetzt [KM92, WZ05]. Somit ist der gewählte Ansatz hinsichtlich Effizienz und Abbildungsgüte sinnvoll. Grundsätzlich kann auch das  $k - \omega - SST$ -Turbulenzmodell verwendet werden. In Bereichen mit komplexer Strömung kann dann die Grenzschicht aufgelöst werden, so dass in diesen Gebieten das  $k - \omega$ -Modell angewandt wird. Bei großen  $y^+$ -Werten außerhalb der viskosen Unterschicht wird das  $k - \epsilon$ -Modell verwendet. Im Bereich der Kopplungsstelle ist daher anhand der Netzgenerierung mit entsprechenden  $y^+$ -Werten sicherzustellen, dass in diesen Bereichen Wandfunktionen verwendet werden. Bei den untersuchten Modellen mit Wandfunktionen ( $WF$ ) ist dies stets der Fall (vgl. Tab. 7.10), so dass das  $k - \omega - SST$ - und das  $k - \epsilon$ -Modell die gleichen Ergebnisse liefern.

In Abb. 7.32 sind weiterhin diejenigen numerischen Phasenwinkel  $\alpha_{num, FV}$  der beiden Schema abzulesen, bei denen die numerische Dämpfung der physikalischen Dämpfung  $\alpha_{phys}$  einer Welle der Frequenz  $f_G = 600 \text{ Hz}$  in einer Rohrleitung mit dem Durchmesser  $D_{RL} = 0,045 \text{ m}$  entspricht. Bei impliziter Euler-Integration ( $\Theta = 1$ ) ist dies mit einem numerischen Phasenwinkel von ca.  $\varphi_{num} = 2^\circ$  der Fall, bei Zeitintegration mit  $\Theta = 0,55$  bei ca.  $\varphi_{num} = 20^\circ$ . Für diese Werte entspricht bei Verwendung von Wandfunktionen die numerische und damit die effektive Dämpfungskonstante der physikalischen Dämpfungskonstante nach Gl. (7.93).

### 7.8.2. Transformation der Strömungsgrößen zwischen 3D- und 1D-Domain

Bei multidimensionaler 3DFV/1DCV-Kopplung müssen die übergebenen Strömungsgrößen  $p$ ,  $c$  und  $T$  in geeigneter Weise zwischen einer und drei Dimensionen transformiert werden. Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Ansätze und konkreten Umsetzungen dieser Transformationen anhand **Abb. 7.33** erläutert.

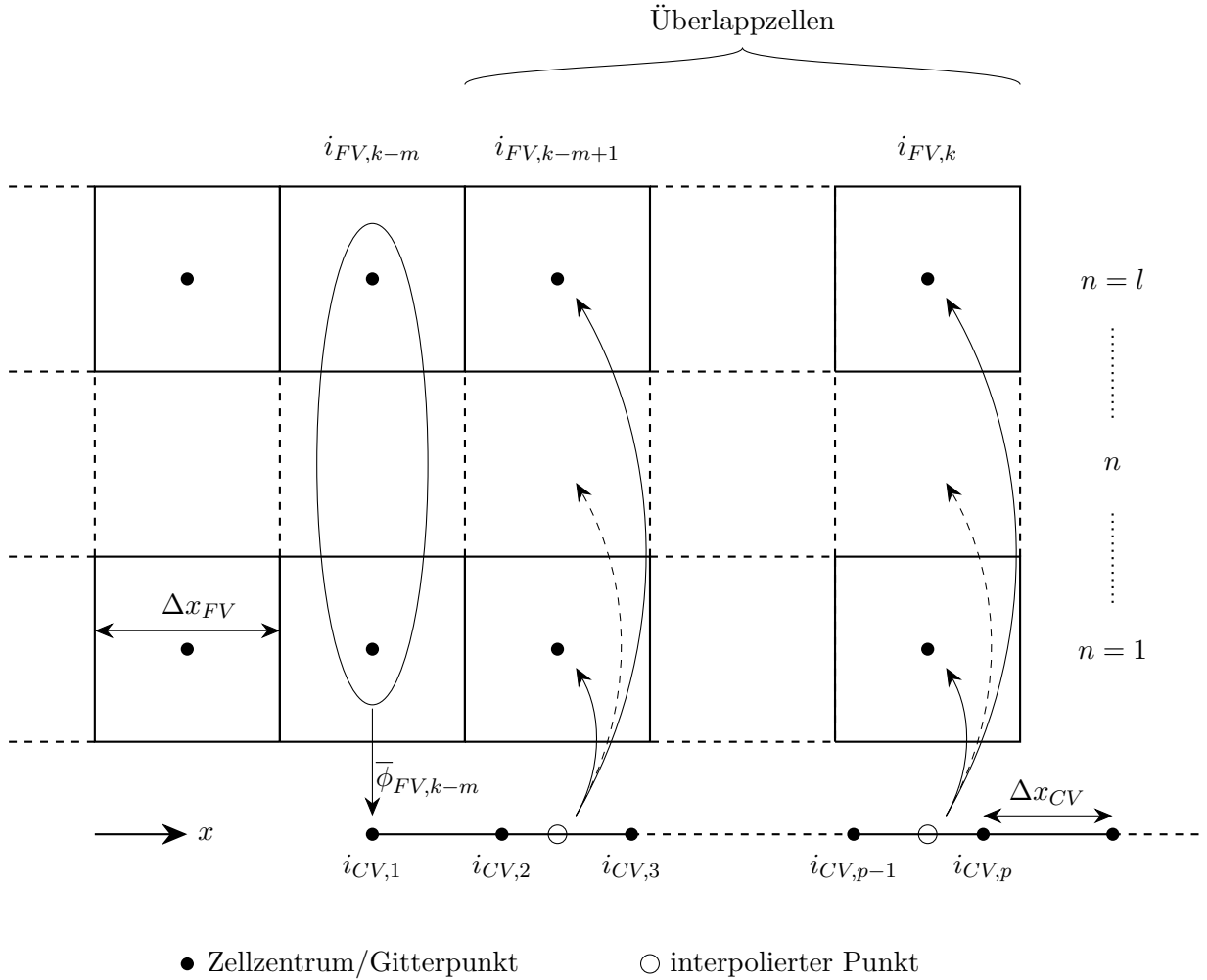


Abbildung 7.33.: Austausch und Transformation der Strömungsgrößen bei der Kopplung einer 3DFV-Domain (oben) und einer 1DCV-Domain (unten).

### Transformation von 3D auf 1D

Wie in Abs. 7.1 erläutert, wird die Strömungsgeschwindigkeit  $c_{3D}$  zur Erhaltung der Masse über den Querschnitt masseflussgewichtet gemittelt. Diese Transformation ist in Abb. 7.33 illustriert. Wie bereits erwähnt, sind der Druck  $p_{3D}$  und die Temperatur  $T_{3D}$  über den Querschnitt praktisch konstant. Um den in der numerischen Lösung jedoch vorhandenen geringen Schwankungen über einem Querschnitt Rechnung zu tragen, werden diese Größen zur Transformation von 3D auf 1D ebenfalls gemittelt.

Sei  $x$  die Wellenausbreitungsrichtung der im Bereich der Kopplungsstelle ebenen Welle. Weiterhin umfasst der Index  $n$  sämtliche Zellen in der Ebene orthogonal zur Wellenausbreitungsrichtung. Dann ergibt sich die an der Koordinate  $i_{FV,k-m}$  über den Querschnitt gemittelte Strömungsgröße  $\bar{\phi}_{FV,k-m}$ , die an den Punkt  $i_{CV,1}$  der gekoppelten CV-Domain übergeben wird, zu:

$$\bar{\phi}_{FV,k-m} = \frac{\sum_n \rho_n A_n \phi_n}{\sum_n \rho_n A_n} \quad (7.97)$$



Durch die Masseflussmittelung der Strömungsgeschwindigkeit ist die Übergabe von der 3D- an die 1D-Domain konservativ hinsichtlich der Masse, vgl. Abs. 7.1.

### Transformation von 1D auf 3D

Für eine Transformation der Strömungsgrößen von 1D auf 3D muss der räumliche Verlauf dieser Größen über den Querschnitt berücksichtigt werden. Da diese Verläufe in den Übergabequerschnitten der 3DFV-Domain selbst ( $i_{FV,k-m+1}$  bis  $i_{FV,k}$  in Abb. 7.33) nicht bekannt sind, müssen sinnvolle Profile aus dem Inneren<sup>1</sup> der 3DFV-Domain ( $i_{FV,1}$  bis  $i_{FV,k-m}$ ) extrapoliert werden. Dabei werden die 3D-Profile sämtlicher aus der 1DCV-Domain übergebenen Strömungsgrößen  $p$ ,  $c$  und  $T$  berücksichtigt. Der Druck  $p$  und die Temperatur  $T$  weisen bei pulsierenden Strömungen zwar keine nennenswerte Schwankung über dem Querschnitt auf [MVV15, Sch06], Testsimulationen zeigten jedoch, dass die Annahme eines exakt konstanten Profils der Temperatur über den Querschnitt zu Instabilitäten bei der Simulation führt.

Bei dem Übergang von drei Dimensionen in eine Dimension (positive Strömungsgeschwindigkeit in Abb. 7.33) wird bei der Transformation der Strömungsgrößen von 1D nach 3D (Übergabe in die Zellen der Querschnitte  $i_{FV,k-m+1}$  bis  $i_{FV,k}$ ) pro Strömungsgröße das Profil der angrenzenden Zellen im Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  genutzt, um lokale Reflexionen und eine Störung des Strömungsprofils der inneren Domain durch die Kopplungsstelle zu vermeiden. Es wird bei der Berücksichtigung der Profile der Strömungsgrößen im Rahmen dieser Arbeit davon ausgegangen, dass diese in den Überlappzellen qualitativ den Profilen im Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  entsprechen.

Das Profil einer Strömungsgröße  $\phi$  im Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  wird für die Querschnitte  $i_{FV,k-m+1}$  bis  $i_{FV,k}$  jeweils mit der gemittelten, aus der 1D-Domain übergebenen Größe  $\phi_{1DCV}$  skaliert. Dazu wird zunächst die massengewichtet gemittelte Strömungsgröße der angrenzenden Zellen der inneren Domain ( $i_{FV,k-m}$  in Abb. 7.33)  $\bar{\phi}_{i_{FV,k-m}}$  ermittelt:

$$\bar{\phi}_{i_{FV,k-m}} = \frac{\sum_n \rho_{i_{FV,k-m},n} A_{i_{FV,k-m},n} \phi_{i_{FV,k-m},n}}{\sum_n \rho_{i_{FV,k-m},n} A_{i_{FV,k-m},n}} \quad (7.98)$$

Anschließend wird das bezogene Profil im Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  bestimmt, dessen Gültigkeit auch für die Überlappzellen ( $i_{FV,k-m+1}$  bis  $i_{FV,k}$ ) postuliert wird:

$$\phi_{n,rel} = \frac{\phi_{i_{FV,k-m},n}}{\bar{\phi}_{i_{FV,k-m}}} \quad (7.99)$$

Zur Bestimmung der absoluten Strömungsgrößen in den Querschnitten  $i_{FV,k-m+1}$  bis  $i_{FV,k}$  (vgl. Abb. 7.33) werden nun die bezogene Größe  $\phi_{n,rel}$  und die in der 1D-Domain räumlich interpolierten Größe  $\phi_{1DCV}(x = x_{i_{FV}})$  verwendet:

$$\phi_{i_{FV},n} = \phi_{n,rel} \cdot \phi_{1DCV}(x_{i_{FV}}) \quad (7.100)$$

<sup>1</sup>Die numerisch zu lösende 3DFV-Domain setzt sich zusammen aus der inneren, physikalisch interpretierbaren Domain und den Überlappzellen.

Da in der eindimensionalen Domain nur eine Strömungsrichtung existiert und die Kopplungsstelle nur sinnvoll im Bereich quasi-eindimensionaler Strömung und ebener Wellenausbreitung anwendbar ist, entspricht der Betrag der x-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit  $c_x$  dem Betrag der vektoriellen Geschwindigkeit  $c$  und die übrigen Komponenten  $c_y$  und  $c_z$  werden stets zu null gesetzt. Durch die Massenmittelung ist die verwendete Transformation von 1D auf 3D - ebenso wie die Transformation von 3D auf 1D - konservativ in der Masse.

Die Behandlung der Profile der Strömungsgrößen beim Einströmen in die 3DFV-Domain entspricht der Darstellung in Abb. 7.33 für den Fall negativer Strömungsrichtung. Auch hier wird der Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  als Referenzprofil verwendet. Die Transformation erfolgt analog zu derjenigen beim Ausströmen aus der 3DFV-Domain in die 1DCV-Domain nach Gl. (7.98-7.100).

### 7.8.3. Konservativität der 3D/1D-Kopplung

Wie in Abs. 7.1 diskutiert und in Abs. 7.8.2 erläutert, ist die Transformation der Strömungsgeschwindigkeit lediglich hinsichtlich der Masse konservativ, um einen Sprung in den Zustandsgrößen an der Kopplungsstelle zu vermeiden. Im Folgenden wird die Abweichung der Erhaltung von Impuls und Energie bei der vorgestellten Transformationsvorschrift untersucht.

Dazu werden stationäre Simulationen mit dreidimensionalen FV-Modellen ohne Grenzschichtauflösung durchgeführt, vgl. Abs. 7.8.1. Da die Reynoldszahl der relevante Parameter hinsichtlich des Strömungsprofils ist, wird diese im Bereich von  $10^4 \leq Re \leq 10^5$  variiert. Sechs Zellen vor der Austrittsrandbedingung der 3DFV-Domain (entsprechend dem Querschnitt  $i_{FV,k-m}$  in Abb. 7.33 für  $m = 5$ ) wird die relative Abweichung der Flüsse von Impuls und Gesamtenergie zwischen der 3DFV-Domain und den massengewichtet gemittelten Größen, die an die 1DCV-Domain übergeben werden, ermittelt. Der flächenspezifische Impulsfluss der 3DFV-Domain am betrachteten Querschnitt ergibt sich zu

$$\dot{I}_{3DFV} = \frac{\sum_n \rho_{3DFV,n} \cdot c_{3DFV,n}^2 \cdot A_{3DFV,n}}{\sum_n A_{3DFV,n}} . \quad (7.101)$$

Der flächenspezifische Impulsfluss der 1DCV-Domain ergibt sich mit der massengemittelten Strömungsgeschwindigkeit der 3DFV-Domain  $\bar{c}_{3DFV}$  zu

$$\dot{I}_{1DCV} = \rho_{1DCV} \cdot \bar{c}_{3DFV}^2 . \quad (7.102)$$

Der flächenspezifische Gesamtenergiefluss in der 3DFV-Domain ergibt sich zu

$$\dot{E}_{3DFV} = \frac{\sum_n \rho_{3DFV,n} \cdot c_{3DFV,n} \left( \frac{c_{3DFV,n}^2}{2} + u_{3DFV,n} \right) \cdot A_{3DFV,n}}{\sum_n A_{3DFV,n}} \quad (7.103)$$

und für die 1DCV-Domain zu

$$\dot{E}_{1DCV} = \rho_{1DCV} \cdot \bar{c}_{3DFV} \left( \frac{\bar{c}_{3DFV}^2}{2} + u_{1DCV} \right). \quad (7.104)$$

Die relativen Abweichungen des Impulsflusses

$$\epsilon_j = \frac{\dot{I}_{3DFV} - \dot{I}_{1DCV}}{\dot{I}_{3DFV}} \quad (7.105)$$

liegen für die untersuchten Reynoldszahlen zwischen  $1,6 \cdot 10^{-2} < \epsilon_j < 1,8 \cdot 10^{-2}$ . Der Impulsfluss in der 1DCV-Domain ist somit stets um ein bis zwei Prozent kleiner als in der 3DFV-Domain. Diese Ergebnisse entsprechen den Impulsbeiwerten  $\beta$  in der Impulsgleichung für die Stromfadentheorie bei voll ausgebildeter turbulenter Strömung [Tru89].

Die relativen Abweichungen des Gesamtenergieflusses

$$\epsilon_{\dot{E}} = \frac{\dot{E}_{3DFV} - \dot{E}_{1DCV}}{\dot{E}_{3DFV}} \quad (7.106)$$

liegen für die untersuchten Parameter in der Größenordnung von  $\epsilon_{\dot{E}} \approx 10^{-5}$  und sind damit als gering zu bezeichnen. Die Ursache für diese geringen Abweichungen ist der wesentlich größere Einfluss der inneren Energie  $u$ , die nahezu konstant über den Querschnitt ist, gegenüber der kinetischen Energie  $\frac{c^2}{2}$  in der Gesamtenergie  $E$ .

#### 7.8.4. Reflexionen bei 3DFV/1DCV-Kopplung

Im Folgenden werden die Reflexionen an einer 3DFV/1DCV-Kopplungsstelle mit der zuvor erläuterten Transformation der Strömungsgrößen zwischen 3D und 1D analysiert. Dazu werden die 3DFV-Modelle mit Wandfunktion und einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 0$  bzw.  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  ( $Ma0WF$  und  $Ma10^{-2}Re10^4WF$  in Tab. 7.10) mit einem eindimensionalen 1DCV-Modell gekoppelt. Für die Turbulenzmodellierung wird das  $k - \omega - SST$ -Modell verwendet. In den untersuchten gekoppelten Modellen sind daher sämtliche Mechanismen einer praktischen Anwendung berücksichtigt.

Es werden sowohl Simulationen mit akustischer Anregung in der 1DCV-Domain (1DCV zu 3DFV) als auch mit Anregung in der 3DFV-Domain (3DFV zu 1DCV) durchgeführt, vgl. **Abb. 7.34**. Die Anregung wird stets mit einer Vorgabe der Strömungsgeschwindigkeit am Eintritt der gekoppelten Gesamtdomain  $c_{Ein}$  bei einer akustischen Machzahl von  $Ma_{ak} = 10^{-3}$  und einer Anregungsgrundfrequenz von  $f_G = 500 \text{ Hz}$  realisiert. Die 3DFV-Domain wird in Wellenausbreitungsrichtung mit einer räumlichen Schrittweite von  $\Delta x_{3DFV} = 0,02 \text{ m}$  diskretisiert, so dass sich ein numerischer Phasenwinkel von  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$  ergibt. Die 1DCV-Domain wird einmal mit identischer Schrittweite ( $\Delta x_{1DCV} = \Delta x_{3DFV} = 0,02 \text{ m}$ ) und einmal mit angepasster numerischer Dämpfungskonstante und damit einer räumlichen Schrittweite von  $\Delta x_{1DCV} = 0,006825 \text{ m}$  (vgl. dazu Tab. 7.3) diskretisiert. Hier können die Werte aus den reibungsfreien 1DFV/1DCV-Kopplungen in Abs. 7.7.2 verwendet

werden, da der Einfluss der physikalischen Dämpfung zu vernachlässigen ist, vgl. Abs. 7.8.1. Am Austritt der gekoppelten Gesamtdomain wird ein konstanter Druck von  $p_{Aus} = 10^5 Pa$  vorgegeben. Alle weiteren Randbedingungen der 3DFV-Domain werden wie zuvor in Abs. 7.8.1 erläutert gesetzt.

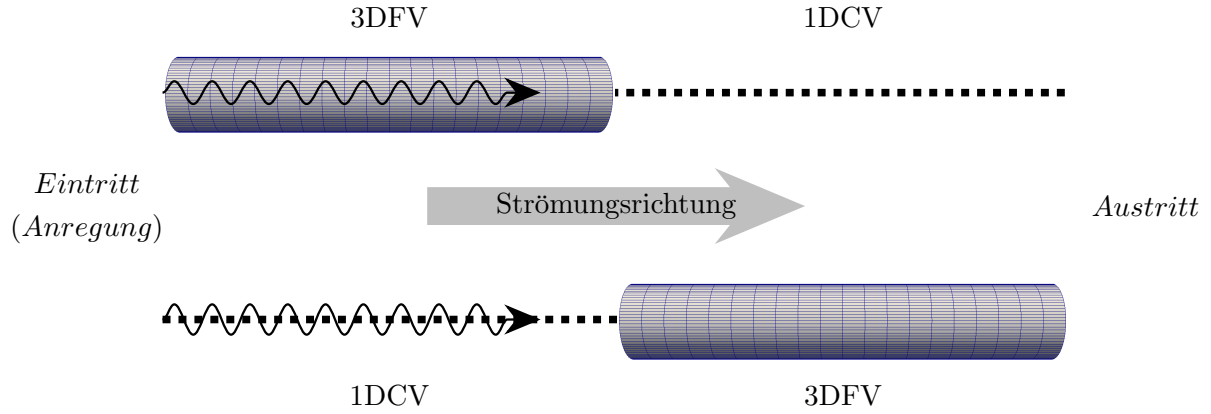


Abbildung 7.34.: Konfiguration der gekoppelten Gesamtdomain für Kopplung von 3DFV zu 1DCV (oben) und Kopplung von 1DCV zu 3DFV (unten).

Bei Simulationen ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) werden beide Domains mit einer Strömungsgeschwindigkeit von  $c_{init} = 0 \frac{m}{s}$ , einem Druck von  $p_{init} = 10^5 Pa$  und einer Temperatur von  $T_{init} = 293.15 K$  initialisiert. Bei den Simulationen mit Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 10^{-2}$ ) werden - ebenfalls wie zuvor in Abs. 7.8.1 - im Voraus stationäre Simulationen der 3DFV-Domäne durchgeführt. Diese stationäre Lösung wird als Initialisierungszustand für die gekoppelten Simulationen verwendet. Die Initialisierung der 1DCV-Domäne bei Simulationen mit Strömung erfolgt mit den gemittelten Größen der stationären Lösung der 3DFV-Domäne an der Kopplungsstelle  $\bar{c}_{i_{FV,k-m}}$ ,  $\bar{p}_{i_{FV,k-m}}$  und  $\bar{T}_{i_{FV,k-m}}$ , vgl. Abb. 7.33.

Die Auswertung der Reflexionen an der Kopplungsstelle erfolgt wie zuvor mit Hilfe von Referenzsimulationen, vgl. Abs. 7.6.2. Bei Simulationen mit Anregung in der 1DCV-Domäne wird die Auswertung im Punkt  $i_{CV,3}$  in Abb. 7.33 durchgeführt. Bei Simulationen mit Anregung in der 3DFV-Domäne wird im Querschnitt  $i_{FV,k-m-1}$  - wie zuvor in Abs. 7.8.1 - der Druckverlauf in der Rohrleitungsachse ausgewertet.

In **Abb. 7.35** sind die Reflexionskoeffizienten der Simulationen mit Kopplung von 1DCV zu 3DCV für identische räumliche Diskretisierungen und damit  $\xi_d = 4, 9$  (vgl. Tab. 7.3) sowie für angepasste numerische Dämpfungskonstanten ( $\xi_d = 1$ ) bei Variation von  $\xi_a$  dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der gekoppelten Simulationen von 1DCV zu 1DFV ebenfalls abgebildet.

Grundsätzlich zeigen die Reflexionen bei den Simulationen 1DCV zu 3DFV sehr ähnliches Verhalten gegenüber den Simulationen 1DCV zu 1DFV. Bei gleicher räumlicher Diskretisierung ( $\xi_d = 4, 9$ ) existiert im untersuchten Bereich von  $\xi_a$  kein Minimum der Reflexionen. Die Reflexionen der 1DCV/3DFV-

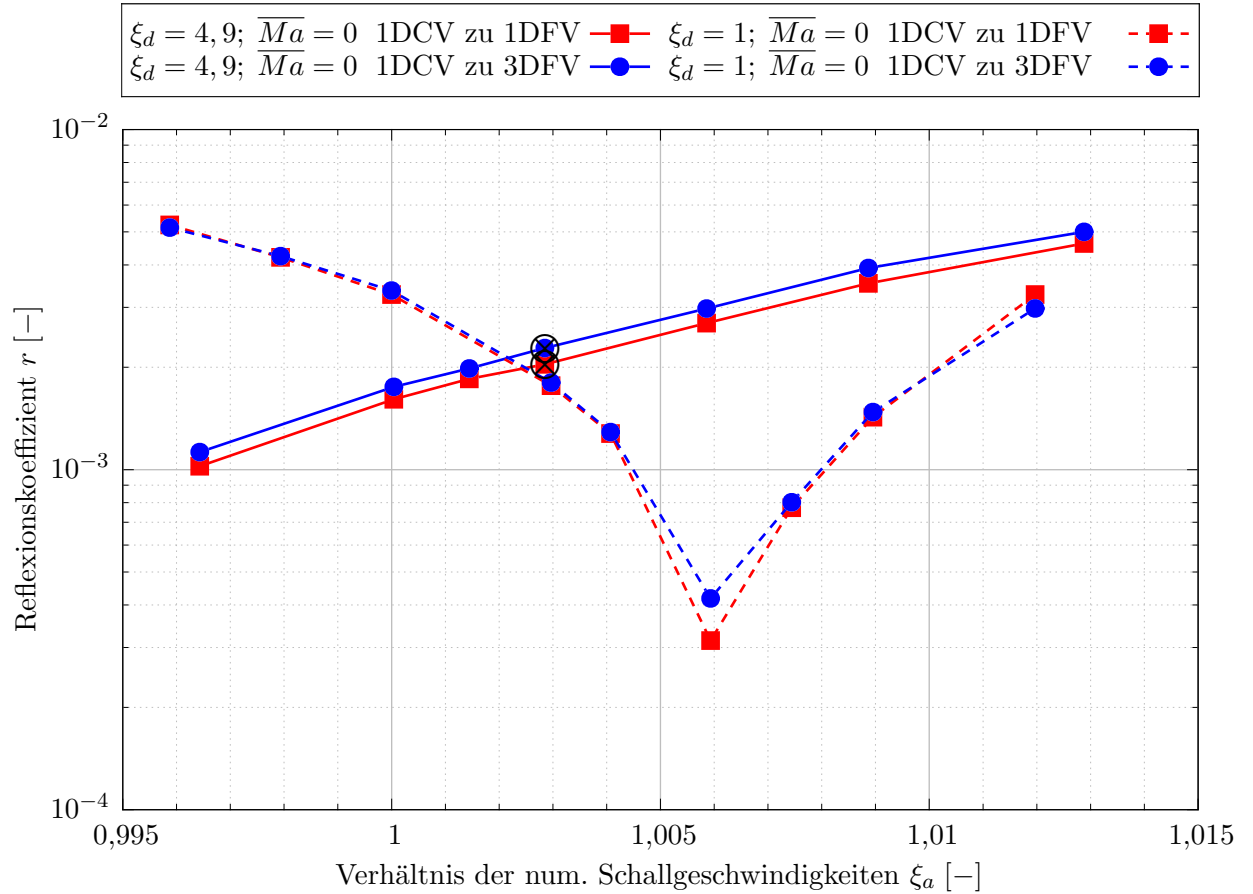


Abbildung 7.35.: Vergleich der Reflexionskoeffizienten vor der Kopplungsstelle bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\Theta = 1$  für Kopplung von 1DCV zu 1DFV bzw. 1DCV zu 3DFV.

Simulationen zeigen einen nahezu identischen Verlauf wie bei den 1DCV/1DFV-Simulationen, liegen jedoch stets geringfügig höher. Für  $\xi_d = 1$  zeigen sich ebenfalls nahezu gleiche Reflexionen. Im Bereich des Reflexionsminimums, welches wiederum bei  $\zeta_{a,CV} = 1$  liegt (vgl. Tab. 7.3), sind die Reflexionen bei 1DCV/3DFV-Kopplung leicht höher. Die Transformation der Strömungsgrößen zwischen einer Dimension und drei Dimensionen hat offenbar keinen signifikanten Einfluss auf die Reflexionen an der Kopplungsstelle.

Für die Untersuchungen der Reflexionen bei einer Kopplung von 3DFV zu 1DFV wurden Simulationen mit  $\overline{Ma} = 0$  sowie in diesem Fall zusätzlich  $\overline{Ma} = 10^{-2}$  durchgeführt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 7.36** dargestellt. Zum Vergleich sind wiederum die Ergebnisse der entsprechenden 1DFV/1DCV-Simulationen abgebildet, vgl. Tab. 7.8. Für  $\overline{Ma} = 0$  sind die Ergebnisse der 3DFV/1DCV-Simulationen erneut praktisch identisch mit denen der 1DFV/1DCV-Simulationen. Das Minimum der Reflexionen liegt erneut bei  $\zeta_{a,CV} = 1$  und nur geringfügig über dem bei der 1DFV/1DCV-Kopplung. Die Reflexionen werden durch die Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten wiederum signifikant reduziert.

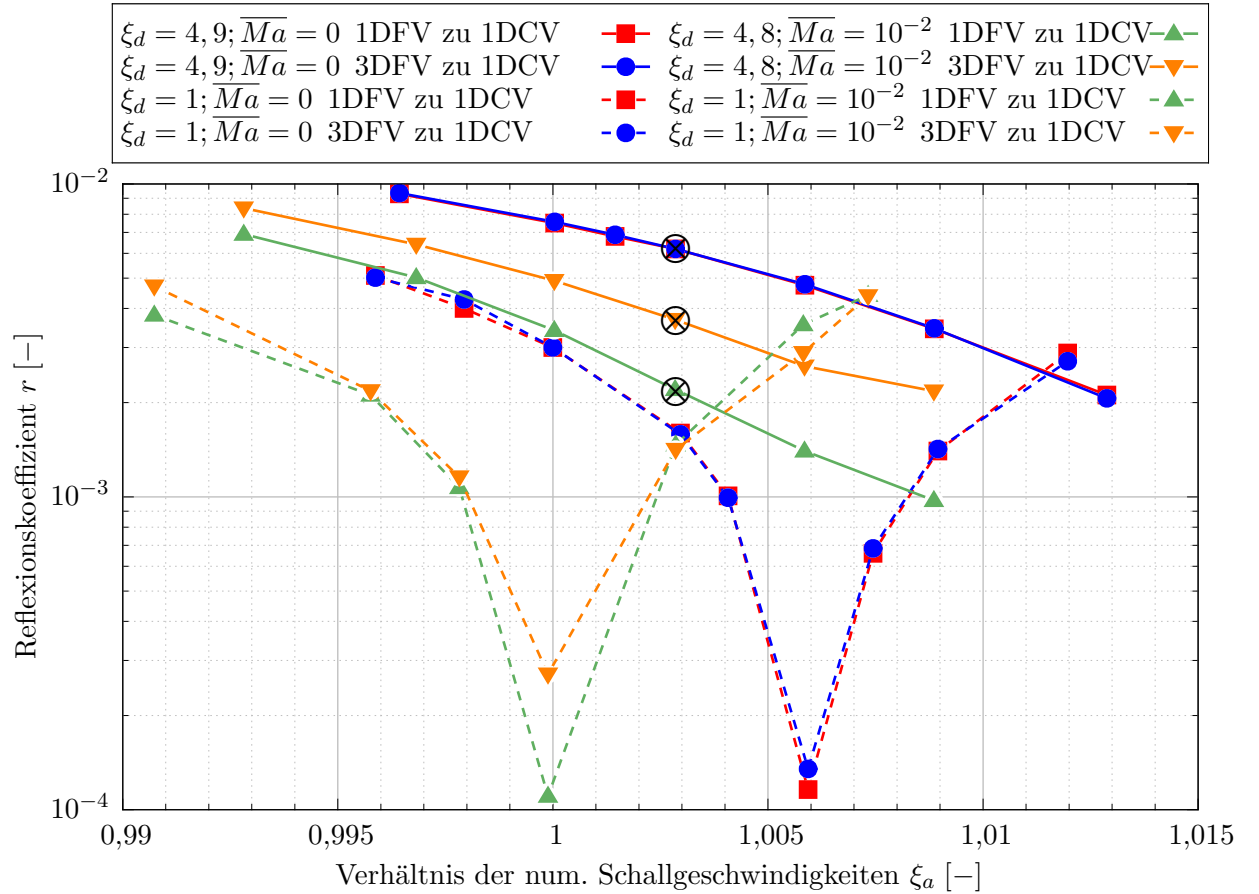


Abbildung 7.36.: Vergleich der Reflexionskoeffizienten vor der Kopplungsstelle bei  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\Theta = 1$  für Kopplung von 3DFV zu 1DCV bzw. 1DFV zu 1DCV.

Bei den Simulationen mit Gleichströmung weisen die Reflexionen bei 3DFV/1DCV-Kopplung qualitativ die gleichen Verläufe auf, wie bei der 1DFV/1DCV-Kopplung. Die Quantitativen Abweichungen sind jedoch leicht größer als bei  $\overline{Ma} = 0$ . Bei unangepassten Domains ( $\xi_d = 4, 8$ ) liegen die Reflexionen im gesamten untersuchten  $\xi_a$ -Bereich über denjenigen der 1DFV/1DCV-Simulationen. Auch bei angepassten Domains werden leichte Abweichungen zwischen 3DFV/1DCV-Kopplung und 1DFV/1DCV-Kopplung ersichtlich. Der minimale Reflexionskoeffizient liegt ebenfalls leicht höher. Bei vorhandener Gleichströmung scheinen durch die Transformation zwischen dreidimensionaler und eindimensionaler Domain leicht erhöhte Störungen induziert zu werden, diese resultieren jedoch nicht in signifikant erhöhten Reflexionen an der Kopplungsstelle.

### 7.8.5. Geschwindigkeitsprofile bei 3DFV/1DCV-Kopplung

Anhand der im vorhergehenden Abschnitt erläuterten Simulationen mit Kopplung von 3DFV zu 1DCV und  $\xi_d = 1$  sowie  $\zeta_{a,CV} = 1$  wird im Folgenden eine detailliertere Analyse der potentiellen Beeinflussung des Strömungsfeldes der inneren 3DFV-Domain durch die Kopplungsstelle durchgeführt.

Dazu sind in **Abb. 7.37** die Profile der Strömungsgeschwindigkeit über dem Radius am Auswertquerschnitt der Reflexionen ( $i_{FV,k-m-1}$  in Abb. 7.33) für die Simulationen ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) und mit Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 10^{-2}$ ) dargestellt. Die Strömungsprofile sind jeweils für drei verschiedene Phasen der Pulsation mit  $\varphi = 0, 5\pi/\pi/1,5\pi$  enthalten. Zum Vergleich sind die korrespondierenden Strömungsprofile der Referenzsimulationen einer reinen 3DFV-Domain ebenfalls abgebildet.

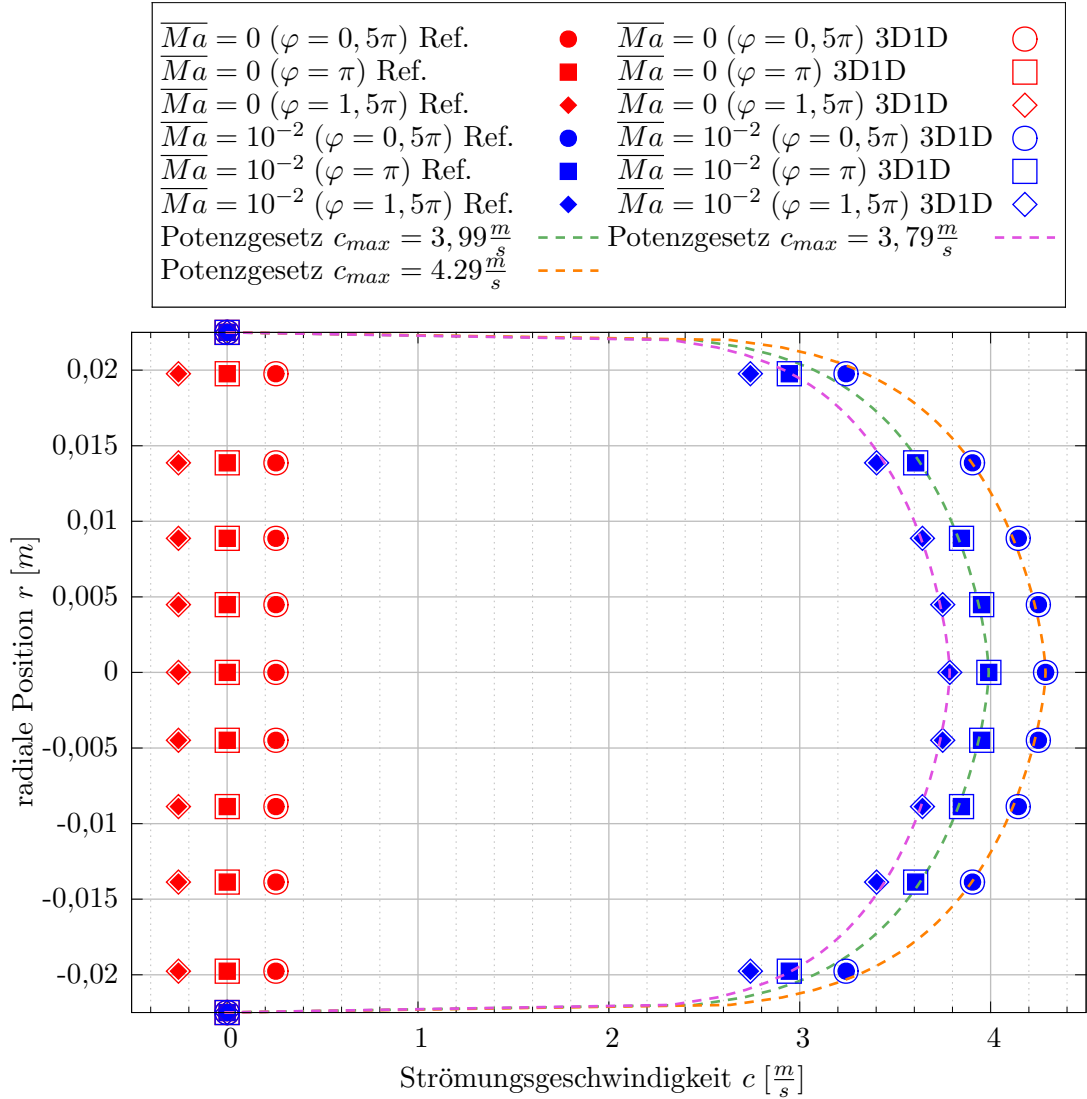


Abbildung 7.37.: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile vor der Kopplungsstelle für  $Ma_{ak} = 10^{-3}$ ,  $\varphi_{num,FV} = 10,49^\circ$ ,  $\Theta = 1$  bei 3DFV/1DCV-Kopplung (3D1D) und reiner 3DFV-Simulation (Ref.).

Es zeigt sich, dass bei Pulsationen im ruhenden Fluid die Strömungsgeschwindigkeit ein Kolbenprofil ausweist, also keine nennenswerte Variation über dem Radius erkennbar ist. An den Rohrwänden ist die Geschwindigkeit aufgrund der Haftbedingung hingegen null. Ein Vergleich der gekoppelten Simulationen mit den Referenzsimulationen macht deutlich, dass durch die Kopplungsstelle keine

signifikanten Störungen induziert werden. Für alle Phasen  $\varphi$  und über den gesamten Radius sind die Geschwindigkeiten praktisch identisch.

Die gleiche Übereinstimmung von gekoppelter Simulation und Referenzsimulation zeigt sich auch bei den Simulationen mit einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 10^{-2}$ . Auch in diesem Fall sind über den gesamten Radius keine nennenswerten Störungen des Strömungsprofils im Inneren der 3DFV-Domain ersichtlich. Die Skalierung des Profils der inneren Domain in den Überlappzellen erweist sich somit als geeignet, um lokale Reflexionen zu vermeiden und das Strömungsprofil der inneren Domain auch bei gekoppelten Simulationen zu reproduzieren.

In Abb. 7.37 sind zusätzlich Strömungsprofile nach dem Potenzgesetz nach von Karman aufgeführt, welches eine Näherung für das Strömungsprofil einer voll ausgebildeten, stationären turbulenten Strömung darstellt, und gegeben ist durch [Tru89]:

$$c(r) = c_{max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_{RL}} \right)^m \right)^n \quad (7.107)$$

Dabei ist  $R_{RL} = \frac{D_{RL}}{2} = 0,0225$  der Rohrleitungsradius. Die Exponenten  $m$  und  $n$  sind abhängig von der Reynoldszahl und betragen in diesem Fall  $m = 1,5$  und  $n = \frac{1}{7}$ . Die Werte für  $c_{max}$  entsprechen den Strömungsgeschwindigkeiten der numerischen Lösung in der Rohrachse ( $r = 0$ ) zu den jeweiligen Phasen.

Die numerischen Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Funktionalen. Lediglich im Bereich der Rohrwand zeigen sich leichte Abweichungen. Die Strömungsgeschwindigkeit der numerischen Simulationen liegt hier in allen dargestellten Phasen leicht unterhalb des Potenzgesetzes. Dadurch wird die Beobachtung aus der Literatur bestätigt, dass sich die Strömungsprofile pulsierender Strömungen bei kleinen Pulsationsindizes<sup>1</sup>  $I$  qualitativ von denen stationärer Strömungen praktisch nicht unterscheiden [MVV15].

## 7.9. Zwischenergebnis

Anhand der umfassenden Parametervariationen mit eindimensionalen gekoppelten Domains (1DFV/1DCV) in Abs. 7.7 konnte gezeigt werden, dass sich durch Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften erhebliche Reduktionen der Reflexionen an der Kopplungsstelle erzielen lassen. Die aus der Theorie der numerischen Impedanzanpassung (vgl. Abs. 7.2) abgeleitete erste fundamentale Kopplungsbedingung Gl. (7.14), die die Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten sicherstellt, konnte numerisch-experimentell bestätigt werden. Die zweite aus der Theorie abgeleitete fundamentale Kopplungsbedingung Gl. (7.16), welche die Anpassung der numerischen Schallgeschwindigkeiten repräsentiert, hat sich bei der gewählten Methode zur Übergabe der Strömungsgrößen zwischen den

<sup>1</sup>Der Pulsationsindex  $I$  ist definiert als das Verhältnis der Amplitude der Schallschnelle zu der mittleren Geschwindigkeit einer pulsierenden Strömung:  $I = \frac{\hat{c}}{\bar{c}}$



gekoppelten Domains als nicht optimal erwiesen. Vielmehr zeigte sich, dass anstelle der Bedingung gleicher numerischer Schallgeschwindigkeiten in den Domains

$$\xi_a = 1 \quad (7.108)$$

bei Erfüllung der Bedingung

$$\zeta_{a,CV} \cdot (1 + \zeta_{\overline{Ma}} \overline{Ma}) = 1 \quad (7.109)$$

minimale Reflexionen auftreten. Diese Beobachtung konnte für Machzahlen von  $0 \leq \overline{Ma} \leq 10^{-1}$  bei einer umfassenden Variation numerischer Parameter bestätigt werden.

Weiterhin zeigte sich, dass die akustische Machzahl - und damit die Amplitude auftretender Pulsationen - ein limitierender Parameter für die Anwendbarkeit der Kopplungsmethode ist. Bei großen akustischen Machzahlen (im Rahmen der untersuchten Parameter für  $Ma_{ak} \geq 5 \cdot 10^{-2}$ ) lassen sich nur noch geringfügige oder keine Reduktionen der Reflexionen durch die spektrale Anpassung der Domains realisieren.

Untersuchungen mit Gleichströmung zeigten, dass die Berücksichtigung der Skalierung der numerischen Dispersion entscheidend für die spektrale Anpassung der Domains ist. Bei Berücksichtigung der Machzahl-Skalierung in Gl. (7.109) konnten für Machzahlen der Gleichströmung im Bereich von  $0 \leq \overline{Ma} \leq 10^{-1}$  - wie zuvor ohne Gleichströmung - erhebliche Reduktionen von Reflexionen an der Koppungsstelle erzielt werden. Bei Systemen mit Reflexionen - und damit hin- und rücklaufenden Wellen an der Koppungsstelle - treten an der Koppungsstelle aufgrund der unterschiedlichen Parameter der Wellen unterschiedlicher Laufrichtungen jedoch ebenfalls möglicherweise nennenswerte Reflexionen auf.

Auch bei multidimensionaler Kopplung von Domains (3DFV/1DCV) sind die spektralen Fehler die dominanten Parameter hinsichtlich der auftretenden Reflexionen an einer Koppungsstelle. Wird die Wandbehandlung mit Hilfe von Wandfunktionen durchgeführt, so entspricht die effektive Dämpfung akustischer Wellen in einer dreidimensional modellierten Rohrleitung praktisch der numerischen Dämpfung, so dass sich anhand der numerischen Parameter der gekoppelten Domains eine zuverlässige spektrale Anpassung durchführen lässt. Weiterhin kann bei Verwendung von Wandfunktionen die Dämpfung akustischer Wellen in der 3DFV-Domain (und damit auch in der gekoppelten 1DCV-Domain) derart justiert werden, dass die Dämpfung im numerischen Modell einem vorgegebenen Funktional für die physikalische Dämpfung akustischer Wellen entspricht. Des Weiteren weisen die Reflexionen an der Koppungsstelle keine nennenswerten Veränderungen bei einer 3DFV/1DCV-Kopplung im Vergleich zu denjenigen bei einer 1DFV/1DCV-Kopplung auf. Das Strömungsprofil im Inneren der 3DFV-Domain wird durch die Koppungsstelle im untersuchten Parameterbereich geringer Machzahlen der Gleichströmung und akustischer Machzahlen ebenfalls nicht erkennbar gestört.

## 8. Generischer Testfall

In diesem Abschnitt wird die Erstellung eines gekoppelten numerischen Gesamtmodells anhand eines generischen Testfalls demonstriert. Dies umfasst die erforderlichen Voraussetzungen an eine dreidimensionale FV-Domain sowie die Bestimmung der numerischen Parameter von angepassten eindimensionalen CV-Domains.

### 8.1. Grundlegendes Modell

Die grundlegende Konfiguration des generischen Testfalls ist in **Abb. 8.1** skizziert. Das Gesamtmodell besteht aus einer 3DFV-Domain, die in zwei 1DCV-Domains eingebettet ist. Dies ist eine Konfiguration, wie sie beispielsweise bei einer Strömungsmaschine angewendet werden kann. Da Strömungsmaschinen im Gegensatz zu Verdrängermaschinen tendenziell durchlässig für akustische Wellen sind, muss für eine ganzheitliche Erfassung der instationären Wechselwirkungen von Maschinen und Anlagen das Rohrleitungssystem beidseitig berücksichtigt werden.

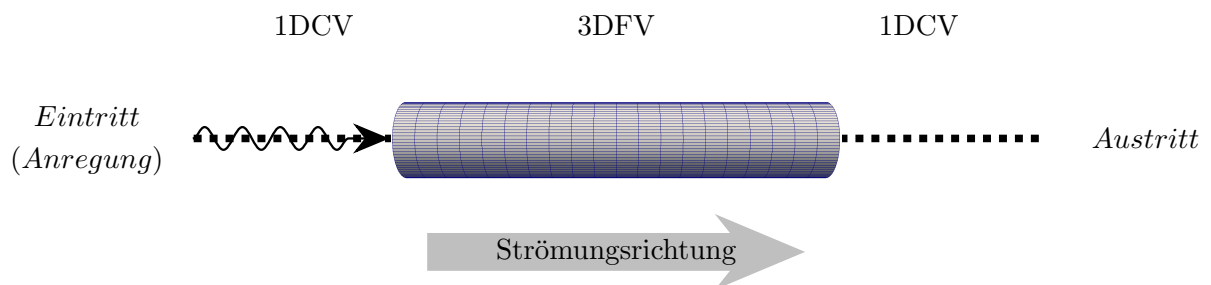


Abbildung 8.1.: Konfiguration der gekoppelten Gesamtdomain für die Simulationen mit 1DCV/3DFV/1DCV-Kopplung.

Für die Übergabe der Strömungsgrößen in die 3DFV-Domain wird der Ansatz der Rückkopplung durch Zellzentren und Extrapolation (RdE) mit einer Anzahl an Überlappzellen von  $m = 5$  und Extrapolation nullten Grades verwendet, vgl. Abs. 7.6.2. Die 3DFV-Domain besteht für diesen generischen Testfall aus einer Rohrleitung mit einem Durchmesser von  $D_{3DFV} = 0,053 \text{ m}$ . Die Länge der numerischen Domain beträgt  $l_{3DFV,num} = 1,06 \text{ m}$ . Da sich der Randpunkt der 1DCV-Domäne auf der gleichen Koordinate befindet wie die Zellzentren der 3DFV-Domäne im Schnitt  $i_{FV,k-m}$  in Abb. 7.33, ergibt sich mit jeweils  $m = 5$  Überlappzellen auf beiden Seiten eine Länge der physikalischen Domain von  $l_{3DFV,phys} = (1,06 - 11 \cdot 0,02) \text{ m} = 0,84 \text{ m}$ . Auf beiden Seiten dieser 3DFV-Domäne ist jeweils eine 1DCV-Domäne der Länge  $l_{1DCV} = 0,86 \text{ m}$  gekoppelt. Am Eintritt des Modells wird in der 1DCV-Domäne eine akustische Anregung durch Vorgabe einer fluktuierenden Strömungsgeschwindigkeit  $c_{Ein}$

aufgeprägt. Die Anregung besteht aus einer Grundharmonischen und zwei Oberschwingungen, deren Parameter in **Tab. 8.1** zusammengefasst sind. Die gewählte Kombination mit einer dominanten Grundharmonischen und abnehmenden Amplituden der Oberschwingungen entspricht einer typischen spektralen Zusammensetzung der Pulsationsanregung von Fluidenergiemaschinen. Am Austritt wird in der 1DCV-Domain einerseits die nichtreflektierende GMW-Randbedingung (vgl. Abs. 6) mit einem mittleren Zieldruck von  $\bar{p}_{RB,soll} = 10^5 \text{ Pa}$  sowie andererseits ein konstanter Druck von  $p_{Aus} = 10^5 \text{ Pa}$  vorgegeben.

	$f \text{ [Hz]}$	$\hat{c} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$Ma_{ak} [-]$	$\varphi \text{ [rad]}$
$f_G$	300	0,245	$7,2 \cdot 10^{-4}$	0
$f_1$	600	0,123	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$\frac{2}{3}\pi$
$f_2$	900	0,061	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$\frac{4}{3}\pi$
Überlagerung	-	0,527	$1 \cdot 10^{-3}$	-

Tabelle 8.1.: Parameter der Frequenzanteile der akustischen Anregung sowie der überlagerten Gesamtanregung am Eintritt der gekoppelten Gesamtdomain.

Drei Varianten dieses Modells werden im Folgenden für Luft als Fluid simuliert:

- ohne Gleichströmung ( $\overline{Ma} = 0$ ) und mit nichtreflektierender GMW-Randbedingung am Austritt (im Folgenden:  $Ma0nr$ )
- mit Gleichströmung von  $\bar{c} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ( $\overline{Ma} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ ) und nichtreflektierender GMW-Randbedingung am Austritt (im Folgenden:  $Ma2,3 \cdot 10^{-2}nr$ )
- mit Gleichströmung von  $\bar{c} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ( $\overline{Ma} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ ) und konstantem Druck am Austritt (im Folgenden:  $Ma2,3 \cdot 10^{-2}p$ )

Die Längen der Teildomains sind derart konfiguriert, dass im Fall eines konstanten Austrittsdruckes für das Fluid Luft bei einer Temperatur von  $293,15 \text{ K}$  akustische Resonanz in der Gesamtdomain auftritt.

Bei der Simulation ohne Gleichströmung ( $Ma0nr$ ) werden die 1DCV-Domains und die 3DFV-Domain mit einem Druck von  $p_{init} = 10^5 \text{ Pa}$ , einer Strömungsgeschwindigkeit von  $c_{init} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sowie einer Temperatur von  $T_{init} = 293,15 \text{ K}$  initialisiert. Die Initialisierung und Bestimmung der Randbedingungen der turbulenten Größen erfolgt wie zuvor in Abs. 7.8.1. Bei den Simulationen mit Gleichströmung ( $Ma2,3 \cdot 10^{-2}nr$  bzw.  $Ma2,3 \cdot 10^{-2}p$ ) werden wiederum zunächst stationäre Simulationen der 3DFV-Domain durchgeführt. Die anschließende Initialisierung der 1DCV-Domains und der 3DFV-Domain erfolgt wie in Abs. 7.8.4 erläutert. Das Rechenetz an der Rohrwand wurde so generiert, dass sich bei einer Machzahl von  $\overline{Ma} = 2,3 \cdot 10^{-2}$  dimensionslose Wandabstände von  $y^+ = 30 \dots 31$  ergeben. Für alle drei Varianten wird das selbe Netz verwendet.

## 8.2. Anforderungen an die 3DFV-Domain

Wie bereits erwähnt, bestehen einige Voraussetzungen an die FV-Domain zur sinnvollen und prinzipgemäßen Anwendung der entwickelten Kopplungsmethode. Diese werden im Folgenden noch einmal zusammenfassend verdeutlicht.

### 8.2.1. Strömungsfeld

Die entwickelte Methode zur Kopplung von dreidimensionalen und eindimensionalen Domains ist nur im Bereich quasi-eindimensionaler Strömung und ebener Wellenausbreitung sinnvoll einsetzbar. Findet an der Kopplungsstelle räumliche Strömung oder Wellenausbreitung statt, so werden diese Effekte durch die Reduktion auf eine Dimension zwangsläufig unterdrückt. Weiterhin ist eine Störung der dreidimensionalen Domain in diesem Bereich nicht auszuschließen: räumliche Effekte, die in der dreidimensionalen Domain lediglich auf einem Teil der Grenzfläche zwischen 1D und 3D stattfinden, erzeugen durch den Übergang in die eindimensionale Domain, in der zwangsläufig ein homogener Zustand über den Querschnitt herrscht, Rückwirkungen auf die dreidimensionale Domain entlang der gesamten Kopplungsfläche.

Im Kontext der gekoppelten Simulation von Fluidenergiemaschinen und Anlagen bedeutet dies, dass die Kopplungsstelle in einem Bereich des jeweiligen Rohrleitungssystems platziert werden muss, an dem räumliche Effekte der gekoppelten Fluidenergiemaschine abgeklungen sind. Die dreidimensionale Domain muss also einen gewissen Teil der Anlage umfassen, so dass an der Kopplungsstelle ausschließlich quasi-eindimensionale Strömung und ebene Wellenausbreitung stattfindet. Die erforderliche Länge der Rohrleitung in der 3D-Domain hängt jeweils vom spezifischen Anwendungsfall ab.

### 8.2.2. Netztopologie

Weiterhin erfordert die entwickelte Kopplungsmethode einige topologische Voraussetzungen an das Rechnernetz der dreidimensionalen Domain. Im Bereich der Kopplungsstelle muss das Netz eine äquidistante räumliche Auflösung in Wellenausbreitungsrichtung aufweisen, da nur so ein konstanter numerischer Phasenwinkel existiert, an den die eindimensionale Domain angepasst werden kann. Auch im Inneren der Domain sollten Sprünge in der räumlichen Auflösung vermieden werden. Jede starke Änderung der räumlichen Auflösung stellt einen Sprung in der numerischen Impedanz dar und führt daher zu potentiellen rein numerisch bedingten Reflexionen. Änderungen der räumlichen Auflösung sollten daher auch im Inneren der Domain möglichst kontinuierlich gestaltet werden.

Zudem ist es erforderlich, dass im Bereich der Kopplungsstelle die Zellflächen in Wellenausbreitungsrichtung orthogonal zu dieser ausgerichtet sind. Aufgrund der Verwendung von Überlappzellen muss

diese Orthogonalität der Zellflächen mindestens soweit gewährleistet sein, wie die Überlappzellen in die Domain hineinragen. Der Bereich einer Kopplungsstelle des dreidimensionalen Netzes des hier untersuchten Testfalls, das die genannten topologischen Voraussetzungen erfüllt, ist zur Veranschaulichung in **Abb. 8.2** dargestellt.

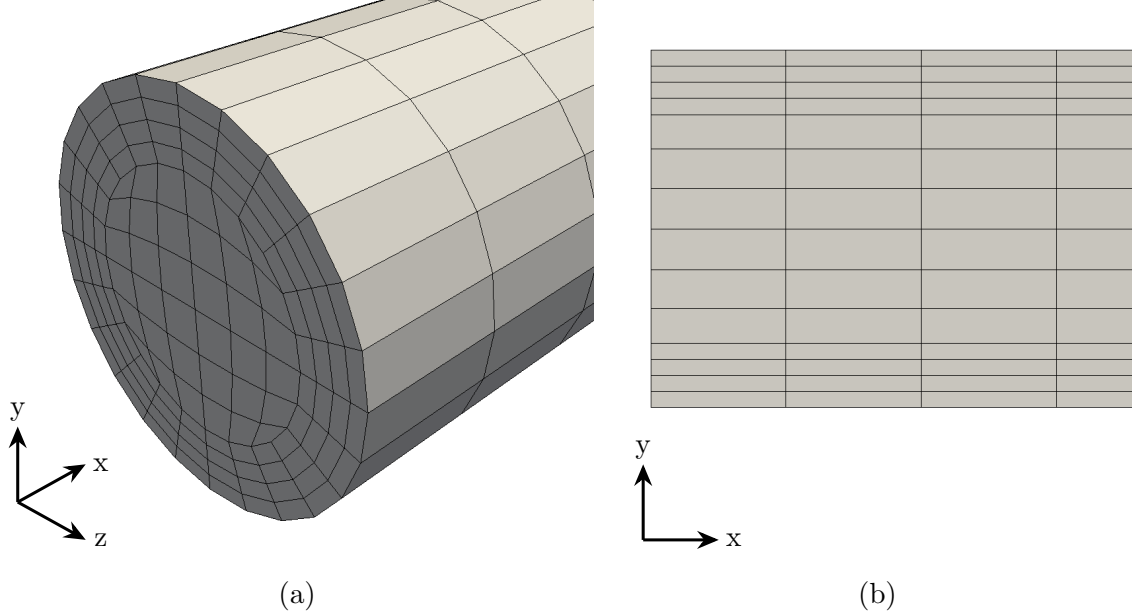


Abbildung 8.2.: Randbereich eines Rechnetz für gekoppelte Simulationen in isometrischer (a) und Schnittansicht (b).

### 8.3. Bestimmung der Parameter der 1DCV-Domain

Im Folgenden wird die Bestimmung der numerischen Parameter der gekoppelten 1DCV-Domains anhand der gegebenen Parameter der 3DFV-Domain demonstriert. Für die Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten  $\alpha_{num}$  ist ausschließlich die räumliche Auflösung in Wellenausbreitungsrichtung (x-Richtung in Abb. 8.2) relevant. Die räumliche Schrittweite in x-Richtung ist in diesem Fall zur Vereinfachung am Eintritt und am Austritt der 3DFV-Domain identisch, so dass die nachfolgenden Ausführungen für beide 1DCV-Domains gelten. Die 3DFV-Domain weist in axiale Richtung eine räumliche Auflösung von  $\Delta x = 0,02 \text{ m}$  auf. Der gewählte Zeitschritt beträgt  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ , so dass sich (für Simulationen ohne Gleichströmung) eine CFL-Zahl in der FV-Domain von  $CFL_{FV} = 0,172$  ergibt. Der Gewichtungsfaktor der Zeitintegration wird exemplarisch zu  $\Theta = 0,55$  gewählt. Da die Grundharmonische die dominante Amplitude der Anregung darstellt, wird die Anpassung der numerischen Dämpfungskonstanten für die Frequenz der Grundharmonischen von  $f_G = 300 \text{ Hz}$  durchgeführt, vgl. Abs. 7.7.4.

Zunächst ist der numerische Phasenwinkel der Grundharmonischen in der FV-Domain  $\varphi_{num,FV,G}$  und die zugehörige numerische Dämpfungskonstante  $\alpha_{num,FV,G}$  zu bestimmen. Der numerische Phasenwinkel ergibt sich nach Gl. (2.78). Zur Bestimmung der numerischen Dämpfungskonstante ist der

Diffusionsfehler  $\epsilon_{d,FV}(\varphi_{num,FV,G}, CFL_{FV})$  erforderlich. Dieser lässt sich für das hier verwendete FV-Schema mit Hilfe von Gl. (7.50) oder numerisch-experimentell ermitteln, vgl. Abs. 7.5. Die numerische Dämpfungskonstante kann anschließend nach Gl. (7.25) bestimmt werden. Die Parameter für die drei untersuchten Varianten sind in **Tab. 8.2** zusammengefasst.

	$\varphi_{num,FV,G}$ [°]	$\epsilon_{d,FV}(\varphi_{num,FV,G}, CFL_{FV})$ [-]	$\alpha_{num,FV,G}$ [ $\frac{1}{m}$ ]
$Ma0nr$	6,29	0,99998225	0,005154
$Ma2, 3 \cdot 10^{-2}nr$	6,15	0,99998302	0,005037
$Ma2, 3 \cdot 10^{-2}p$	6,29	0,99998225	0,005154

Tabelle 8.2.: Numerische Parameter der FV-Domain für die drei Varianten des generischen Testfalls.

Die Machzahl der Gleichströmung wurde zur Bestimmung der aufgeführten Parameter ausschließlich bei der Variante  $Ma2, 3 \cdot 10^{-2}nr$  berücksichtigt, da sich die akustischen Wellen im Fall einer reflexionsfreien Randbedingung lediglich in eine Richtung ausbreiten. Im Fall einer reflektierenden Randbedingung (wie beispielsweise einem konstanten Druck) existieren hin- und rücklaufende Wellen mit jeweils unterschiedlichen akustischen und damit numerischen Parametern  $k$ ,  $\varphi_{num}$ ,  $CFL$ ,  $\epsilon_d$  sowie  $\alpha_{num}$  in und entgegen der Strömungsrichtung. Daher wird in diesem Fall die Machzahl bei der Bestimmung der Kopplungsparameter nicht berücksichtigt, um einen Kompromiss für die hin- und rücklaufenden Wellen zu treffen, vgl. Abs. 7.7.2.

Nun ist diejenige räumliche Auflösung für die IDCV-Domain zu bestimmen, bei der die numerischen Dämpfungskonstanten in beiden Domains identisch sind ( $\alpha_{num,FV,G} = \alpha_{num,CV,G}$ ). Dazu ist das folgende Gleichungssystem nach  $CFL_{CV}$  und  $\varphi_{num,CV}$  zu lösen, vgl. Abs. 7.7.1.

$$\begin{aligned}
 CFL_{CV} &= -\frac{k_{G,num,CV}}{\varphi_{num,CV} \cdot \alpha_{num,FV}} \ln(\epsilon_{d,CV}) \\
 CFL_{CV} &= a_{num,CV} (1 + \overline{Ma}) \frac{\Delta t}{\varphi_{num,CV}} k_{G,num,CV}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Da sich das Gleichungssystem (8.1) aufgrund der gegenseitigen Abhängigkeiten der Parameter nicht explizit nach den gesuchten Größen  $CFL_{CV}$  und  $\varphi_{num,CV}$  umformen lässt, kann die Lösung bspw. iterativ durchgeführt werden. Der Diffusionsfehler der CV-Domain  $\epsilon_{d,CV}(\varphi_{num,CV,G}, CFL_{CV})$  kann dabei mithilfe von Gl. (7.42) oder numerisch-experimentell ermittelt werden.

Abschließend ist der Skalierungskoeffizient der Schallgeschwindigkeit für die CV-Domain  $\zeta_{a,CV}$  zu bestimmen. Dieser ergibt sich zu

$$\zeta_{a,CV} = \frac{1}{(1 + \zeta_{\overline{Ma}} \cdot \overline{Ma})}, \tag{8.2}$$

wobei der Skalierungskoeffizient für das verwendete CV-Schema  $\zeta_{\overline{Ma}} = 0,6$  beträgt, vgl. Abs. 7.5.3. Die resultierenden Werte für die CV-Domain sind in **Tab. 8.3** zusammengefasst. Mit den dargestellten Parametern zur Erzielung minimaler Reflexionen werden die Simulationen der oben vorgestellten Modellvarianten durchgeführt.

	$\varphi_{num,CV,G}$ [°]	$\epsilon_{d,CV}(\varphi_{num,CV,G}, CFL_{CV})$ [-]	$\Delta x_{CV}$ [m]	$CFL_{CV}$ [-]	$\zeta_{a,CV}$
<i>Ma0nr</i>	1,188	0,99998231	0,003775	0,9095	1
<i>Ma2,3 · 10<sup>-2</sup>nr</i>	1,188	0,99998231	0,003862	0,9095	0,9864
<i>Ma2,3 · 10<sup>-2</sup>p</i>	1,188	0,99998231	0,003775	0,9095	1

Tabelle 8.3.: Numerische Parameter der angepassten CV-Domain für die drei Varianten des generischen Testfalls.

## 8.4. Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Simulationen der drei Modellvarianten dargestellt und analysiert. Die Ergebnisse der Variante *Ma0nr* sind in **Abb. 8.3** und **Abb. 8.4** dargestellt. Die dargestellten Verläufe des statischen Druckes in Abb. 8.3 stellen die gekoppelte Gesamtdomain dar und sind aus den Verläufen in der 3DFV-Domain und den beiden 1DCV-Domains zusammengestellt. Der dargestellte Druck in der 3DCV-Domain wurde dazu über den Querschnitt massenstromgewichtet gemittelt.

Die Druckverläufe sind für vier verschiedene äquidistante Phasen dargestellt. Es zeigt sich ein kontinuierlicher Verlauf des Druckes über die gesamte Länge der gekoppelten Domain. Ein Vergleich der Druckverläufe untereinander macht die geringen auftretenden Reflexionen sowohl an der Kopplungsstelle als auch an der Randbedingung deutlich. Die Wellen verschieben sich mit zunehmender Phase entlang der axialen Position, wobei sich die Wellenform nur unwesentlich ändert. Dieses Verhalten weist auf eine durchlaufende Welle hin. Eine leichte Veränderung der Wellenform ist jedoch entlang der Wellenausbreitung ersichtlich. Dies ist auf die Dämpfung der Wellen zurückzuführen. Die Oberschwingungen werden grundsätzlich stärker gedämpft als die Grundharmonische. Dies äußert sich durch die erkennbare Abnahme der Welligkeit der Verläufe innerhalb einer Wellenlänge.

Die Strömungsgeschwindigkeit ist in Abb. 8.4 in Form von Farbkarten in der x-y-Ebene im Schnitt durch die Rohrachse dargestellt. Die Geschwindigkeitsverläufe sind ausschließlich für die physikalische 3DFV-Domain ohne Überlappzellen ( $0,86 \text{ m} \leq x \leq 1,7 \text{ m}$ ) und ebenfalls für die gleichen vier Phasen wie zuvor die Druckverläufe dargestellt. Es zeigt sich der zuvor in Abs. 7.8.5 beobachtete konstante Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit über dem Querschnitt, der sich bei reiner Akustik ohne Gleichströmung einstellt. Ein Vergleich der Geschwindigkeitskarten für die unterschiedlichen Phasen untereinander zeigt - wie zuvor bei dem Druck - ein reines Fortschreiten der Wellen entlang der Rohrleitung. Ein Vergleich von Druck- und Geschwindigkeitsverläufen macht weiterhin deutlich, dass sich der Druck und die Schallschnelle in Phase befinden. Dies ist bei rein durchlaufenden Wellen ohne Reflexionen der Fall.

Die Ergebnisse der Variante *Ma2,3 · 10<sup>-2</sup>nr* sind in **Abb. 8.5** und **Abb. 8.6** ebenfalls in Form von Druckverläufen und Farbkarten der Strömungsgeschwindigkeit abgebildet. Hinsichtlich der Drücke zeigen sich praktisch die gleichen Wellenformen wie zuvor bei *Ma0nr*. Die durchlaufenden Wellen

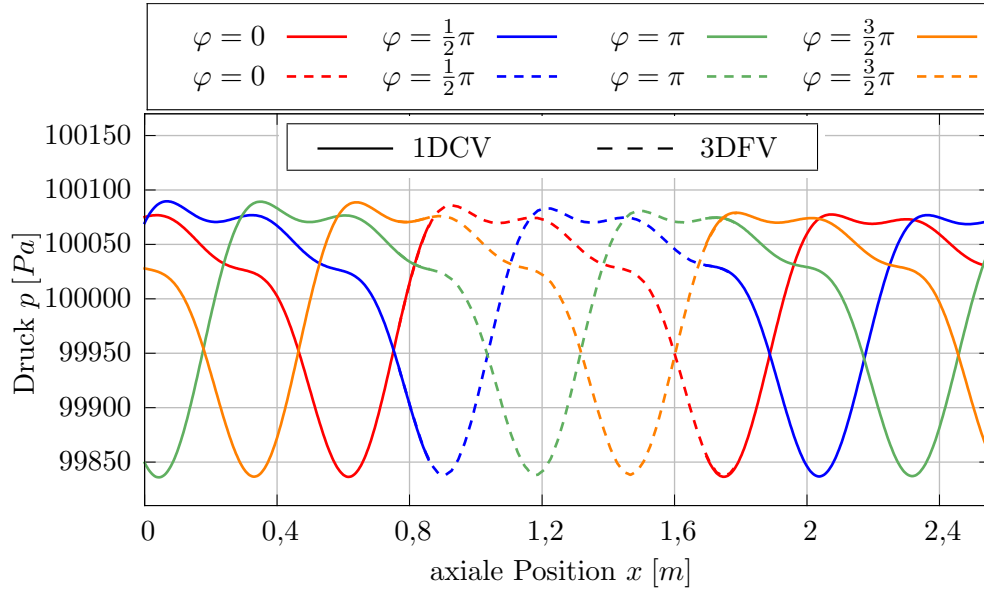


Abbildung 8.3.: Druckverlauf entlang der Gesamtdomain bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma0nr$ .

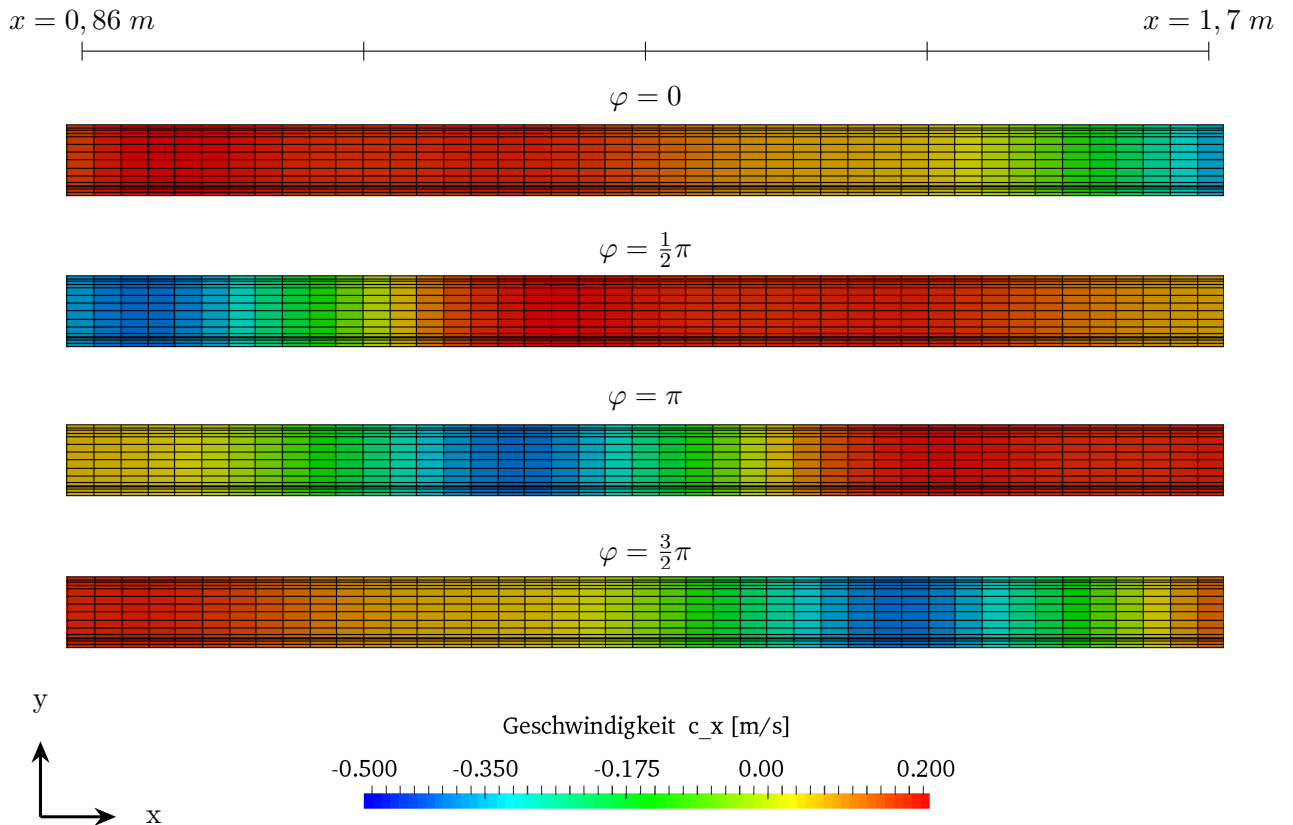


Abbildung 8.4.: Axiale Strömungsgeschwindigkeit  $c_x$  bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma0nr$ .



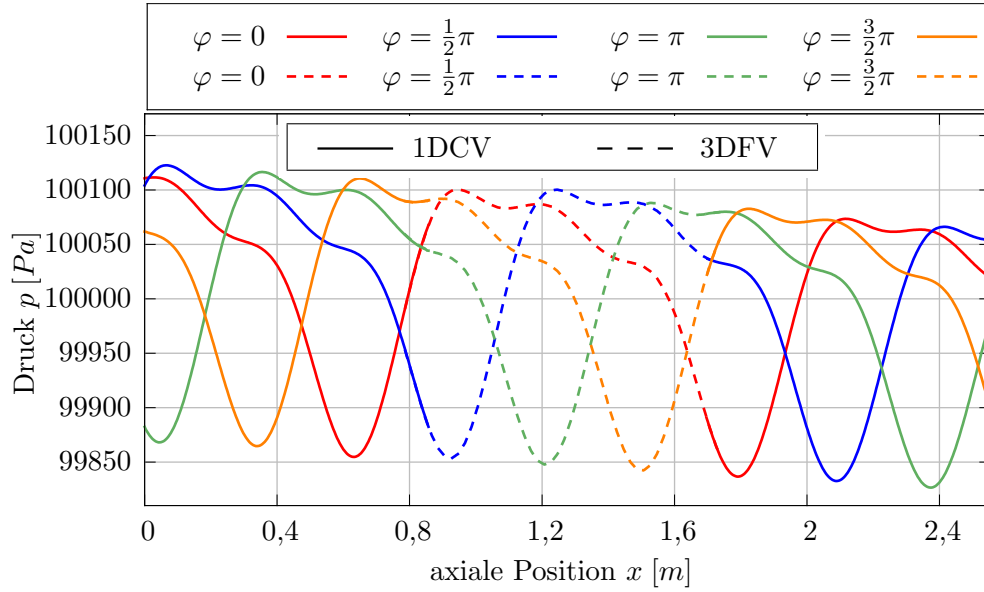


Abbildung 8.5.: Druckverlauf entlang der Gesamtdomain bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma2,3 \cdot 10^{-2}nr$ .

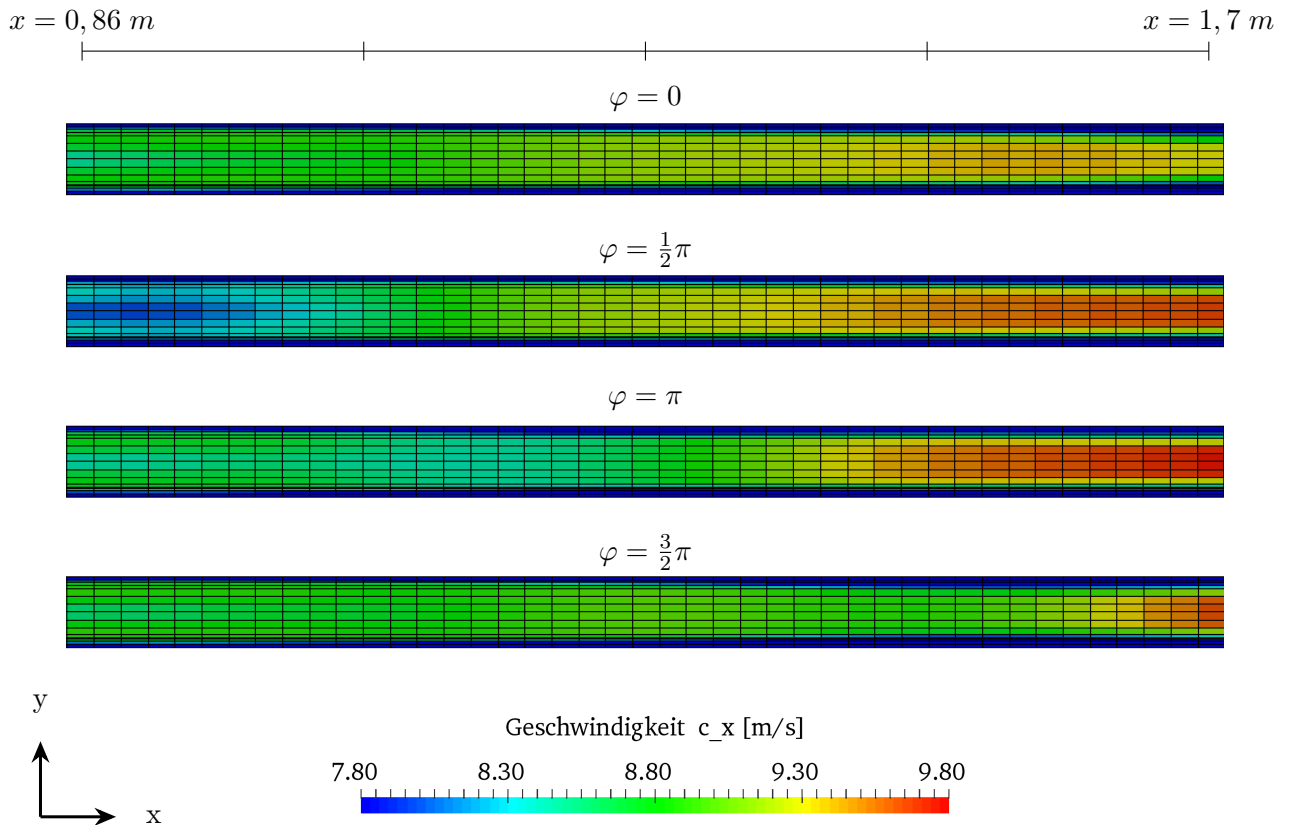


Abbildung 8.6.: Axiale Strömungsgeschwindigkeit  $c_x$  bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma2,3 \cdot 10^{-2}nr$ .

verschieben sich mit zunehmender Phase entlang der Domain und die sichtliche Abnahme der Oberschwingungen lässt sich ebenfalls wiedererkennen. Der wesentliche Unterschied im Verlauf der statischen Drücke liegt in der Abnahme des Gleichanteils entlang der Domain und damit in Richtung der Gleichströmung. Dies war zu erwarten, da durch Rohrreibung bei der vorgegebenen mittleren Strömungsgeschwindigkeit von  $\bar{c} = 8 \frac{m}{s}$  ein kontinuierlicher Totaldruckverlust entsteht, der sich durch eine Abnahme des mittleren statischen Druckes entlang der Rohrachse äußert. Ein Vergleich der Druckverläufe für  $Ma_{0nr}$  und  $Ma_{2,3 \cdot 10^{-2}nr}$  zeigt weiterhin leicht unterschiedliche Wellenlängen. Die Wellenlänge bei der Simulation mit  $\overline{Ma} = 0,023$  ist durch die Überlagerung der Gleichströmung bei identischen Anregungsfrequenzen leicht größer, vgl. Abs. 2.2.1.

Anhand der Farbkarten der Strömungsgeschwindigkeiten in Abb. 8.6 wird zunächst das ebenfalls zuvor in Abs. 7.8.5 beobachtete Strömungsprofil über dem Querschnitt bei einer pulsierenden Strömung deutlich. Zugunsten der besseren Differenzierbarkeit ist lediglich der Bereich von  $7,8 \frac{m}{s} \leq c_x \leq 9,8 \frac{m}{s}$  in der Farbskala enthalten. Die Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit in Wandnähe wird jedoch zu jeder Phase in jedem Bereich der Domain deutlich. Der Verlauf der Geschwindigkeitsfelder mit zunehmender Phase lässt wiederum den durchlaufenden Wellencharakter erahnen, wobei dieser in diesem Fall aufgrund der überlagerten Gleichströmung etwas schwieriger zu erkennen ist.

Ein Vergleich der Druck- und Geschwindigkeitsfelder zeigt erneut, dass sich der Schalldruck und die Schallschnelle in Phase befinden. Auch diese Beobachtung wird durch die überlagerte Gleichströmung etwas erschwert, da die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in Strömungsrichtung im Gegensatz zu dem statischen Druck leicht zunimmt. Dies resultiert aus der reibungsbedingten Abnahme des statischen Druckes und der damit einhergehenden Abnahme der Dichte. Aufgrund der Kontinuitätsbedingung erhöht sich somit die Strömungsgeschwindigkeit. Daher werden die Minima der Schnelle am Eintritt der Domain und die Maxima am Austritt der Domain deutlicher sichtbar.

Die Ergebnisse der Variante  $Ma_{2,3 \cdot 10^{-2}p}$  sind in **Abb. 8.7** und **Abb. 8.8** dargestellt. In diesem Fall - mit einer konstanten Druckvorgabe am Austritt sowie der Geschwindigkeitsvorgabe am Eintritt - befindet sich das System in Resonanz. Die Gesamtlänge der gekoppelten Domains von  $l_{ges} = 2,55 m$  liegt nahe einem ungeraden Vielfachen eines Viertels der Wellenlänge der Grundfrequenz von  $9 \cdot \frac{\lambda_G}{4} = 2,58 m$  sowie der zweiten Oberschwingung von  $27 \cdot \frac{\lambda_G}{4} = 2,58 m$ . Diese Frequenzanteile überlagern sich nach der Reflexion an den Enden der Domain somit konstruktiv. Demgegenüber liegt  $l_{ges}$  ebenfalls nahe eines Vielfachen der halben Wellenlänge der ersten Oberschwingung. Dieser Frequenzanteil überlagert sich daher destruktiv.

Der Resonanzfall wird unmittelbar an dem dargestellten Wertebereich sowohl des Druckes in Abb. 8.7 als auch der Geschwindigkeit in Abb. 8.8 deutlich. Der Scheitelwert des Schalldruckes beträgt ein Vielfaches des Scheitelwertes der Anregung bzw. der durchlaufenden Wellen in Abb. 8.3 bzw. Abb. 8.5. Gleiches gilt für die Geschwindigkeit. Der dargestellte Wertebereich, der in erster Näherung (unter Vernachlässigung der Zunahme der Gleichströmung entlang der Domain) dem Scheitelwert der Schnelleschwankung entspricht, ist ebenfalls um ein Vielfaches größer als der Scheitelwert der Anregung, vgl. Tab. 8.1.

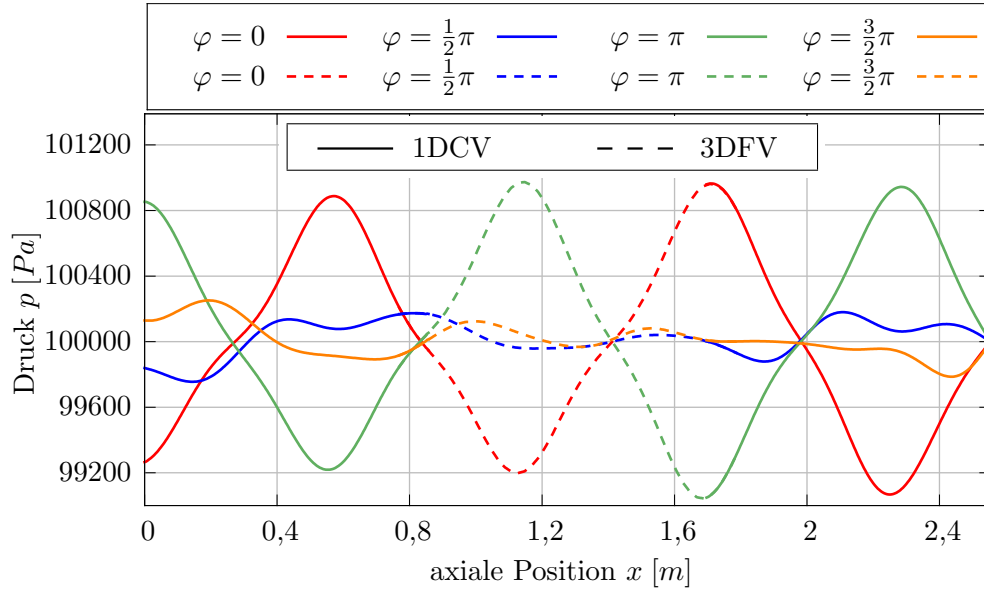


Abbildung 8.7.: Druckverlauf entlang der Gesamtdomain bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma2, 3 \cdot 10^{-2}p$ .

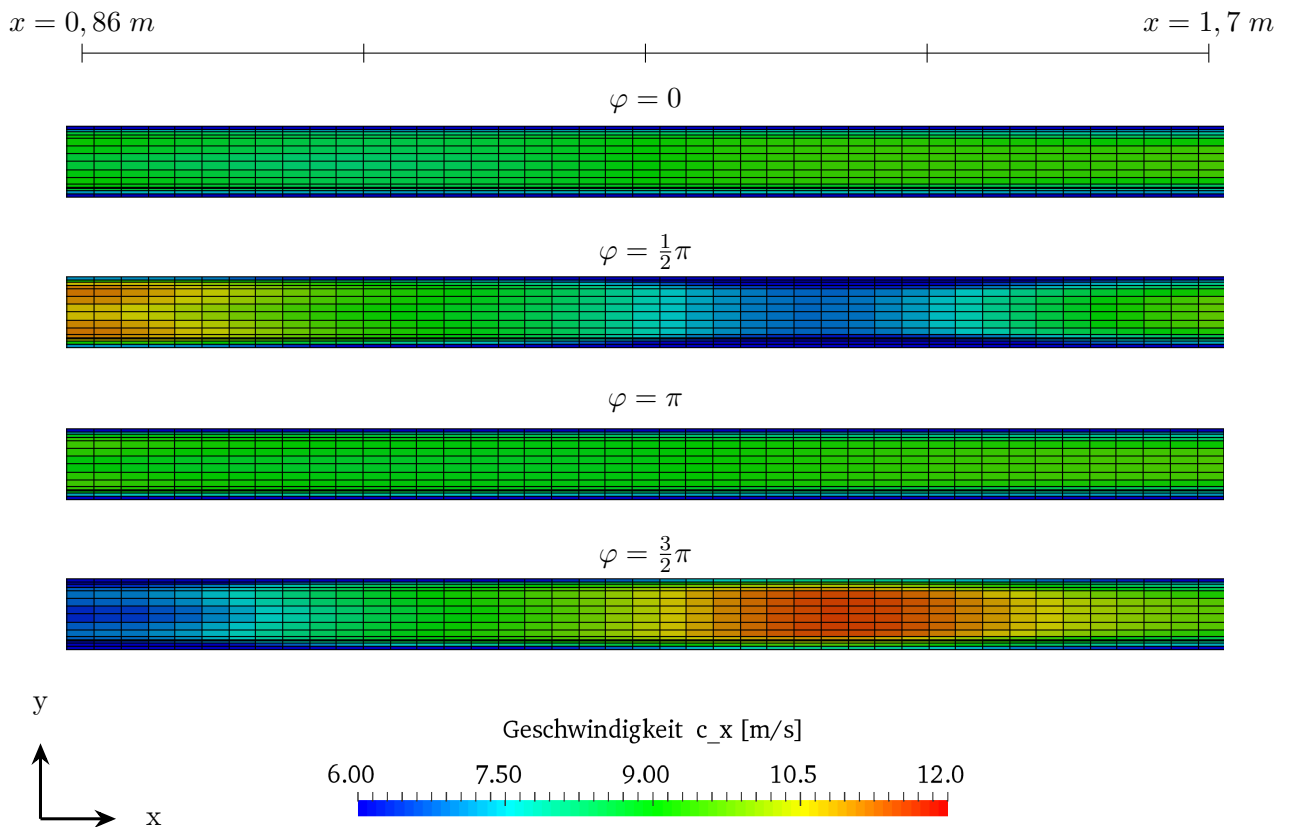


Abbildung 8.8.: Axiale Strömungsgeschwindigkeit  $c_x$  bei gekoppelter 1DCV/3DFV/1DCV-Simulation für die Variante  $Ma2, 3 \cdot 10^{-2}p$ .

Ein weiteres Charakteristikum einer stehenden Welle wird bei einem Vergleich der Druckverläufe mit den Geschwindigkeitsfeldern deutlich. In einem von stehenden Wellen dominierten akustischen Feld besteht zwischen Schalldruck und Schallschnelle ein Phasenversatz von  $\Delta\varphi_{pc} = 90^\circ \hat{=} \frac{1}{2}\pi$ . Bei den Druckverläufen in Abb. 8.7 treten ausgeprägte Maxima und Minima bei  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \pi$  auf, während der Druck bei  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  bzw.  $\varphi = \frac{3}{2}\pi$  nur vergleichsweise kleine Schwankungen innerhalb der Domain aufweist. Demgegenüber sind die Maxima und Minima der Strömungsgeschwindigkeit und damit der Schallschnelle in Abb. 8.8 bei  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  bzw.  $\varphi = \frac{3}{2}\pi$  zu erkennen und damit um  $\Delta\varphi_{pc} \approx \frac{1}{2}\pi$  zu dem Schalldruck phasenversetzt. Gleichermaßen korreliert ein vergleichsweise homogenes Geschwindigkeitsfeld entlang der Domain zeitlich mit den Maxima und Minima des Schalldruckes.

Anhand der durchgeführten Testfälle konnte gezeigt werden, dass die entwickelte reflexionsfreie Kopplungsmethode zur Einbettung dreidimensionaler Domains mit turbulenten, pulsierenden Strömungen in reduzierte, eindimensionale Domains geeignet ist. Die Rückwirkungen der eindimensionalen Domains werden dabei in der dreidimensionalen Domain vollständig erfasst. Gleichermaßen lässt sich die reflexionsfreie Kopplungsmethode in Verbindung mit der entwickelten reflexionsfreien Randbedingung verwenden, um unerwünschte Rückwirkungen aus Teilbereichen einer eindimensionalen Domain zu vermeiden.

## 8.5. Übertragung auf die gekoppelte Simulation von Fluidenergiemaschinen und Anlagen

Anhand der dargestellten Testfälle lassen sich die Möglichkeiten der entwickelten Methoden sowie typische Anwendungsfälle erläutern. Für praktische Anwendungen wird durch die 3DFV-Domain üblicherweise eine Fluidenergiemaschine oder eine andere pulsationsanregende Komponente modelliert. Die Variante des Testfalls mit reflektierenden Randbedingungen ( $Ma2, 3 \cdot 10^{-2}p$ ) ist eine typische Konfiguration für die Simulation von Strömungsmaschinen unter Berücksichtigung von instationären Rückwirkungen der angeschlossenen Anlage. Durch die angeschlossenen eindimensionalen Domains können aufgrund der reduzierten Modellierungstiefe auch komplexe Anlagen mit vertretbarem numerischen Aufwand modelliert und simuliert werden. Insbesondere im hier dargestellten Resonanzfall können die durch die Maschine angeregten und die Anlage erheblich verstärkten Pulsationen das Betriebsverhalten der Maschine beeinflussen. Mithilfe der entwickelten reflexionsfreien Kopplungsmethode können in diesem Kontext kritischen Resonanzfälle identifiziert sowie das Maschinenverhalten in derartigen Betriebszuständen untersucht werden.

Für die Anwendung der reflexionsfreien Kopplungsmethode in Verbindung mit der entwickelten reflexionsfreien Randbedingung lassen sich zwei typische Anwendungsfälle anführen: Zum einen kann die reflexionsfreie Randbedingung eingesetzt werden, wenn an einer Stelle der an die zu untersuchende Maschine angeschlossenen Anlage eine lange Rohrleitung existiert. Ist diese Rohrleitung

so lang, dass praktisch keine Reflexionen zurück in den relevanten Teil der Anlage gelangen, so lässt sich hier die reflexionsfreie Randbedingung vorsehen. Dadurch werden unphysikalische und unerwünschte Reflexionen (bspw. durch Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen) an dieser Stelle vermieden.

Zum Anderen können die entwickelten Methoden verwendet werden, um die reine Pulsationsanregung einer Fluidenergiemaschine zu simulieren. Dazu wird die die Maschine repräsentierende dreidimensionale Domain beidseitig in eindimensionale Domains eingebettet, bei denen jeweils auf der maschinenabgewandten Seite die reflexionsfreie GMW-Randbedingung vorgesehen wird. Mit einer derartigen Konfiguration lässt sich die ungestörte Anregung durch die Fluidenergiemaschine ermitteln, die ein universelles Charakteristikum der betreffenden Maschine ist. Durch die Möglichkeit der Vorgabe sowohl eines mittleren Druckes als auch alternativ einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit an der entwickelten reflexionsfreien Randbedingung, kann auch ohne Reflexionen an den Grenzen der Gesamtdomain die klassische Konfiguration zur numerischen Simulation von Fluidenergiemaschinen - Druckvorgabe am Austritt und Geschwindigkeitsvorgabe am Eintritt - realisiert werden. Somit kann die Anregung einer zu untersuchenden Maschine in beliebigen, definierten Betriebspunkten analysiert werden.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

Das übergeordnete Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer integralen Methode zur gekoppelten Strömungssimulation von Fluidenergiemaschinen in Rohrleitungssystemen. Mit dieser Methode können die instationären Wechselwirkungen zwischen Maschinen und Anlagen und dabei insbesondere der Einfluss der Rückwirkungen der Anlage auf das Betriebsverhalten von Fluidenergiemaschinen simuliert und analysiert werden. Dabei wird der Ansatz verfolgt, Maschinen mit einem detaillierten dreidimensionalen Modell und angeschlossene Rohrleitungssysteme mit reduzierten eindimensionalen Modellen abzubilden. Um die instationären Wechselwirkungen zu erfassen, ist eine simultane Simulation mit zeitechter Zwei-Wege-Kopplung der Modelle erforderlich. Dazu wird eine reflexionsfreie Kopplungsbedingung der Modelle benötigt, welche eine der in dieser Arbeit entwickelten Simulationsmethoden darstellt. Weiterhin ist zur Simulation von Teilbereichen von Rohrleitungssystemen oder zur Analyse der reinen Anregung von Fluidenergiemaschinen eine reflexionsfreie Randbedingung mit gleichzeitiger Vorgabe einer gemittelten Strömungsgröße (Druck oder Strömungsgeschwindigkeit) erforderlich. Diese stellt die andere in dieser Arbeit entwickelte Simulationsmethode dar.

Zur instationären Strömungssimulation von Rohrleitungssystemen im Zeitbereich sind Charakteristiken-basierte Finite-Differenzen-Verfahren in Forschung und Praxis etabliert. Daher ist die neu entwickelte reflexionsfreie Randbedingung als charakteristische Randbedingung formuliert. Zur Realisierung der Reflexionsfreiheit bei gleichzeitiger Vorgabe einer mittleren Strömungsgröße wird eine charakteristische Randbedingung mit Überlagerung eines Tiefpass-Filters umgesetzt und analysiert. Da Fluidenergiemaschinen typischerweise tonal geprägte Anregungsspektren erzeugen, wird als Filter der gleitende Mittelwert gewählt, der ein frequenzselektives Filterverhalten aufweist. Ein gleitender Mittelwert ist einfach zu implementieren und neigt aufgrund seiner nicht-rekursiven Formulierung - im Gegensatz zu rekursiven Filtern - nicht zu Instabilitäten, was im Kontext numerischer Strömungssimulation eine wichtige Eigenschaft ist. Die in dieser Arbeit entwickelte reflexionsfreie Randbedingung weist sowohl hinsichtlich der Einhaltung der mittleren Strömungsgrößen als auch hinsichtlich der Reflexionen die geforderten Eigenschaften auf. Die Kombination dieser beiden Eigenschaften grenzt die neu entwickelte filterbasierte reflexionsfreie charakteristische Randbedingung vom bisherigen Stand der Technik ab, bei dem stets ein Kompromiss aus beiden Anforderungen getroffen werden musste.

Für die dreidimensionale Strömungssimulation von Fluidenergiemaschinen im Zeitbereich sind Finite-Volumen-Verfahren heutzutage etabliert. Daher wird die Kopplungsmethode dahingehend entwickelt, dass Domains mit unterschiedlichen numerischen Schemata und unterschiedlichen Anzahlen an räumlichen Dimensionen gekoppelt werden können. Der grundlegende Ansatz zur Kopplung numerischer Schemata ist die Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften der gekoppelten Domains unter Berücksichtigung der numerischen Dämpfung. Dies wird über eine Analyse und Anpassung der

spektralen numerischen Fehler realisiert. Für Pulsationen bei kleinen akustischen Machzahlen werden Reflexionen an der Kopplungsstelle mit der entwickelten Methode nahezu eliminiert. Mit zunehmender akustischer Machzahl nimmt die Wirksamkeit der entwickelten Methodik ab, wobei die Reflexionen an der Kopplungsstelle im Rahmen der durchgeführten Parametervariationen stets deutlich unter einem Prozent bleiben. Bei durchlaufenden Wellen ist die Kopplungsmethode auch bei vorhandener Gleichströmung verwendbar. Die Machzahl zeigt keinen signifikanten Einfluss auf die Reflexionen an der Kopplungsstelle. Treten Reflexionen im System auf und existieren dadurch hin- und rücklaufende (und damit stehende) Wellen an der Kopplungsstelle, so können die Domains nur an den hin- oder rücklaufenden Teil der akustischen Wellen angepasst werden. In diesem Fall nehmen die Reflexionen mit der Machzahl der Gleichströmung zu.

Durch die Entwicklung und Analyse der Kopplungsmethode wird erstmals eine allgemeingültige Beschreibung der Entstehungsmechanismen von Reflexionen und deren Einflussparameter bei der Kopplung unterschiedlicher numerischer Schemata formuliert. Aufgrund der Konzeption der Kopplungsmethode ist diese zudem derart formuliert, dass sie auf beliebige Schemata anwendbar ist. Die entwickelte reflexionsfreie Kopplungsbedingung weist im Rahmen der untersuchten Parametervariation Reflexionen auf, die in der Regel kleiner als ein Prozent und damit praktisch vernachlässigbar klein sind. Aufgrund der inhärenten Eigenschaften numerischer Schemata, lässt sich die Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften ausschließlich für eine Frequenz durchführen. Es konnte jedoch gezeigt werden, dass auch im angrenzenden Frequenzbereich niedrige Reflexionen erreicht werden.

Anhand von Testfällen wurde gezeigt, dass die entwickelte reflexionsfreie Rand- und Kopplungsbedingung bei turbulenten, dreidimensionalen Strömungssimulationen mit Wirbelviskositätsmodellen kombiniert anwendbar sind. In nachfolgenden Arbeiten könnte hinsichtlich der reflexionsfreien Randbedingung beispielsweise die Überlagerung komplexerer Filtercharakteristiken untersucht werden. Somit ließe sich möglicherweise die frequenzselektive Charakteristik der in dieser Arbeit entwickelten Randbedingung auf die Anwendung bei breitbandigen Signalen erweitern. Dies könnte beispielsweise bei Strömungssimulation mit einer teilweisen (LES) oder vollständigen (DNS) Auflösung von Turbulenzen erforderlich sein. Auch für die entwickelte Kopplungsbedingung besteht Potential, die Methode hinsichtlich der Anwendung bei breitbandigen Signalen zu erweitern und zu optimieren. Zudem zeigt sich, dass neben der Anpassung der Wellenausbreitungseigenschaften in den gekoppelten Domains auch die Art der Übergabe der Strömungsgrößen an der Kopplungsstelle Einfluss auf die resultierenden Reflexionen ausübt. In nachfolgenden Arbeiten könnten diese Wechselwirkungen tiefergehend untersucht werden.

# Literaturverzeichnis

- [AAE15] AYAD, A.F. ; ABDALLA, H.M. ; EL-AZM ALY, A.A.: Effect of semi-open impeller side clearance on the centrifugal pump performance using CFD. In: *Aerospace Science and Technology* 47 (2015), 247–255. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2015.09.033>. – DOI 10.1016/j.ast.2015.09.033. – ISBN 9780791857465
- [AHB<sup>+</sup>16] ANDRES, R. ; HESSE, J. ; BABIC, H. ; SALECKER, U. ; SPILLE-KOHOFF, A. ; NIKOLOV, A. ; BRÜMMER, A.: CFD Simulation of a twin screw expander including leakage flows. In: *23rd International Compressor Engineering Conference at Purdue*, 2016, S. 71–89
- [AK07] APPELÖ, D. ; KREISS, G.: Application of a perfectly matched layer to the nonlinear wave equation. In: *Wave Motion* 44 (2007), Nr. 7-8, S. 531–548. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.01.004>. – DOI 10.1016/j.wavemoti.2007.01.004. – ISBN 0165–2125
- [Ans18] ANSYS: *Ansys Fluent Produktseite*. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [AVL18a] AVL: *AVL BOOST Produktseite*. <https://www.avl.com/boost/>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [AVL18b] AVL: *AVL FIRE Produktseite*. <https://www.avl.com/fire/>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [BEL12] BRÜMMER, A. ; EDLERHERR, R. ; LENZ, J.: Experimental and theoretical investigation of thermoacoustic oscillations in natural gas metering stations. In: *Flow Measurement and Instrumentation* 25 (2012), S. 69–77
- [Ber94] BERENGER, J.-P.: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), Nr. 2, 185–200. <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1994.1159>. – DOI 10.1006/jcph.1994.1159. – ISBN 0021–9991
- [BLK17] BYEON, S.-S. ; LEE, J.-Y. ; KIM, Y.-J.: Performance Characteristics of a 4 × 6 Oil-Free Twin-Screw Compressor. In: *Energies* 10 (2017), Nr. 7, 945. <http://dx.doi.org/10.3390/en10070945>. – DOI 10.3390/en10070945. – ISSN 1996–1073
- [BMPB09] BOHBOT, J. ; MICHE, M. ; PACAUD, P. ; BENKENIDA, A.: Multiscale Engine Simulations using a Coupling of 0-D/1-D Model with a 3-D Combustion Code. In: *Oil & Gas Science and Technology* 64 (2009), Nr. 3, 337–359. <http://dx.doi.org/10.2516/ogst/2009007>. – DOI 10.2516/ogst/2009007. – ISSN 1294–4475



- [BR06] BRÜMMER, A. ; RIEBE, E.: Pulsation study for two 2,250 bar hyper compressors - measurement, theory, measures. In: *4th European forum for reciprocation compressors. Antwerp/Belgium* (2006)
- [CH90] CHO, H.W. ; HYUN, J.M.: Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a pipe. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 11 (1990), Nr. 4, S. 321–330. [http://dx.doi.org/10.1016/0142-727X\(90\)90056-H](http://dx.doi.org/10.1016/0142-727X(90)90056-H). – DOI 10.1016/0142-727X(90)90056-H. – ISBN 0947-7411
- [Col04] COLONIUS, T.: Modeling of artificial boundary conditions for compressible flow. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 36 (2004), Nr. 1, 315–345. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.121930>. – DOI 10.1146/annurev.fluid.36.050802.121930. – ISSN 0066-4189
- [ČST<sup>+</sup>09] ČAIKA, V. ; SAMPL, P. ; TATSCHL, R. ; KRAMMER, J. ; GREIF, D.: Coupled 1D-3D Simulation of Common Rail Injector Flow Using AVL HYDSIM and FIRE. In: *10th International Conference on Engines and Vehicles, 2009*
- [DAB14] DE ALMEIDA, J.C. ; ANTONIO VELÁSQUEZ, J. ; BARBIERI, R.: Development and experimental validation of a computational model for the analysis of transient events in a natural gas distribution network. In: *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 92 (2014), Nr. 10, 1776–1782. <http://dx.doi.org/10.1002/cjce.22024>. – DOI 10.1002/cjce.22024
- [Dei15] DEININGER, M.: *Kopplung ein- und dreidimensionaler Strömungssimulationen in der Systemhydraulik*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2015
- [DGW<sup>+</sup>13] DENG, T. ; GONG, J. ; WU, H. ; ZHANG, Y. ; ZHANG, S. ; LIN, Q. ; LIU, H.: Hydraulic Transients Induced by Pigging Operation in Pipeline with a Long Slope. In: *Journal of Applied Mathematics* 2013 (2013). <http://dx.doi.org/10.1155/2013/231260>. – DOI 10.1155/2013/231260
- [DJ06] DIAZ, J. ; JOLY, P.: A time domain analysis of PML models in acoustics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 29-32, S. 3820–3853. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.02.031>. – DOI 10.1016/j.cma.2005.02.031. – ISSN 00457825
- [DJ17] DING, H. ; JIANG, Y.: CFD simulation of a screw compressor with oil injection. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 232 (2017), 12-20. <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/232/1/012020>. – DOI 10.1088/1757-899X/232/1/012020. – ISSN 1757-8981

- [DJS12] DEININGER, M. ; JUNG, J. ; SKODA, R. ; HELLUY, P.: Evaluation of interface models for 3D-1D coupling of compressible Euler methods for the application on cavitating flows. In: *ESAIM: Proceedings*, 2012, S. 298–318
- [DO13] DOBROSERDOVA, T.K. ; OLSHANSKII, M.: A finite element solver and energy stable coupling for 3D and 1D fluid models. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 259 (2013), 166–176. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2013.03.018>. – DOI 10.1016/j.cma.2013.03.018. – ISSN 00457825
- [EM77] ENGQUIST, B. ; MAJDA, A.: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. In: *Mathematics of Computation* 31 (1977), Nr. 139, 629–651. <http://www.jstor.org><http://www.jstor.org/stable/2005997><http://www.jstor.org/page/>
- [FGNQ01] FORMAGGIA, L. ; GERBEAU, J.F. ; NOBILE, F. ; QUARTERONI, A.: On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2001), Nr. 6-7, S. 561–582. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4). – DOI 10.1016/S0045-7825(01)00302-4. – ISSN 00457825
- [FMN07] FORMAGGIA, L. ; MOURA, A. ; NOBILE, F.: On the stability of the coupling of 3D and 1D fluid-structure interaction models for blood flow simulations. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 41 (2007), Nr. 4, 743–769. <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2007039>. – DOI 10.1051/m2an:2007039. – ISSN 0764-583X
- [FMS<sup>+</sup>12] FRIEDRICH, M. ; MUNZ, C.-D. ; SKODA, R. ; IBEN, U. ; KRESCHEL, H.: 3D-1D Coupling of Compressible Density-Based CFD Solvers for Cavitating Flows. In: *Proceedings of the 8th International Symposium on Cavitation*. Singapore : Research Publishing Services, 2012. – ISBN 978-981-07-2826-7, 556–562
- [FNQV99] FORMAGGIA, L. ; NOBILE, F. ; QUARTERONI, A. ; VENEZIANI, A.: Multiscale modeling of the circulatory system: a preliminary analysis. In: *Computing and Visualization in Science* 2 (1999), S. 75–83. <http://dx.doi.org/10.1007/s007910050030>. – DOI 10.1007/s007910050030. – ISBN 1432-9360
- [FP08] FERZIGER, J.H. ; PERIC, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin Heidelberg : Springer, 2008. – ISBN 987-3-540-68228-8
- [Gü13] GÜLICH, J.F.: *Kreiselpumpen*. Berlin : Springer, 2013. – ISBN 978-3-642-40031-5
- [Gam18] GAMMA: *Gamma Technologies GT Suite Produktseite*. <https://www.gtisoft.com/>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [GB83] GOLDBERG, D.E. ; BENJAMIN WYLIE, E.: Characteristics Method Using Time-Line Interpolations. In: *Journal of Hydraulic Engineering* 109 (1983), Nr. 5, S. 670–683. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(1983\)109:5\(670\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(1983)109:5(670))

- doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(670). – DOI 10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:5(670). – ISSN 0733-9429
- [GE13] GUAILY, A.G. ; EPSTEIN, M.: Boundary conditions for hyperbolic systems of partial differential equations. In: *Journal of Advanced Research* 4 (2013), Nr. 4, 321–329. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jare.2012.05.006>. – DOI 10.1016/j.jare.2012.05.006. – ISSN 20901232
- [Gil90] GILES, M.B.: Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations. In: *AIAA Journal* 28 (1990), Nr. 12, 2050–2058. <http://dx.doi.org/10.2514/3.10521>. – DOI 10.2514/3.10521. – ISSN 0001-1452
- [Giv04] GIVOLI, D.: High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. In: *Wave Motion* 39 (2004), Nr. 4, 319–326. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2003.12.004>. – DOI 10.1016/j.wavemoti.2003.12.004. – ISSN 01652125
- [GLR05] GODLEWSKI, E. ; LE THANH, K.-C. ; RAVIART, P.-A.: The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws: II. The case of systems. In: *ESAIM: M2AN* 39 (2005), Nr. 4, 649–692. <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2005029>. – DOI 10.1051/m2an:2005029. – ISSN 0764-583X
- [GR04] GODLEWSKI, E. ; RAVIART, P.-A.: The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws: I. The scalar case. In: *Numerische Mathematik* 97 (2004), Nr. 1, 81–130. <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-002-0438-5>. – DOI 10.1007/s00211-002-0438-5. – ISSN 0029-599X
- [GTFN11] GALINDO, J. ; TISEIRA, A. ; FAJARDO, P. ; NAVARRO, R.: Coupling methodology of 1D finite difference and 3D finite volume CFD codes based on the Method of Characteristics. In: *Mathematical and Computer Modelling* 54 (2011), Nr. 7-8, 1738–1746. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2010.11.078>. – DOI 10.1016/j.mcm.2010.11.078. – ISSN 08957177
- [Haz02] HAZEWINKEL, M.: *Encyclopaedia of Mathematics*. Berlin : Springer, 2002. – ISBN 1-4020-0609-8
- [Hed79] HEDSTROM, G.W.: Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. In: *Journal of Computational Physics* 30 (1979), 222–237. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90100-1](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(79)90100-1). – DOI 10.1016/0021-9991(79)90100-1. – ISSN 00219991
- [HH99] HAYDER, M. E. ; HU, M.Y. F. Q.and H. F. Q.and Hussaini: Towards perfectly absorbing boundary conditions for Euler equations. In: *AIAA Journal* 37 (1999), Nr. 8. <http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA328117>

- [HH07] HÉRARD, J. ; HURISSE, O.: Coupling two and one-dimensional unsteady Euler equations through a thin interface. In: *Computers & Fluids* 36 (2007), Nr. 4, 651–666. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2006.03.007>. – DOI 10.1016/j.compfluid.2006.03.007. – ISSN 00457930
- [HH10] HÉRARD, J.-M. ; HURISSE, O.: Some attempts to couple distinct fluid models. In: *Networks and Heterogeneous Media* 5 (2010), Nr. 3, 649–660. <http://dx.doi.org/10.3934/nhm.2010.5.649>. – DOI 10.3934/nhm.2010.5.649. – ISSN 1556–1801
- [HI98] HAPKE, I. ; IBEN, H.K.: Modellierung und Berechnung der Kavitation in instationären Leitungsströmungen. In: *MTZ - Motortechnische Zeitschrift* 59 (1998), Nr. 1, 60–64. <http://dx.doi.org/10.1007/BF03227063>. – DOI 10.1007/BF03227063. – ISSN 0024–8525
- [Hir07] HIRSCH, C.: *Numerical computation of internal and external flow vol. 1. Fundamentals of numerical discretisation*. Bd. 1. 2nd. New York : John Wiley & Sons, Inc., 2007. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620281016>. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620281016>. – ISBN 978–0–7506–6594–0
- [Hu96] HU, F.Q.: On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer. In: *Journal of Computational Physics* 129 (1996), Nr. 1, 201–219. <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1996.0244>. – DOI 10.1006/jcph.1996.0244. – ISSN 00219991
- [Hu05] HU, F.Q.: A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for linearized Euler equations with a non-uniform mean flow. In: *Journal of Computational Physics* 208 (2005), Nr. 2, 469–492. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.028>. – DOI 10.1016/j.jcp.2005.02.028. – ISSN 00219991
- [Hue15] HUET, M.: One-dimensional characteristic boundary conditions using nonlinear invariants. In: *Journal of Computational Physics* 283 (2015), 312–328. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.12.010>. – DOI 10.1016/j.jcp.2014.12.010. – ISSN 00219991
- [Hus98] HUSTER, A.: *Untersuchung des instationären Füllvorgangs bei Schraubenmotoren*, Universität Dortmund, Dissertation, 1998
- [Ibe86] IBEN, H.K.: Ein Dämpfungsansatz der instationären Fadenströmung. In: *Wiss. Z. Techn. Hochschule Magdeburg* 30 (1986), Nr. 7, S. 106–112
- [JASG08] JAJCEVIC, D. ; ALMBAUER, R.A. ; SCHMIDT, S.P. ; GLINSNER, K.: CFD Simulation of a Real World High-Performance Two Stroke Engine with Use of a Multidimensional Coupling Methodology. In: *SAE Technical Paper 2008-32-0042*, 2008

- [KLA<sup>+</sup>14] KIM, S.G. ; LEE, J. ; AHN, Y. ; LEE, J.I. ; ADDAD, Y. ; KO, B.: CFD investigation of a centrifugal compressor derived from pump technology for supercritical carbon dioxide as a working fluid. In: *The Journal of Supercritical Fluids* 86 (2014), 160–171. <http://dx.doi.org/10.1016/j.supflu.2013.12.017>. – DOI 10.1016/j.supflu.2013.12.017. – ISSN 08968446
- [KM92] K.H., Ahn ; M.B., Ibrahim: Laminar/turbulent oscillating flow in circular pipes. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 13 (1992), Nr. 4, S. 340–346
- [KM04] KOLADE, B. ; MOREL, T.: Coupled 1-D / 3-D Analysis of Fuel Injection and Diesel Engine Combustion Song-Charng Kong. In: *SAE SP* (2004), S. 217–226
- [KSS07] KOVACEVIC, A. ; STOSIC, N. ; SMITH, I.K.: *Screw Compressors: Three Dimensional Computational Fluid Dynamics and Solid Fluid Interaction*. New York : Springer, 2007. – ISBN 3–540–36302–5
- [LB13] LINKAMP, A. ; BRÜMMER, A.: Calculation of discharge pressure pulsations of a screw compressor using the one-dimensional method of characteristics. In: *8th International Conference on Compressors and their Systems*, 2013, S. 407–416
- [LB14] LINKAMP, A. ; BRÜMMER, A.: Experimental and theoretical investigation of the excitation of discharge pressure pulsations by a screw compressor with variable inner volume ratio. In: *9th International Conference on Screw Machines*, 2014, S. 71–89
- [LeV02] LEVEQUE, R.J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. In: *Cambridge University Press* 54 (2002), 258. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511791253>. – DOI 10.1017/CBO9780511791253. – ISBN 9780521009249
- [LO13] LAURIEN, E. ; OERTEL, H.: *Numerische Stömungsmechanik*. 5. Wiesbaden : Springer, 2013. – ISBN 978–3–658–03144–2
- [Los18] LOS ALAMOS NATIONAL LABORATORY: *KIVA CFD Produktseite*. <https://www.lanl.gov/projects/feynman-center/deploying-innovation/intellectual-property/software-tools/kiva/index.php>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [LR57] LIEPMANN, W. ; ROSHKO, A.: *Elements of Gasdynamics*. 1. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1957. – 456 S. – ISBN 0 471 53460 9
- [LS17a] LI, Y. ; SAYMA, A.I.: Computational Fluid Dynamics Simulation of Surge in a Three Stage Axial Compressor. In: *International Journal of Turbines & Sustainable Energy Systems* 1 (2017), Nr. 1. <http://dx.doi.org/10.4273/ijtses.1.1.04>. – DOI 10.4273/ijtses.1.1.04

- [LS17b] LIMBACH, P. ; SKODA, R.: Numerical and Experimental Analysis of Cavitating Flow in a Low Specific Speed Centrifugal Pump With Different Surface Roughness. In: *Journal of Fluids Engineering* 139 (2017), Nr. 10, 101201. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4036673>. – DOI 10.1115/1.4036673. – ISSN 0098–2202
- [LSW09] LERCH, R. ; SESSLER, G. ; WOLF, D.: *Technische Akustik*. Bd. 53. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. – 77–92 S. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49833-9>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49833-9>. – ISBN 978–3–540–23430–2
- [MDM16] MOUKALLED, F. ; DARWISH, M. ; MANGANI, L.: *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Heidelberg : Springer, 2016. – ISBN 987–3–319–16873–9
- [Men93] MENTER, F.: Zonal Two Equation k-w Turbulence Models For Aerodynamic Flows. In: *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*. Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics, jul 1993
- [Men18] MENTOR: *Mentor FloMASTER (ehemals Flowmaster) Produktseite*. <https://www.mentor.com/products/mechanical/flomaster/flomaster/>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [Mey11] MEYER, M.: *Signalverarbeitung*. 6. Wiesbaden : Vieweg und Teubner, 2011. – 0 S. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09781107415324.004>. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09781107415324.004>. – ISBN 9788578110796
- [MGL04] MISES, R. von ; GEIRINGER, H. ; LUDFORD, G.S.S.: *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*. Mineola, New York : Dover Publications, 2004. – ISBN 978–0486439419
- [MGLS12] MEIER, E.T. ; GLASSER, A.H. ; LUKIN, V.S. ; SHUMLAK, U.: Modeling open boundaries in dissipative MHD simulation. In: *Journal of Computational Physics* 231 (2012), Nr. 7, 2963–2976. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2012.01.003>. – DOI 10.1016/j.jcp.2012.01.003. – ISSN 00219991
- [MI86] MORSE, P.M. ; INGARD, K.: *Theoretical Acoustics*. Princeton : Princeton University Press, 1986. – ISBN 0–691–08425–4
- [MN79] MEYER, E. ; NEUMANN, E.-G.: *Physikalische und technische Akustik*. 3rd. Braunschweig : Vieweg, 1979. – ISBN 978–3–528–28255–4
- [MOD13] MONTENEGRO, G. ; ONORATI, A. ; DELLA TORRE, A.: The prediction of silencer acoustical performances by 1D, 1D-3D and quasi-3D non-linear approaches. In: *Computers and Fluids* 71 (2013), 208–223. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.10.016>. – DOI 10.1016/j.compfluid.2012.10.016. – ISBN 0045–7930

- [MVV15] MANNA, M. ; VACCA, A. ; VERZICCO, R.: Pulsating pipe flow with large-amplitude oscillations in the very high frequency regime. Part 2. Phase-averaged analysis. In: *Journal of Fluid Mechanics* 766 (2015), S. 272–296. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2015.17>. – DOI 10.1017/jfm.2015.17. – ISBN 0022–1120
- [Nob2] NOBILE, F.: Coupling strategies for the numerical simulation of blood flow in deformable arteries by 3D and 1D models. In: *Mathematical and Computer Modelling* 49 (2), Nr. 11-12, 2152–2160. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2008.07.019>. – DOI 10.1016/j.mcm.2008.07.019. – ISSN 08957177
- [Ope11] OPENFOAM FOUNDATION: *OpenFOAM Dokumentation*. <http://www.openfoam.org/docs/>. Version: 2011. – abgerufen am 01.12.2017
- [Ope17] OPENFOAM FOUNDATION: *OpenFOAM User Guide*. <https://cfd.direct/openfoam/user-guide-v3/>. Version: 2017. – abgerufen am 13.12.2017
- [PHB<sup>+</sup>17] POSCH, S. ; HOPFGARTNER, J. ; BERGER, E. ; ZUBER, B. ; STANGL, S.: Numerical Analysis of the Thermal Behavior of a Hermetic Reciprocating Compressor. In: *Journal of Earth Science and Engineering* 7 (2017), S. 1–9. <http://dx.doi.org/10.17265/2159-581X/2017.01.001>. – DOI 10.17265/2159–581X/2017.01.001
- [Poi92] POINSOT, T.J.: Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. In: *Journal of Computational Physics* 101 (1992), Nr. 1, S. 104–129. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90046-2](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(92)90046-2). – DOI 10.1016/0021–9991(92)90046–2. – ISBN 0021–9991
- [PWM06] POLIFKE, W. ; WALL, C. ; MOIN, P.: Partially reflecting and non-reflecting boundary conditions for simulation of compressible viscous flow. In: *Journal of Computational Physics* 213 (2006), Nr. 1, 437–449. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.016>. – DOI 10.1016/j.jcp.2005.08.016. – ISSN 00219991
- [Ron75] RONNEBERGER, D.: *Genaue Messung der Schalldämpfung und der Phasengeschwindigkeit in durchströmten Rohren im Hinblick auf die Wechselwirkung zwischen Schall und Turbulenz*, Universität Göttingen, Habilitation, 1975
- [RS80] RUDY, D.H. ; STRIKWERDA, J.C.: A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. In: *Journal of Computational Physics* 36 (1980), S. 55–70. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90174-6](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(80)90174-6). – DOI 10.1016/0021–9991(80)90174–6. – ISSN 0021–9991
- [Ruo16] RUOPP, A.: *CFD with OpenFOAM*. Stuttgart : HLRS, 2016
- [RZCN04] RICHARDS, S.K. ; ZHANG, X. ; CHEN, X.X. ; NELSON, P.: The evaluation of non-reflecting boundary conditions for duct acoustic computation. In: *Journal of Sound and Vibration*

- 270 (2004), Nr. 3, S. 539–557. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.042>. – DOI 10.1016/j.jsv.2003.09.042. – ISBN 0022–460X
- [Sch06] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 978–3–540–23004–5
- [Sch13] SCHWARZE, R.: *CFD-Modellierung*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. – ISBN 978–3–642–24377–6
- [Sie18] SIEMENS: *Siemens Star-CD Produktseite*. <https://mdx.plm.automation.siemens.com/star-cd>. Version: 2018. – zugegriffen am 20.06.2018
- [Sig09] SIGLOCH, H.: *Technische Fluidmechanik*. Berlin : Springer, 2009. – ISBN 978–3642030895
- [SKHS15] SPILLE-KOHOFF, A. ; HESSE, J. ; SHORBAGY, A.E.: CFD simulation of a screw compressor including leakage flows and rotor heating. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 90 (2015). <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/90/1/012009>. – DOI 10.1088/1757-899X/90/1/012009
- [ŠKMK12] ŠTĚPÁNEK, J. ; KOČÍ, P. ; MAREK, M. ; KUBÍČEK, M.: Catalyst simulations based on coupling of 3D CFD tool with effective 1D channel models. In: *Catalysis Today* 188 (2012), Nr. 1, S. 87–93. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cattod.2012.01.038>. – DOI 10.1016/j.cattod.2012.01.038. – ISSN 09205861
- [Smi99] SMITH, S.W.: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. 2. San Diego : California Technical Publishing, 1999. – ISBN 0966017676
- [SMRR15] SIMÃO, M. ; MORA-RODRIGUEZ, J. ; RAMOS, H.: Mechanical Interaction in Pressurized Pipe Systems: Experiments and Numerical Models. In: *Water* 7 (2015), Nr. 11, 6321–6350. <http://dx.doi.org/10.3390/w7116321>. – DOI 10.3390/w7116321. – ISSN 2073–4441
- [SNP04] SELLE, L. ; NICLOUD, F. ; POINSOT, T.: Actual Impedance of Nonreflecting Boundary Conditions: Implications for Computation of Resonators. In: *AIAA Journal* 42 (2004), Nr. 5, 958–964. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.1883>
- [Sod78] SOD, G.: A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Computational Physics* 27 (1978), S. 1–31
- [Stö00] STÖCKER, H.: *Taschenbuch der Physik*. 4. Auflage. Frankfurt am Main : Verlag Harry Deutsch, 2000. – ISBN 3–8171–1628–4
- [Šut84] ŠUTILOV, V.A.: *Physik des Ultraschalls*. 1. Vienna : Springer Vienna, 1984. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-8750-0>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-8751-7>. – ISBN 978–3–7091–8751–7



- [SW93] STREETER, V.L. ; WYLIE, E.B.: Fluid transients in systems. In: *Prentice-Hall* (1993). [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0001067](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001067). – DOI 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001067. – ISSN 0733-9429
- [TCD16] TRIVEDI, C. ; CERVANTES, M. ; DAHLHAUG, O.: Experimental and Numerical Studies of a High-Head Francis Turbine: A Review of the Francis-99 Test Case. In: *Energies* 9 (2016), Nr. 2, 74. <http://dx.doi.org/10.3390/en9020074>. – DOI 10.3390/en9020074. – ISBN 4773593849
- [Tet17] TETENBORG, P.: *Entwicklung einer passiven und adaptiven Pulsationsdämpfereinheit*, Technische Universität Dortmund, Dissertation, 2017
- [TGS10] TIRKEY, J.V. ; GUPTA, H.N. ; SHUKLA, S.K.: Integrated gas dynamic computational modelling and thermodynamic combustion diagnostics of multicylinder four-stroke spark ignition engine using compressed natural gas as a fuel. In: *International Journal of Sustainable Energy* 29 (2010), Nr. 2, S. 59–75. <http://dx.doi.org/10.1080/14786460903383468>. – DOI 10.1080/14786460903383468. – ISBN 0354-9836
- [Tho87] THOMPSON, K.W.: Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. In: *Journal of Computational Physics* 68 (1987), Nr. 1, 1–24. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90041-6](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(87)90041-6). – DOI 10.1016/0021-9991(87)90041-6. – ISSN 00219991
- [Tho90] THOMPSON, K.W.: Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II. In: *Journal of Computational Physics* 89 (1990), Nr. 2, 439–461. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90152-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(90)90152-Q). – DOI 10.1016/0021-9991(90)90152-Q. – ISSN 00219991
- [Tor97] TORO, E.F.: *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1997
- [Tri75] TRIKHA, A.K.: An Efficient Method for Simulating Frequency-Dependent Friction in Transient Liquid Flow. In: *Journal of Fluids Engineering* 97 (1975), Nr. 1, 97. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3447224>. – DOI 10.1115/1.3447224. – ISSN 00982202
- [Tru89] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik*. 3. Berlin Heidelberg : Springer Vieweg, 1989. – ISBN 3-540-50222-3
- [UBVF06] URQUIZA, S.A. ; BLANCO, P.J. ; VÉNERE, M.J. ; FEIJÓO, R.A.: Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 33-36, 4002–4017. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2005.07.014>. – DOI 10.1016/j.cma.2005.07.014. – ISSN 00457825
- [VB82] VICHNEVETSKY, R. ; BOWLES, J.B.: *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations*. 1st. Philadelphia : siam, 1982

- [VS89] VETTER, G. ; SCHWEINFURTER, F.: Computation of pressure pulsations in pumping systems with reciprocating pumps. In: *Proceedings Pumping Machinery ASCE/ASME Conf.*, 1989, S. 83 ff
- [Wah15] WAHBA, E.M.: Fluid flow and frequency-dependent friction in the human vocal system. In: *Acta Mechanica* 226 (2015), Nr. 12, 4099–4109. <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-015-1497-x>. – DOI 10.1007/s00707-015-1497-x. – ISSN 0001–5970
- [WBH14] WENG, C. ; BOIJ, S. ; HANIFI, A.: On the calculation of the complex wavenumber of plane waves in rigid-walled low-Mach-number turbulent pipe flows. In: *Journal of Sound and Vibration* 354 (2014), 132–153. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.013>. – DOI 10.1016/j.jsv.2015.06.013. – ISSN 10958568
- [WLW<sup>+</sup>12] WU, D.Z. ; LIU, Q.L. ; WU, P. ; WANG, L.Q. ; PAULUS, T. ; WANG, B.G. ; OESTERLE, M.: The research of 1D / 3D coupling simulation on pump and pipe system. In: *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 15 (2012), Nr. 5, 052032. <http://dx.doi.org/10.1088/1755-1315/15/5/052032>. – DOI 10.1088/1755-1315/15/5/052032. – ISSN 1755–1307
- [WTJF98] WELLER, H.G. ; TABOR, G. ; JASAK, H. ; FUREBY, C.: A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. In: *Computers in Physics* 12 (1998), Nr. 6, S. 620–631. <http://dx.doi.org/10.1063/1.168744>. – DOI 10.1063/1.168744. – ISBN 0894–1866
- [WWPT04] WANKER, R. ; WURZENBERGER, J.C. ; PETERS, B. ; TATSCHL, R.: Integrated 1D and 3D Modeling of Exhaust-Gas Aftertreatment Devices. In: *International Multidimensional Engine Modeling User's Group Meeting*, 2004, S. 1–7
- [WZ05] WANG, X. ; ZHANG, N.: Numerical analysis of heat transfer in pulsating turbulent flow in a pipe. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48 (2005), Nr. 19-20, S. 3957–3970. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.04.011>. – DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.04.011. – ISBN 0017–9310
- [YCWY15] YANG, S. ; CHEN, X. ; WU, D. ; YAN, P.: Dynamic analysis of the pump system based on MOC – CFD coupled method. In: *Annals of Nuclear Energy* 78 (2015), 60–69. <http://dx.doi.org/10.1016/j.anucene.2014.12.022>. – DOI 10.1016/j.anucene.2014.12.022. – ISSN 0306–4549
- [ZW10] ZHOU, Y. ; WANG, Z.J.: Absorbing boundary conditions for the Euler and Navier–Stokes equations with the spectral difference method. In: *Journal of Computational Physics* 229 (2010), Nr. 23, 8733–8749. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.007>. – DOI 10.1016/j.jcp.2010.08.007. – ISSN 00219991



# A. Anhang

## A.1. Kennfelder des Grundswingungsgehaltes an der nichtreflektierenden Randbedingung bei Variation von $\sigma_{RB}$ und $\varphi_{num}$

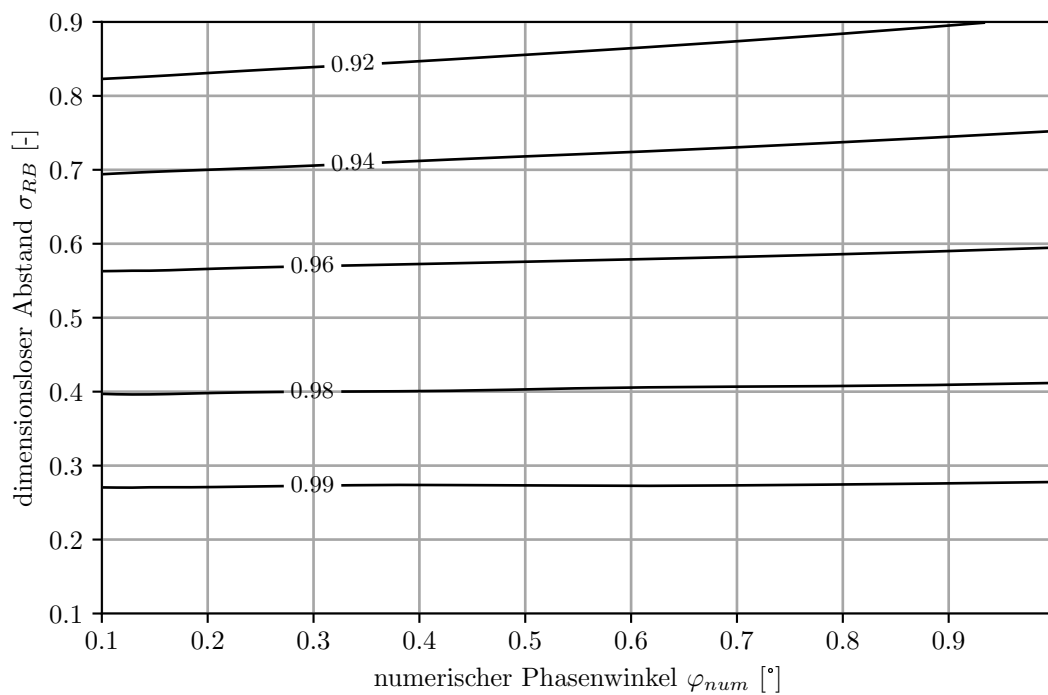


Abbildung A.1.: Grundswingungsgehalt der hinlaufenden Welle  $f$  an der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,1$

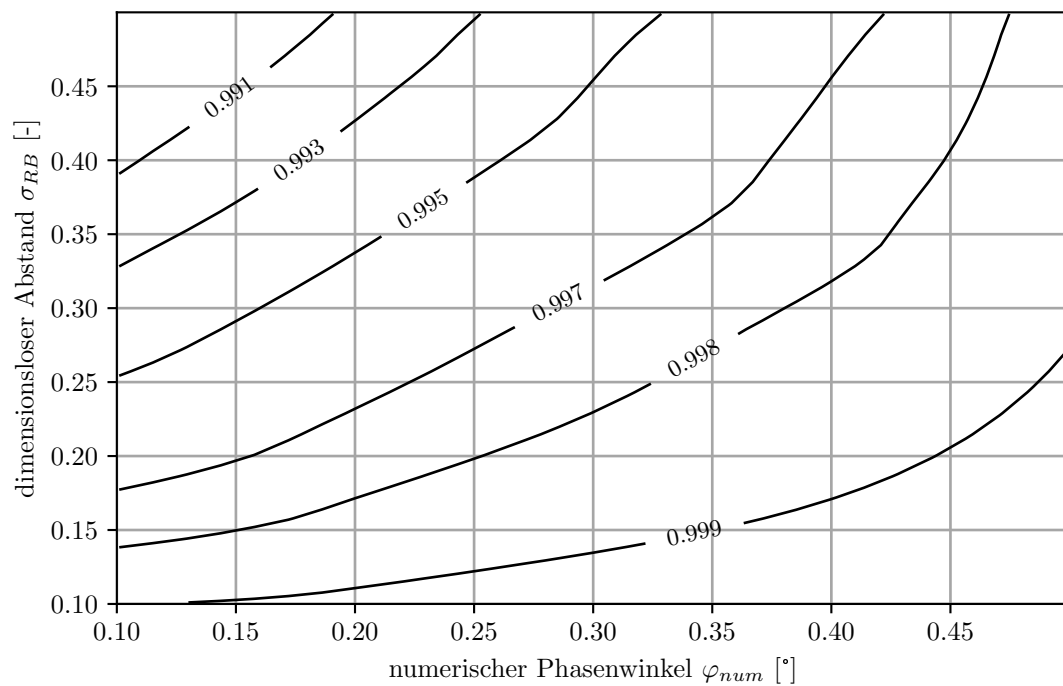


Abbildung A.2.: Grundswingungsgehalt der hinlaufenden Welle  $f$  an der GMW-Randbedingung bei harmonischer Anregung mit einer akustischen Machzahl der Grundharmonischen an der Randbedingung von  $Ma_{ak,f_G, RB, soll} = 0,001$

## A.2. Herleitung der spektralen Fehler für das FV-Schema bei variablem Gewichtungsfaktor der zeitlichen Integration

Das zentrale-Differenzen-Schema angewendet auf die lineare Konvektionsgleichung ergibt:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{CFL}{2} \left( (\Theta \phi_{i+1}^{n+1} + (1 - \Theta) \phi_{i+1}^n) - (\Theta \phi_{i-1}^{n+1} + (1 - \Theta) \phi_{i-1}^n) \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\Leftrightarrow \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{CFL}{2} \left( \Theta (\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}) + (1 - \Theta) (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) \right) \quad (\text{A.2})$$

Einsetzen der Testfunktion  $\Phi$  mit

$$\phi_{i+m}^{n+l} = \Re \left( \Phi_{i+m}^{n+l} \right) = \Re \left( \Phi^{n+l} e^{j(i+m)\varphi_{num}} \right) \quad (\text{A.3})$$

und Trennung der Variablen zu den Zeitpunkten  $n$  und  $n + 1$  liefert

$$\begin{aligned} & \Phi_i^{n+1} \left( e^{ji\varphi_{num}} + \frac{CFL}{2} \Theta \left( e^{j(i+1)\varphi_{num}} - e^{j(i-1)\varphi_{num}} \right) \right) \\ &= \Phi_i^n \left( e^{ji\varphi_{num}} - \frac{CFL}{2} (1 - \Theta) \left( e^{j(i+1)\varphi_{num}} - e^{j(i-1)\varphi_{num}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

und damit den komplexen Verstärkungsfaktor des numerischen Schemas:

$$\frac{\Phi_i^{n+1}}{\Phi_i^n} = \underline{G}_{FV} = \frac{1 - \frac{CFL}{2} (1 - \Theta) (e^{j\varphi_{num}} - e^{-j\varphi_{num}})}{1 + \frac{CFL}{2} \Theta (e^{j\varphi_{num}} - e^{-j\varphi_{num}})} \quad (\text{A.5})$$

Mithilfe der Euler'schen Identität ergibt sich:

$$\underline{G}_{FV} = \frac{1 - CFL(1 - \Theta) j \sin(\varphi_{num})}{1 + CFL \Theta j \sin(\varphi_{num})} \quad (\text{A.6})$$

Nach Erweiterung mit dem komplex Konjugierten des Nenners und Vereinfachung des Ausdruckes lassen sich Real- und Imaginärteil trennen und somit der Diffusions- und der Dispersionsfehler des FV-Schemas ableiten:

$$\epsilon_{d,FV} = \frac{|\underline{G}_{FV}|}{1} = \left( \left( 1 - \frac{\Theta CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^2 + \left( \frac{CFL \sin(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi,FV} &= \frac{\varphi \underline{G}_{FV}}{CFL \varphi_{num}} = \tan^{-1} \left( \left( \frac{-CFL \sin(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right) \left( 1 - \frac{\Theta CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})}{1 + \Theta^2 CFL^2 \sin^2(\varphi_{num})} \right)^{-1} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{CFL \varphi_{num}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

### A.3. Diffusions- und Dispersionsbeiwerte des FV-Schemas bei Variation der akustischen Machzahl

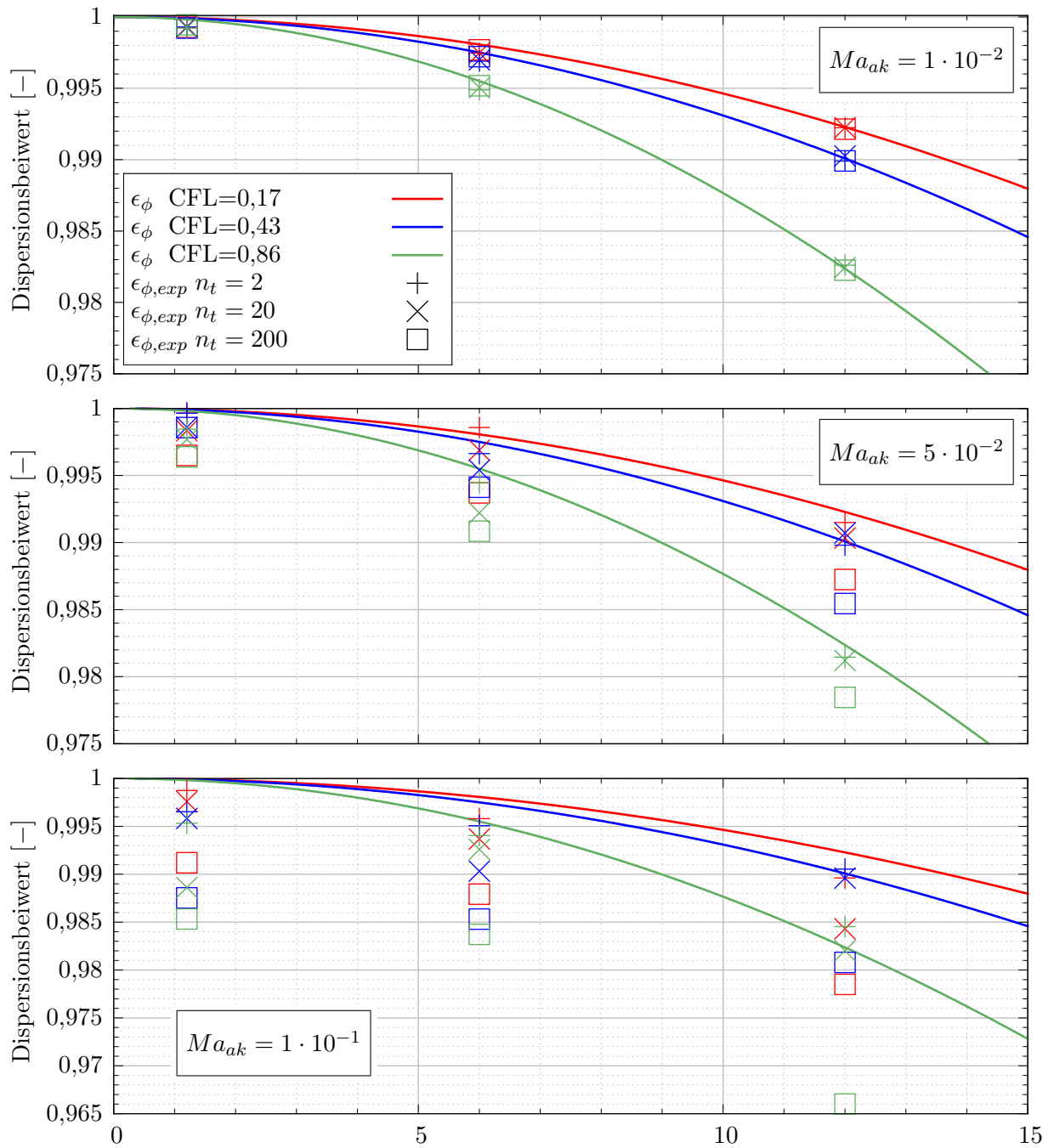


Abbildung A.3.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Dispersionsbeiwert des FV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene akustischen Machzahlen, CFL-Zahlen und Auswertzeitpunkte  $n_t$  sowie  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 1$ .

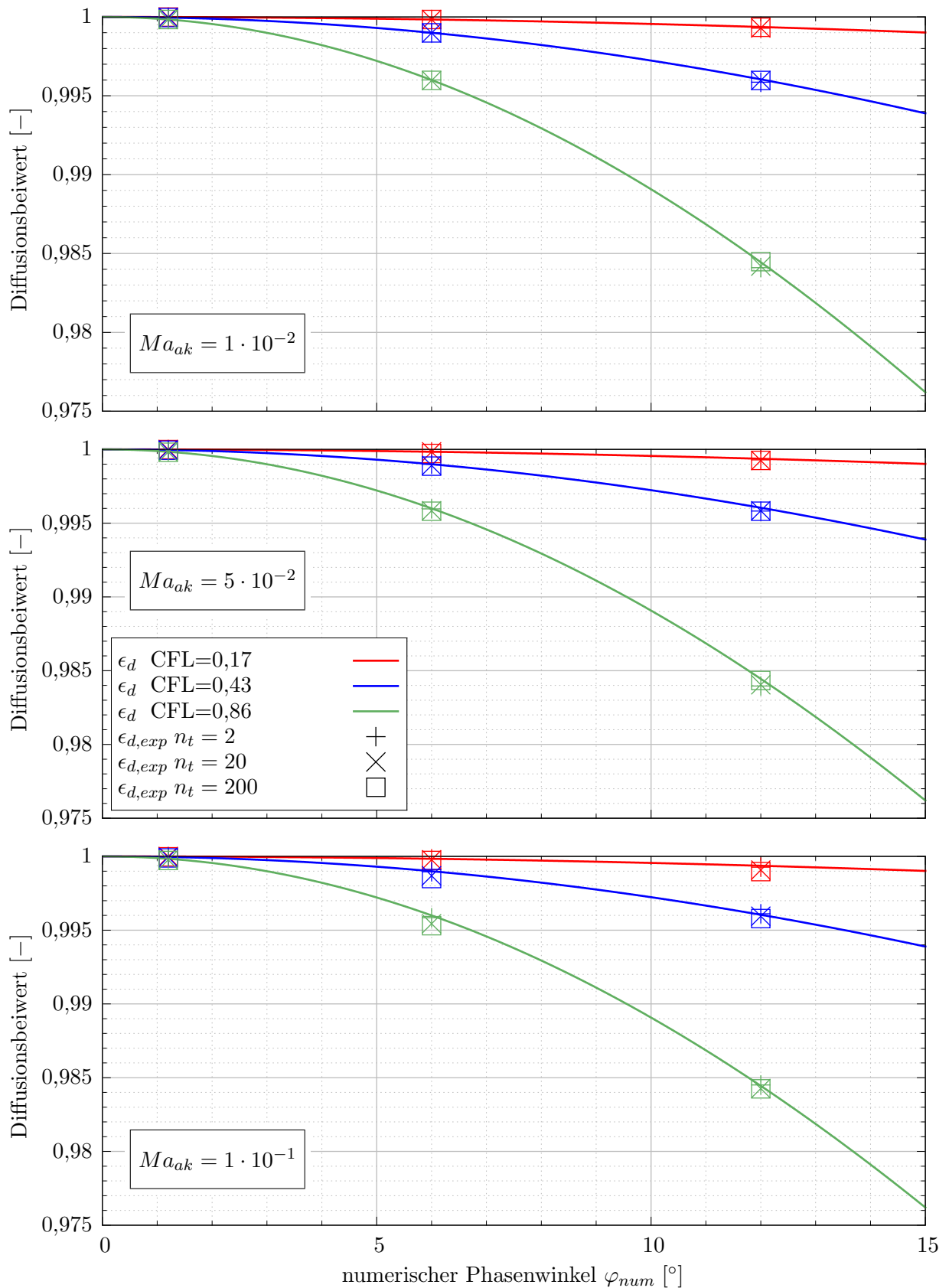


Abbildung A.4.: Analytisch und numerisch-experimentell bestimmter Diffusionsbeiwert des FV-Schemas als Funktion des numerischen Phasenwinkels für verschiedene akustischen Machzahlen, CFL-Zahlen und Auswertzeitpunkte  $n_t$  sowie  $\overline{Ma} = 0$  und  $\Theta = 1$ .



## A.4. Spektrale Fehler des FV-Schemas bei Variation des Gewichtungsfaktors der zeitlichen Integration

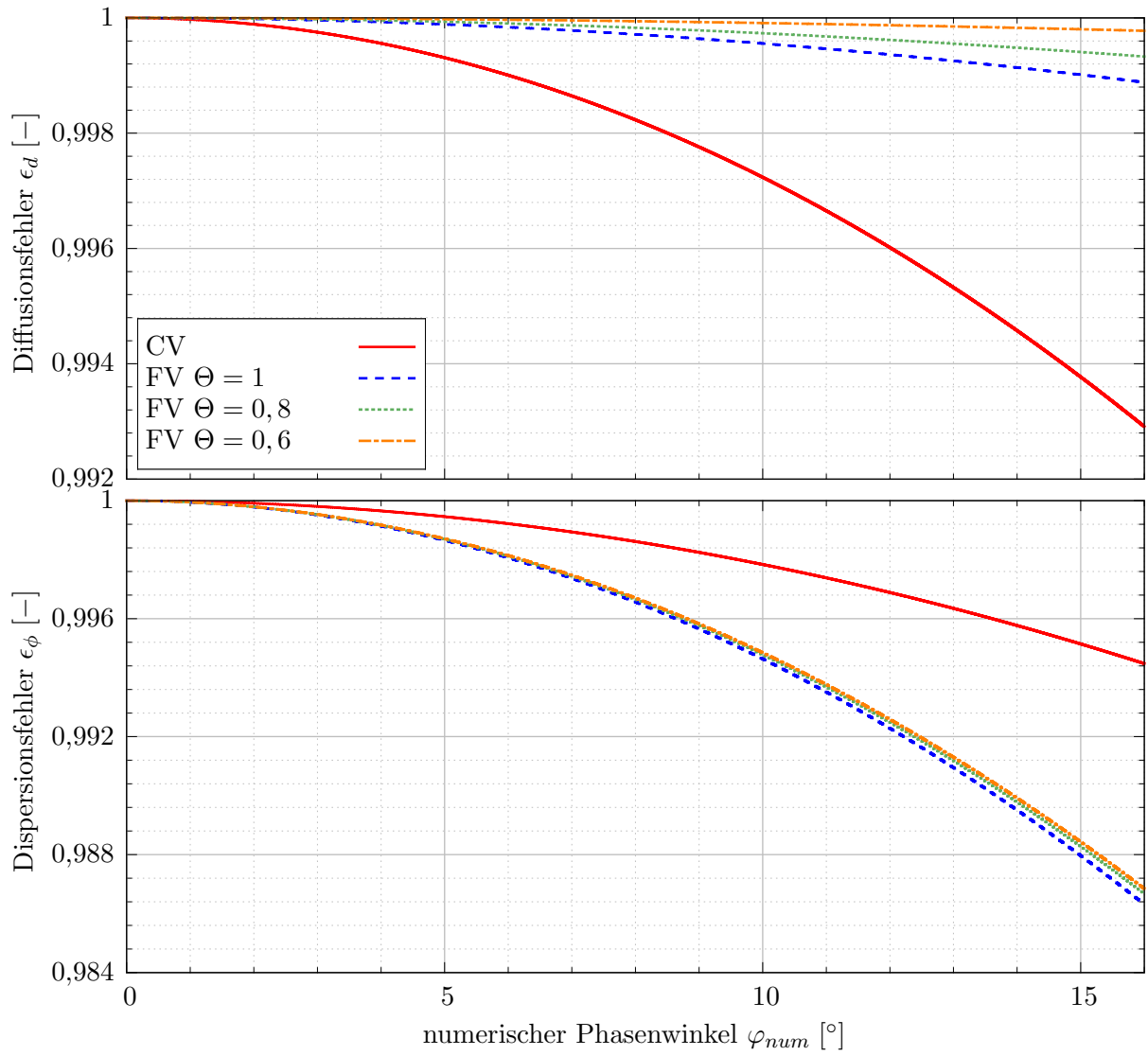


Abbildung A.5.: Spektraler Fehler des CV-Schemas und des FV-Schemas für  $\Theta = 1,0/0,8/0,6$  sowie  $CFL = 0,17$ .

## A.5. Kopplungsparameter bei Anregung mit Oberschwingungen

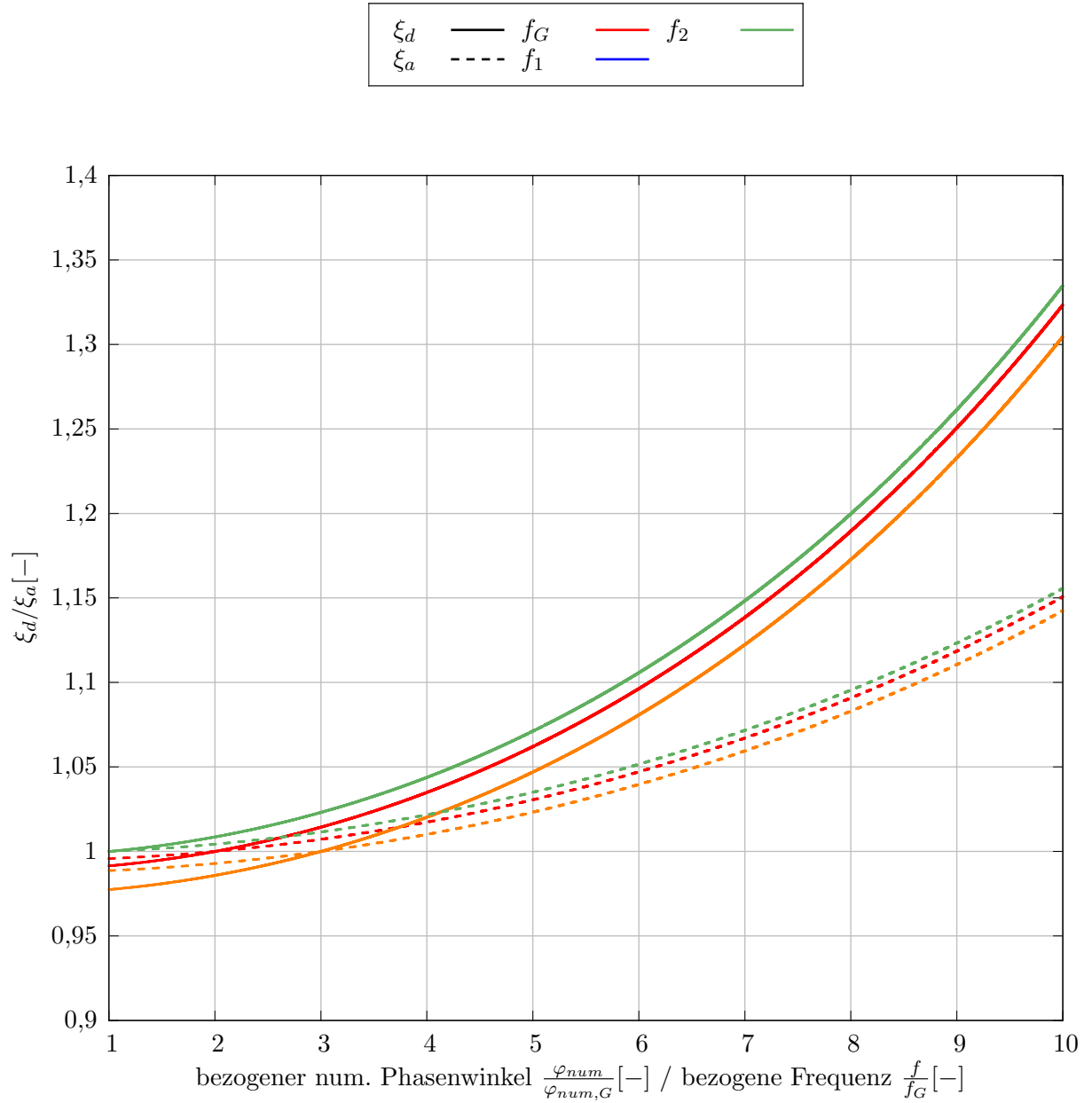


Abbildung A.6.: Kopplungsparameter der gekoppelten FV/CV-Simulation bei Anregung mit  $\varphi_{num,G,FV} = 5,24^\circ$  und zwei gleichphasig überlagerten Oberschwingungen sowie  $\Theta_{FV} = 0,6$ .