

Ein allgemeines Konzept für  
adaptive Finite Elemente Methoden  
bei modifizierten diskreten  
Formulierungen

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik der  
Technischen Universität Dortmund  
vorgelegt von

Dustin Kumor

im Februar 2020

---

## **Dissertation**

*Ein allgemeines Konzept für adaptive Finite Elemente Methoden bei  
modifizierten diskreten Formulierungen*

Fakultät für Mathematik  
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Andreas Rademacher

Zweitgutachter: Prof. Dr. Heribert Blum

Tag der mündlichen Prüfung: 09.06.2020

---

## Danksagung

Auch ich möchte an dieser Stelle „Danke“ sagen. Danke dafür, dass ich mich auf dem doch langwierigen Weg zur Fertigstellung meiner Dissertation auf die Unterstützung vieler Personen durchweg verlassen konnte.

Ein besonderes Dankeschön geht dabei an meinen Betreuer Andreas Rademacher, der mir zu jedem Zeitpunkt mit Rat und Tat zur Seite gestanden und es mir ermöglicht hat meine Promotion erfolgreich abzuschließen. Weiter danke ich den Herren Heribert Blum und Christian Meyer, sowie allen anderen Mitgliedern des Lehrstuhls für Wissenschaftliches Rechnen für die vielen aufschlussreichen und zielführenden Diskussionen zu den unterschiedlichsten Themen und Fragestellungen. Insbesondere die Kaffeepausen und auch die geselligen Feierabendveranstaltungen haben dazu beigetragen in den entscheidenden Momenten den nötigen gedanklichen Abstand zu gewinnen, um im Anschluss wieder fokussiert arbeiten zu können. Zu guter Letzt gehört ein riesiges Dankeschön meiner Freundin und meiner Familie. Eurer unbändigen Geduld und bedingungslosen Unterstützung in jeder erdenklichen Situation sowie dem einen oder anderen motivierenden Anstoß ist es zu verdanken, dass ich diese Arbeit vollenden konnte.

Darüber hinaus danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung, die ich im Rahmen meiner Tätigkeit innerhalb des Sonderforschungsbereichs Transregio 73 „Umformtechnische Herstellung von komplexen Funktionsbauteilen mit Nebenformelementen aus Feinblechen - Blechmassivumformung“ im Teilprojekt A5 „Entwicklung modelladaptiver Simulationsmethoden für umformtechnische Prozesse zur Herstellung komplexer Funktionsbauteile mit Nebenformen“ erhalten habe.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Lineare Elastizitätstheorie</b>	<b>13</b>
2.1. Funktionalanalytische Grundlagen . . . . .	14
2.2. Verschiedene Formulierungen der linearen Elastizität . . .	21
<b>3. Finite Elemente Diskretisierung</b>	<b>39</b>
3.1. Standard Diskretisierung . . . . .	41
3.2. Selektiv reduzierte Integration . . . . .	42
3.3. Volumenartige Schalenelemente . . . . .	46
3.4. Hybride Netze . . . . .	59
<b>4. DWR für modifizierte diskrete Semilinearformen</b>	<b>65</b>
4.1. Allgemeine Problemstellung . . . . .	68
4.2. Diskretisierungsfehlerschätzung . . . . .	73
4.3. Modellfehlerschätzung . . . . .	81
4.4. Numerische Approximation und Fehlerlokalisierung . . . .	85
<b>5. Anwendungsbeispiel I: Selektiv reduzierte Integration</b>	<b>95</b>
5.1. Diskretisierungsfehlerschätzung . . . . .	96
5.2. Diskretisierungsfehlerschätzung mittels gemischter Formu- lierung . . . . .	106
5.3. Modellfehlerschätzung . . . . .	120
<b>6. Anwendungsbeispiel II: Volumenartige Schalenelemente</b>	<b>131</b>
6.1. Diskretisierungsfehlerschätzung . . . . .	132
6.2. Modellfehlerschätzung . . . . .	146
<b>7. Fazit und Ausblick</b>	<b>151</b>

<b>A. Ergänzungen zu Kapitel 2</b>	<b>155</b>
A.1. Beweis von Satz 2.5 . . . . .	155
A.2. Beweis von Satz 2.11 . . . . .	156
A.3. Beweis von Satz 2.14 . . . . .	159
A.4. Beweis von Satz 2.15(i) . . . . .	160
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>161</b>

# Kapitel 1.

## Einleitung

Die Strukturmechanik stellt für die Beschreibung der Deformation von Festkörpern und den daraus resultierenden inneren Spannungen verschiedene theoretische Ansätze zur Verfügung. Neben der vollständigen dreidimensionalen Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge, die für gewöhnlich mittels partieller Differentialgleichungen erfolgt, existieren darüber hinaus vereinfachte Modelle – vergleiche beispielsweise [42, 43, 44]. Die zugehörige Herleitung beruht dabei auf der Vereinfachung des allgemeinen Sachverhalts durch die Berücksichtigung präzise definierter Rahmenbedingungen, wie beispielsweise ein differentialer Zusammenhang zwischen Verschiebung und Verdrehung, vernachlässigbare, ausgewählte Spannungskomponenten, bestimmtes Materialverhalten oder geometrische Eigenschaften des vorliegenden Festkörpers. In den meisten Fällen sind die Voraussetzungen so gewählt, dass sich hierbei die für die Beschreibung notwendige Raumdimension reduziert. Beim Vergleich der ermittelten Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen auf Basis der vereinfachten Theorien mit den entsprechenden Ergebnissen resultierend aus der allgemeinen dreidimensionalen Formulierung, liegt für die entsprechenden Problemstellungen eine sehr gute Übereinstimmung vor. Der große Unterschied ist der zu betreibende Aufwand, um die Lösungen zu ermitteln. Während bei der vollständigen Modellierung eine partielle Differentialgleichung bezüglich aller drei Raumdimensionen gelöst werden muss, reduziert sich beispielsweise bei der Verwendung der Balkentheorie die Aufgabenstellung auf die Bestimmung der vertikalen Auslenkung in Abhängigkeit von der Position entlang der neutralen Faser als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung. Dem deutlich reduzierten Aufwand stehen andererseits die extremen Rahmenbedingungen

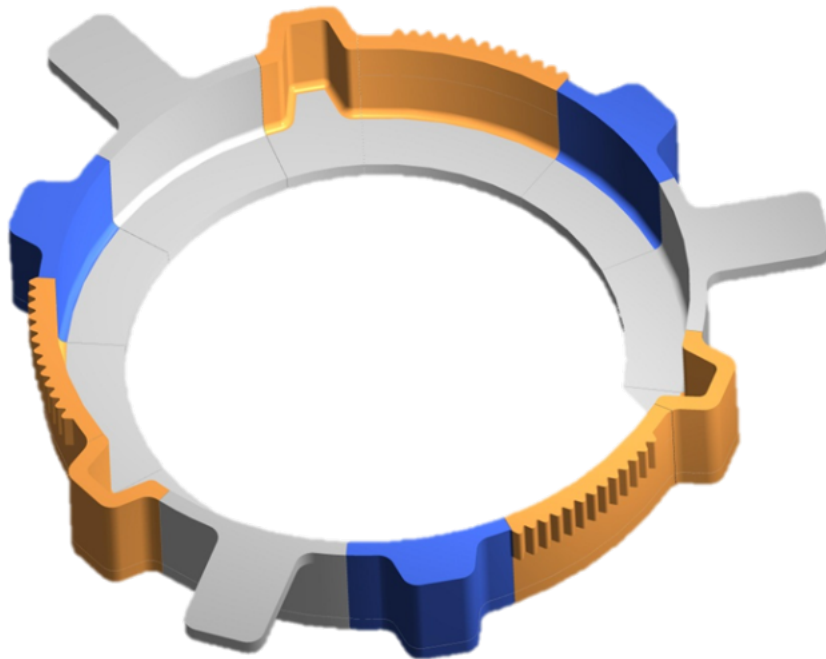


Abbildung 1.1.: Demonstratorbauteil des Sonderforschungsbereich / Transregio 73

gegenüber, die die mögliche Auswahl an zulässigen Festkörpern und an äußeren Belastungen sehr stark einschränkt. Insbesondere bei der Behandlung realer Problemstellungen sind diese schwierig zu erfüllen, so dass trotz größerem Aufwand für eine ganzheitliche Beschreibung die vollständige dreidimensionale Theorie benötigt wird. Vernachlässigt wird hierbei jedoch die Tatsache, dass oftmals Teilbereiche identifiziert werden können, in denen die Annahmen der vereinfachten Theorien zutreffen. Insbesondere im Ingenieurwesen treten solche Situationen häufig bei der Analyse von industriellen Fertigungsprozessen auf.

Ein Beispiel ist das in Abbildung 1.1 dargestellte Bauteil. Zu sehen ist ein Synchronring, wie er in ähnlicher Form beispielsweise in Automobilgetrieben/Differentialen zu finden ist. Charakteristisch ist hierbei die napfartige Form mit verschiedenen Arten von Nebenformen im Kragbereich. Dazu zählen sowohl einfache Verzahnungen (beispielsweise links im Bild) als auch komplexere Formen wie offene und geschlossene Mitnehmer. Die Herstellung eines solchen Bauteils ist in der industriellen Fer-



---

tigung auch heute noch eine anspruchsvolle Aufgabe. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen des DFG Sonderforschungsbereich / Transregio 73 (TR73) *Umformtechnische Herstellung von komplexen Funktionsbauteilen mit Nebenformelementen aus Feinblechen – Blechmassivumformung* – ein neues Herstellungsverfahren entwickelt und analysiert. Der im Übersichtsartikel [65] eingeführte und präzise definierte Umformprozess der *Blechmassivumformung* beschreibt dabei das

„bildsame Ändern der Form eines flächigen Halbzeugs unter Beibehalt des Stoffzusammenhalts durch während des Formgebungsprozesses zeitgleich oder nacheinander wirkende zwei- und dreiachsige Spannungs- und Formänderungszustände.“<sup>1</sup>

Vereinfacht gesagt bedeutet dies, dass Bauteile wie in Abbildung 1.1 dargestellt, aus einem flächigen Werkstück, beispielsweise einem Blech, in einem kombinierten Verfahren aus typischen Blech- und auch Massivumformungen hergestellt werden. Dabei treten zweiachsige Spannungs- und Formänderungszustände hauptsächlich im Rahmen der Blechumformung zur Realisierung der napfartigen Form auf. Die zur Ausprägung der Nebenformen notwendigen Massivumformungen führen dagegen zu dreiachsigen Zuständen. Die vorliegende Situation legt eine strukturmechanische Beschreibung mittels unterschiedlicher theoretischer Ansätze nahe. Im Bereich der Nebenformen ist aufgrund signifikanter Größen bezüglich aller drei Raumrichtungen nur eine vollständige, dreidimensionale Formulierung sinnvoll. Hingegen bietet der Bereich der Blechumformung die Möglichkeit einer zweidimensionalen Beschreibung basierend auf schalentheoretischen Annahmen. Die beschriebenen Aspekte sind insbesondere im Hinblick auf die strukturmechanische Analyse eines solchen Prozesses von großem Interesse, da die hierbei verwendeten Simulationsverfahren eine Berücksichtigung der unterschiedlichen theoretischen Voraussetzungen erlauben. Auf diese Art und Weise lassen sich effiziente numerische Verfahren entwickeln, die kosten- und zeitintensive Testfertigung vermeiden können.

Die bei der Simulation von strukturmechanischen Prozessen häufig verwendete Methode der Finiten Elemente bietet die Möglichkeit bei

---

<sup>1</sup>Zitat aus der offiziellen Beschreibung auf der Internetseite des SFB/Transregio 73. Nachzulesen unter [www.tr-73.de](http://www.tr-73.de)

der Konstruktion der unterschiedlichen Elementtypen auch theoretische Rahmenbedingungen zu berücksichtigen. So ist es möglich eine strukturelle Beschreibung mit der zugehörigen Finite Element Entwicklung zu identifizieren. Hinsichtlich des Bauteils in Abbildung 1.1 bedeutet dies, dass die zur Beschreibung der Ausformung der Nebenformen verwendete vollständige dreidimensionale Theorie mit Hilfe von klassischen verschiebungsbasierten Volumenelementen abgebildet wird. In den Bereichen, in denen schalentheoretische Annahmen zutreffen, wird dagegen auf volumenartige Schalenelemente zurückgegriffen. Zu beachten ist an dieser Stelle jedoch, dass aus der Konstruktionsweise dieses Elementtyps zusätzlich eine Modifikation der diskreten Formulierung resultiert. Aus mathematischer Sicht sind also Finite Element Methoden für die Art von Problemstellungen zu untersuchen, in denen sich kontinuierliche und diskrete Formulierung unterscheiden.

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation werden zwei Beispiele betrachtet, die dieser Ausgangssituation entsprechen: Zum einen wird das Konzept der selektiv reduzierten Integration diskutiert – vergleiche [26, 51, 52, 62]. Die Kernidee ist, dass ein Teil der zugrundeliegenden Elementformulierung durch die Verwendung einer Gauß-Quadraturformel mit nur einem Punkt absichtlich fehlerhaft integriert wird. Zum anderen werden die zuvor erwähnten volumenartigen Schalenelemente näher untersucht. Aufgrund der schalentheoretischen Grundlage ist dieser Elementtyp stark durch numerische Instabilitäten, die auch als Lockingeffekte bezeichnet werden, belastet. Die in [13, 14, 31, 82, 83, 85] beschriebene Konstruktionsweise verwendet daher eine Vielzahl von Stabilisierungstechniken, die zu einer modifizierten diskreten Formulierung führen.

Das eingangs erwähnte Beispiel aus dem Bereich der Blechmassivumformung hat bereits verdeutlicht, dass sich die kombinierte Verwendung von volumenartigen Schalenelementen und Volumenelementen positiv auf den zu betreibenden Aufwand auswirkt und sich dieser dadurch deutlich reduzieren lässt. Ein Indikator dafür, in welchem Bereich welcher Elementtyp eingesetzt wird, lässt sich auf der Basis von a posteriori Fehlerschätzern bereitstellen. Diese geben zum einen den Fehler bezüglich der Elementwahl hinsichtlich eines zielgerichteten Maßes wieder und liefern zum anderen auch eine Auskunft über die Verteilung des Fehlers. Das Konzept der Dimensionsadaptivität baut auf diesen Informationen

---

auf und realisiert im Rahmen von adaptiven Algorithmen eine automatische, lokale Wahl des Elementtyps. Dieser Ansatz wird für gewöhnlich mit der Technik der klassischen Netzadaptivität kombiniert, bei der die Feinheit der zugrundeliegenden Vernetzung ebenfalls basierend auf einer Fehlerschätzung modifiziert wird. Die gemeinsame, grundlegende Intention sowohl der Netzadaptivität, als auch der Dimensionsadaptivität als Beispiele für adaptive Finite Elemente Methoden im Allgemeinen, ist durch die Prämisse charakterisiert, mittels minimalem numerischem Aufwand beziehungsweise durch einen geschickten Einsatz der vorhandenen, limitierten Ressourcen ein bestmögliches Maß an Genauigkeit der berechneten Lösung zu erzielen. Da entsprechende a posteriori Fehlerschätzer die Grundlage für die Entwicklung adaptiver Algorithmen darstellen, ist das übergeordnete Ziel der Arbeit diese für die abweichende Ausgangssituation der modifizierten diskreten Formulierung bereitzustellen. Dabei wird der Diskretisierungsfehler separat vom Fehler resultierend aus der Wahl des Elementtyps betrachtet.

Die Herleitung eines zielorientierten a posteriori Fehlerschätzers für den Diskretisierungsfehler, auf dessen Grundlage Indikatoren für eine lokale Netzverfeinerung abgeleitet werden, ist demnach das erste Ziel der vorliegenden Dissertation. Das in [7] und [11] eingeführte Konzept der dual-gewichteten Residuen (DWR) stellt vor dem Hintergrund der Simulation von Blechmassivumformprozessen eine geeignete Methodik dar, da diese sowohl für lineare als auch nichtlineare Zielgrößen und Problemstellungen anwendbar ist. Andere, auch nicht zielorientierte a posteriori Fehlertechniken im Bereich der Finite Elemente Methoden finden sich beispielsweise in der Monographie [89, Kapitel 1]. Ein erstes Resultat für eine DWR-Fehlerschätzung bei modifizierten diskreten Formulierung liefert bereits [11, Abschnitt 2.3]. Die dabei geforderte Konsistenzbedingung an die diskrete Formulierung ist in der hier vorliegenden Situation jedoch nicht erfüllt, sodass die präsentierte Herleitung das ursprüngliche Resultat verallgemeinert.

Der zweite Aspekt, den es zu untersuchen gilt, ist die lokal unterschiedliche Wahl der verschiedenen strukturmechanischen Theorien. Die in [1, 15, 21, 87, 88] beschriebene Technik der Dimensionsadaptivität wird im Rahmen dieser Arbeit hinsichtlich des in [22] vorgestellten Konzepts der Modelladaptivität betrachtet. Durch die Identifizierung der theore-

tischen Ansätze mit den zugehörigen (modifizierten) diskreten Problemstellungen entspricht der Modellwechsel einem Wechsel der beschreibenden diskreten Formulierung.

Ein weiteres Ziel der vorliegenden Dissertation ist demnach die Herleitung eines zielorientierten a posteriori Fehlerschätzers für den Modellfehler, anhand dessen eine lokal adaptive Wahl unterschiedlicher diskreter Formulierungen erfolgen kann. Anders als in [22] dargestellt, agiert der hier betrachtete Modellfehler auf diskreter Ebene, sodass auch von einer diskreten Modelladaptivität gesprochen werden kann.

Die Anwendung der hergeleiteten Fehlerschätzer erfolgt im Rahmen von linear elastischen Problemstellungen, um so die Auswirkungen der modifizierten diskreten Formulierung auf die DWR-Fehlerschätzung isoliert untersuchen zu können. Für die Umsetzung wurde dabei auf die freie Finite Elemente Bibliothek *deal.II – Version 9.0* [5, 6] zurückgegriffen. Obwohl *deal.II* bereits eine Vielzahl von Techniken bereitstellt, war eine vollständige Implementierung des verwendeten volumenartigen Schalenelements notwendig. Darüber hinaus musste die Technik zur patchstrukturierenden Verfeinerung und auch die Bestimmung der Interpolationsbedingungen für hängende Knoten auf den Fall anisotroper Verfeinerung erweitert werden.

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit ist wie folgt: Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Theorie der linearen Elastizität. Im sich anschließenden Kapitel 3 werden die unterschiedlichen, verwendeten FE-Diskretisierungen eingeführt. Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist das in Kapitel 4 entwickelte allgemeine Konzept zur DWR-Fehlerschätzung bei modifizierten diskreten Formulierungen. Die Kapitel 5 und 6 führen die in den Kapiteln 2 bis 4 bereitgestellten Informationen zusammen und präsentieren unterschiedliche Anwendungsbeispiele der hergeleiteten Fehlerschätzer für den Diskretisierungs- und Modellfehler. Dabei wird in Kapitel 5 zunächst die Verwendung der selektiv reduzierten Integration als ein repräsentatives Modellproblem für eine modifizierte diskrete Formulierungen untersucht und anschließend in Kapitel 6 die deutlich komplexere Modifikation durch die volumenartigen Schalenelemente betrachtet. Die Arbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und anschließender Diskussion der erzielten Ergebnisse in Kapitel 7.

---

## Lineare Elastizitätstheorie

Kapitel 2 stellt die im Rahmen dieser Arbeit benötigten Resultate zur linearen Elastizitätstheorie zusammen. Dabei werden in Abschnitt 2.1 zunächst die funktionalanalytischen Grundlagen angegeben. Neben der Einführung der verwendeten Funktionenräume und der Lösungstheorie linearer Variationsgleichungen, finden sich hier zudem einige Punkte zur Theorie für Sattelpunktprobleme mit und ohne Strafterm.

Die grundlegenden strukturmechanischen Größen der linearen Elastizität, das heißt Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen, und deren wechselseitigen Abhängigkeiten mittels kinematischer und konstitutiver Beziehungen werden in Abschnitt 2.2 vorgestellt. Darüber hinaus werden die unterschiedlichen Formulierungen vom Drei-Feld-Prinzip nach Hu-Washizu, über das Prinzip von Hellinger-Reissner bis hin zur reinen Verschiebungsmethode angegeben, die im weiteren Verlauf der Arbeit zur Anwendung kommen. So dient das Drei-Feld-Prinzip nach Hu-Washizu als Ausgangspunkt für die Entwicklung von Stabilisierungstechniken der volumenartigen Schalenelemente und ein Spezialfall des Prinzips von Hellinger-Reissner als Grundlage der selektiv reduzierten Integration. Dieser Spezialfall basiert auf der Wahl der Verschiebung und des volumetrischen Anteils des Spannungstensors, repräsentiert durch den mechanischen Druck, als eigenständige Feldgrößen. Der in der Literatur nicht standardmäßig zu findende Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des zugehörigen Sattelpunktproblems, insbesondere für Gebiete mit nicht verschwindendem Neumann- und Dirichletrand, wird ebenfalls ausführlich diskutiert.

## Finite Elemente Diskretisierung

Die in den Anwendungskapiteln benötigten unterschiedlichen Finite Elemente Diskretisierungen werden in Kapitel 3 präsentiert. Dabei befasst sich Abschnitt 3.1 zunächst mit den klassischen Verschiebungselementen, die mittels stückweise polynomialer Ansatzfunktionen konstruiert werden. Darüber hinaus werden die zugehörige diskrete Problemstellung sowie a priori Abschätzung angegeben. Im folgenden Abschnitt 3.2 wird die Technik der selektiv reduzierten Integration vorgestellt, die durch die Verwendung unterschiedlicher Quadraturformeln für den volumetri-

schen und deviatorischen Anteil eine modifizierte diskrete Formulierung impliziert. Neben dieser praxisnahen Darstellung wird zudem eine aus mathematischer Sicht konsistente Formulierung angegeben, die auf der äquivalenten Verschiebung–Druck–Formulierung beruht und die selektiv reduzierte Integration mittels eines diskreten Operators repräsentiert.

In Abschnitt 3.3 wird die Finite Elemente Diskretisierung mittels volumenartiger Schalenelemente eingeführt. Neben einer skizzenhaften Herleitung der Elementformulierung erfolgt die Definition der zugehörigen diskreten Bilinearform unter Berücksichtigung der ebenfalls in diesem Abschnitt diskutierten Techniken zur Vermeidung auftretender Lockingeffekte.

Zum Abschluss des Kapitels wird in Abschnitt 3.4 das Konzept der hybriden Netze betrachtet, das die Grundlage für eine kombinierte Verwendung von Verschiebungselementen und volumenartigen Schalenelementen innerhalb einer Triangulierung bietet. Neben dem entscheidenden Punkt der Kopplung der beider Elementtypen, werden zudem mögliche Lösungsverfahren der resultierenden Gleichungssysteme angeführt.

## Allgemeines Konzept

Die Entwicklung eines allgemeinen Konzepts für die DWR-Fehlerschätzung bei Problemstellungen mit modifizierter diskreter Formulierung ist Gegenstand von Kapitel 4, wobei der Abschnitt 4.1 zunächst zur Präzisierung der Ausgangssituation dient. Dazu werden in einem ersten Schritt in Abschnitt 4.1.1 die bereits bekannten Resultate aus [7], [11] und [74] für die Identitäten des numerischen und des Diskretisierungsfehlers zusammengefasst. Die Definition der modifizierten Formulierung wird in Abschnitt 4.1.2 mittels einer diskreten Semilinearform, die richtungsdifferenzierbar im ersten Argument bezüglich des kontinuierlichen Funktionenraums ist, eingeführt. Abschließend erfolgt die Spezifizierung des Modellbegriffs sowie die des Modellfehlers als die Differenz zweier Diskretisierungsfehler in Abschnitt 4.1.3. Die Erweiterung der bekannten Fehleridentität für den Diskretisierungsfehler auf die geänderte Ausgangssituation wird in Abschnitt 4.2 vorgestellt. Der wesentliche Unterschied sind drei Terme, die zusätzlich zu den erwarteten Residuen – primal, dual und numerisch – die Darstellung komplettieren. Der primale und duale

---

Zusatzterm gewichtet mit kontinuierlichen Funktionen ist dabei als Konsistenzfehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Problemstellung zu verstehen, wohingegen der dritte Term ein Maß für die Verletzung der Galerkinorthogonalität ist. Als weitere Resultate werden die Beziehung zwischen primalem und dualem Residuum sowie eine rein primale Fehleridentität hergeleitet.

In Abschnitt 4.3 liegt der Fokus auf der Betrachtung des Modellfehlers. Hierzu wird eine weitere modifizierte diskrete Problemstellung, die sich sowohl in der Semilinearform als auch in den zugrundeliegenden diskreten Funktionenräumen unterscheidet, eingeführt. Die hergeleitete Identität liefert den Modellfehler als Differenz der jeweiligen Diskretisierungsfehler. Neben der allgemein gültigen Situation, werden entsprechende Fehleridentitäten für ausgewählte Beziehungen der jeweiligen diskreten Teilräume untereinander angeben. Hierbei spielen insbesondere Teilraumbeziehungen eine Rolle, da diese einen maßgeblichen Einfluss auf die Stationarität der Lagrangefunktionale haben.

Die den adaptiven Verfahren zugrundeliegenden Fehlerschätzer werden in Abschnitt 4.4 mittels numerischer Approximation aus den zuvor hergeleiteten Fehleridentitäten gewonnen. Diese basiert zum einen auf der Identifizierung und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und zum anderen auf der Bestimmung guter Näherungen der analytischen Größen. Hinsichtlich des zweiten Punktes werden einige mögliche Techniken angegeben und kurz erläutert. Bei der Approximation der Modellfehleridentität spielt die Identifizierung von Termen höherer Ordnung eine entscheidende Rolle. Analog zu der Vorgehensweise in [22] lässt sich hier unter der Voraussetzung, dass das betrachtete Lagrangefunktional eine Stabilitätsbedingung erfüllt – was beispielsweise bei vorhandener Lipschitzstetigkeit der zugehörigen Inversen der Fall ist – und der Spezialfall identischer diskreter Teilräume vorliegt, eine allgemeinere Aussage treffen. In allen anderen Fällen ist die präzise Untersuchung der explizit betrachteten Problemstellung notwendig.

### **Selektiv reduzierte Integration**

Als erstes Anwendungsbeispiel wird das Modellproblem der selektiv reduzierten Integration in Kapitel 5 betrachtet. Die Untersuchungen starten



in Abschnitt 5.1 mit der Anwendung des hergeleiteten Diskretisierungsfehlerschätzers auf ein Beispiel mit vorgegebener, glatter, analytischer Lösung. Bei zunächst moderater Querkontraktionszahl  $\nu = 0.25$  zeigt sich, dass die hergeleiteten Zusatzterme nicht nur ein theoretisches Ergebnis sind, sondern die Berücksichtigung für eine qualitativ gute Fehlerschätzung notwendig ist. Zur Bewertung wird hierbei auf den Effektivitätsindex zurückgegriffen, der als das Verhältnis von geschätztem zu wahren Fehler definiert ist. Beim Übergang zu beinahe inkompressiblem Materialverhalten verschlechtert sich die Qualität des Fehlerschätzers jedoch zunehmend. Mittels der in Abschnitt 5.2 durchgeführten Untersuchung anhand der äquivalenten gemischten Formulierung lässt sich die Ursache als ein Problem der numerischen Approximation der kontinuierlichen Größen identifizieren. Die Anpassung der verwendeten Rekonstruktionstechnik mit einer gesonderten Behandlung des volumetrischen Anteils liefert einen modifizierten Fehlerschätzer, der auch im Falle beinahe inkompressiblem Materialverhaltens Effektivitätsindizes liefert, die gegen den Wert 1 streben. Während aufgrund der Glattheit der zuvor betrachteten Lösung bereits mit uniformer Verfeinerung die zu erwartenden optimalen Konvergenzraten erzielt werden können, ist dies in dem darauffolgenden Beispiel, basierend auf einer analytischen Lösung mit reduzierter Regularität, nicht mehr möglich. Stattdessen wird auf adaptive Verfeinerungstechniken zurückgegriffen, für die die entsprechenden Elementfehlerindikatoren aus dem modifizierten Fehlerschätzer abgeleitet werden. Mit Hilfe der Optimal-Mesh-Strategie nach Richter [76] wird eine Folge von Triangulierungen erzeugt, bezüglich derer die Konvergenzrate erneut optimal ist. Auch die zugehörige Fehlerschätzung liefert sehr gute Ergebnisse mit Effektivitätsindizes nahe dem Wert 1.

Abschnitt 5.3 befasst sich schließlich mit der Anwendung des Modellfehlerschätzers. Dazu wird neben der Bilinearform resultierend aus der Verwendung der selektiv reduzierten Integration die entsprechende Version für bilineare Verschiebungselemente als zweites Modell betrachtet. Dies führt auf den Spezialfall, in dem sich lediglich die Bilinearformen unterscheiden, die zugrundeliegenden diskreten Funktionenräume aber identisch sind. Nachdem die benötigte Stabilitätsbedingung unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Zielgröße nachgewiesen und somit die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bei ausreichend fei-



---

ner Startdiskretisierung zulässig ist, wird ein kombinierter modell- und netzadaptiver Algorithmus auf Basis der Fehlerreduktionsstrategie nach Dörfler [35] und erneut der Optimal-Mesh-Verfeinerung auf das zuvor betrachtete Beispiel angewendet. Hierzu erfolgt eine Anpassung der Situation dahingehend, dass inkompressibles Materialverhalten nur noch in einen Teilbereich vorliegt. Die erhaltenen Ergebnisse zeigen auch in diesem Fall eine optimale Reduktionsrate des Fehlers sowie eine sehr gute Fehlerschätzung. Zudem wird der Bereich der Inkompressibilität exakt durch den Algorithmus identifiziert und ein notwendiger Modellwechsel automatisch durchgeführt.

### **Volumenartige Schalenelemente**

Die Anwendung der Fehlerschätzer auf die deutlich komplexere diskrete Problemstellung der volumenartigen Schalenelemente erfolgt in Kapitel 6. Als erstes Beispiel dient analog zu Kapitel 5 die Betrachtung einer Problemstellung mit vorgegebener, glatter analytischer Lösung. Dabei kristallisiert sich die Auswertung der zugrundeliegenden Bilinearform für die Rekonstruktion höherer Ordnung als eine entscheidende Schwierigkeit heraus, die nur durch eine angepasste abgeschwächte Version behoben werden kann. Der daraus resultierende Informationsverlust bleibt in den erhaltenen Resultaten jedoch nicht unbemerkt. Anstelle nahe dem Wert 1 stabilisiert sich der Effektivitätsindex um den Wert 0.88 beziehungsweise 0.64 bei der Verwendung einer Ausgangstriangulierung mit stark verzerrten Elementen. Die Anwendung adaptiver Techniken erfolgt zunächst ebenfalls an diesem Beispiel und liefert im Fall der unverzerrten Ausgangstriangulierung einen leicht verminderten Fehler bei gleicher Konvergenzrate. Auch die resultierende lokal adaptive Vernetzung zeigt die erwarteten Verfeinerungen im Bereich der definierten Zielgröße. Im Anschluss wird eine Problemstellung basierend auf einer vorgegebenen analytischen Lösung mit reduzierter Regularität betrachtet. Analog zu den Ergebnissen für das Beispiel mit glatter Lösung ergeben sich optimale Reduktionsraten für den tatsächlichen und den geschätzten Fehler, der Effektivitätsindex stabilisiert sich hingegen erneut nur um den Wert 0.65. Zudem lassen die resultierenden lokal verfeinerten Triangulierungen auf eine nicht optimale Fehlerlokalisierung schließen.

In Abschnitt 6.2 wird abschließend die Modellfehlerschätzung zwischen volumenartigen Schalenelementen und trilinearen Verschiebungselementen betrachtet. Neben der Herleitung des Modellfehlerschätzers für die vorliegende Situation werden erste Ansätze für die numerische Auswertung sowie mögliche Auswirkungen auf die Bestandteile der Fehlerschätzer durch die Verwendung hybrider Netze für eine lokal adaptive Vernetzung mit volumenartigen Schalenelementen und trilinearen Volumenelementen diskutiert.

## Kapitel 2.

# Lineare Elastizitätstheorie

Im Rahmen dieses Kapitels, auf dessen Inhalt im weiteren Verlauf der Arbeit stetig zurückgegriffen wird, erfolgt eine mathematisch motivierte Einführung in die Theorie der linearen Elastizität.

Der Abschnitt 2.1 befasst sich zunächst mit dem notwendigen funktionalanalytischen Hintergrund. In diesem Zuge werden Funktionenräume eingeführt und Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für elliptische Randwertprobleme 2. Ordnung, sowie Resultate für die Theorie von Sattelpunktproblemen mit und ohne Strafterm angegeben. Auf die Nachweise der jeweiligen Aussagen wird weitestgehend verzichtet und stattdessen auf die entsprechende Literatur, wie beispielsweise die Bücher [2], [4], [26], [41] oder [78], verwiesen.

Im sich anschließenden Abschnitt 2.2 liegt der Fokus auf den verschiedenen variationellen Formulierungen der Theorie der linearen Elastizität, die aus der entsprechenden starken Formulierung abgeleitet werden. Neben den Darstellungen nach Hu–Washizu und Hellinger–Reissner, sowie der reinen Verschiebungsmethode, wird zusätzlich der aus dem Hellinger–Reissner Prinzip abgeleitete Spezialfall der Verschiebung–Druck Formulierung diskutiert. Die Einführung der drei zugrundeliegenden strukturmechanischen Größen (*Verschiebung*, *Verzerrung* und *Spannung*) und deren kinematischen und konstitutiven Beziehungen erfolgt zu Beginn des Abschnittes auf anschauliche Art und Weise. Eine entsprechende, strikt mathematische Darstellung beziehungsweise Definition findet sich beispielsweise in [33] oder [86]. Die Präsentation der Ergebnisse orientiert sich dabei im Wesentlichen an [26, Kapitel VI, §3]. Einige Resultate sind auch in [80, Kapitel 25] zu finden. Abschließend wird mit Blick auf die

Anwendungsbeispiele in Kapitel 5 das Konzept des ebenen Verzerrungs- und des ebenen Spannungszustands erläutert.

## 2.1. Funktionalanalytische Grundlagen

Im Folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$  immer ein beschränktes Gebiet mit stückweiser Lipschitz-stetiger Parametrisierung des Randes  $\partial\Omega$  und erfülle die Kegelbedingung – siehe [26, Kapitel I, §1 Abbildung 6].

Der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen zum Index  $1 \leq p < \infty$  ist gegeben durch

$$L^p(\Omega) := \left\{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \mid \varphi \text{ messbar, } \int_{\Omega} |\varphi|^p dx < \infty \right\}.$$

Dabei sind die Elemente von  $L^p$  als Repräsentanten von Äquivalenzklassen bezüglich der Relation

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

zu verstehen. Mit der zugehörigen Norm

$$\|\bullet\|_{L^p} := \left( \int_{\Omega} |\bullet|^p dx \right)^{1/p}$$

sind die  $L^p$ -Räume Banachräume. Für  $p = \infty$  und mit

$$\|\bullet\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\bullet(x)|$$

ist der Raum der *essentiell beschränkten* Funktionen gegeben durch

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \mid \varphi \text{ messbar, } \|\varphi\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

Dabei werden auch hier die Elemente als Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklassen hinsichtlich der Relation  $\sim$  verstanden.

Zur Abgrenzung zum skalaren Fall wird für die im Kontext dieser Arbeit hauptsächlich verwendeten vektor- und matrixwertigen Funktionen der Bildbereich explizit angegeben. Für  $t \in \mathbb{N}$  beschreibt  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^t)$  somit

den Raum der vektorwertigen und  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{t \times t})$  den der matrixwertigen Funktionen. In den zugehörigen Normen ist der Betrag  $|\bullet|$  als entsprechende Vektor- beziehungsweise Matrixnorm zu verstehen.

Der  $L^p$ -Raum zum Index  $p = 2$  besitzt zudem eine zusätzliche Eigenschaft. Je nach Bildraum wird mittels des Skalarprodukts

$$(\varphi, \psi)_0 = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x) dx$$

beziehungsweise

$$(\varphi, \psi)_0 = \sum_{i=1}^t \int_{\Omega} \varphi_i(x)\psi_i(x) dx \quad \text{oder} \quad (\varphi, \psi)_0 = \sum_{i,j=1}^t \int_{\Omega} \varphi_{ij}(x)\psi_{ij}(x) dx$$

der Raum  $L^2$  zu einem Hilbertraum. Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm  $\|\varphi\|_{L^2} = \sqrt{(\varphi, \varphi)_0}$  stimmt mit der zuvor angegebenen für  $p = 2$  überein.

Da Funktionen aus  $L^p$  nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind, wird eine abgeschwächte Differenzierbarkeitseigenschaft benötigt. Für ein  $\varphi \in L^p(\Omega)$  und einen Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  bezeichnet  $\psi^\alpha \in L^p(\Omega)$  die schwache Ableitung von  $\varphi$ , falls die Gleichung

$$(\psi^\alpha, \Phi)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\varphi, \partial^\alpha \Phi)_0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.1)$$

erfüllt ist. Dabei beschreibt  $\mathcal{D}(\Omega)$  den Raum der Testfunktionen, der alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  enthält, deren Träger kompakt in  $\Omega$  sind, das heißt

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subset \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Die Definition des Sobolevraums  $W^{m,p}$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  erfolgt basierend auf dieser Charakterisierung. Es ist

$$W^{m,p}(\Omega) := \{\varphi \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq m \exists \psi^\alpha \in L^p(\Omega) \text{ mit (2.1)}\}.$$

Mit den zugehörigen Normen

$$\|\varphi\|_{W^{m,p}} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\psi^\alpha\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

beziehungsweise

$$\|\varphi\|_{W^{m,\infty}} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\psi^\alpha\|_{L^\infty}$$

und  $\psi^\alpha = \varphi$  für  $|\alpha| = 0$  sind die Sobolevräume für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  Banachräume. Wie auch  $L^2$  an sich, ist  $W^{m,2}$  mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{W^{m,2}} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha)_0$$

darüber hinaus ein Hilbertraum. Daher wird nachfolgend die Notation  $H^m(\Omega) = H^{m,2}(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$  verwendet.

Für die Betrachtung von Randwertproblemen ist die Vorgabe von Funktionswerten auf dem Rand des Gebietes  $\Omega$  notwendig. Der nachfolgende Satz gibt an, wie dies für Repräsentanten von Äquivalenzklassen bezüglich der zuvor angegebenen Relation  $\sim$  zu verstehen ist.

**Satz 2.1.** *Sei das Gebiet  $\Omega$  wie zu Beginn des Abschnittes vorausgesetzt und  $p \in [1, \infty)$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter, stetiger und linearer Operator*

$$\gamma: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega),$$

der für  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  mit der klassischen Einschränkung/Auswertung  $\varphi \mapsto \varphi|_{\partial\Omega}$  übereinstimmt. Dieser Operator heißt Spuroperator.

*Beweis.* Siehe [37, Abschnitt 5.5, Theorem 1]. □

Mit Hilfe des Spuroperators lässt sich der Raum der  $H^1$ -Funktionen mit Nullrandbedingungen definieren durch

$$H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \gamma(\varphi) = 0\}.$$

Eine weitere Konstruktionsweise, die unter den gegebenen Voraussetzungen an das Gebiet  $\Omega$  den selben Funktionenraum liefert, basiert auf der

Vervollständigung von  $\mathcal{D}(\Omega)$  bezüglich der  $\|\bullet\|_{H^1}$ -Norm. Diese Vorgehensweise ist dahingehend vorteilhaft, da sie nicht zwingend die Lipschitz-Stetigkeit des Randes voraussetzt.

Neben der Möglichkeit Bedingungen auf dem gesamten Rand  $\partial\Omega$  vorzugeben, erlaubt der Spuroperator dies auch auf entsprechenden Teilbereichen. Dazu sei eine disjunkte Zerlegung von  $\partial\Omega$  in offene Mengen  $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$  mit  $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$  und  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  gegeben, bei der zumindest  $\Gamma_D$  immer ein echt positives  $(d-1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß  $|\Gamma_D| > 0$  besitzt. Gilt zudem  $|\Gamma_N| > 0$ , so existiere darüber hinaus eine  $C^1$ -Parametrisierung des relativen Randes  $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N}$  bis auf endlich viele Punkte. Für ein  $u_0 \in L^2(\Gamma_D)$  beschreibt

$$H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \gamma(\varphi)|_{\Gamma_D} = u_0\}$$

den Raum der  $H^1$ -Funktionen, die auf  $\Gamma_D$  im Spursinn mit  $u_0$  übereinstimmen. Dabei sind nur solche  $u_0 \in L^2(\Gamma_D)$  zulässig, die sich zu einer Funktion aus  $H^{1/2}(\partial\Omega) := \gamma(H^1(\Omega))$  fortsetzen lassen. Im Falle homogener Randbedingungen, das heißt  $u_0 = 0$ , wird abkürzend die Bezeichnung  $H_{\Gamma_D}^1$  anstelle von  $H_{\Gamma_D, 0}^1$  verwendet.

Analog zu  $H_0^1$  besteht die Möglichkeit, auch den Raum  $H_{\Gamma_D}^1$  durch die Vervollständigung bezüglich der  $H^1$ -Norm zu konstruieren, vergleiche [26, Kapitel II, Beispiel 3.3]. Die zugrunde liegende Menge ist hierbei

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \mid \varphi \text{ verschwindet auf einer Umgebung von } \Gamma_D\}.$$

Versehen mit dem  $H^1$ -Skalarprodukt ist  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  ebenfalls ein Hilbertraum und liegt zwischen den Räumen  $H_0^1(\Omega)$  und  $H^1(\Omega)$ .

**Bemerkung 2.2.** *Der Raum  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  kann auf unterschiedliche Art und Weise definiert beziehungsweise konstruiert werden. Andere Möglichkeiten finden sich zum Beispiel in [55, Abschnitte 1.4. § 5.3] sowie in [41, Abschnitt 1.3.3]. Unter den hier vorausgesetzten Eigenschaften an den Rand von  $\Omega$  liefern alle Definitionen den selben Raum.*

Im Folgenden wird die Lösbarkeit von variationellen Gleichungen der Form

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H \tag{2.2}$$

diskutiert. Dabei ist  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Bilinearform,  $l: H \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional und  $H$  ein abstrakter Hilbertraum. Das Ziel ist es, Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit eines Elementes  $u \in H$  zu machen, dass die Gleichung (2.2) erfüllt. Für symmetrische, koerzive und stetige Bilinearformen  $a$  liefert der Riesz'sche Darstellungssatz entsprechende Resultate.

**Satz 2.3** (Riesz'scher Darstellungssatz im Hilbertraum). *Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische, koerzive und stetige Bilinearform, das heißt für alle  $\psi, \varphi \in H$  gilt*

$$\begin{aligned} a(\psi, \varphi) &= a(\varphi, \psi) && \text{(Symmetrie),} \\ \exists C > 0: \quad C \|\varphi\|_H^2 &\leq a(\varphi, \varphi) && \text{(Koerzivität),} \\ \exists C' > 0: \quad a(\psi, \varphi) &\leq C' \|\psi\|_H \|\varphi\|_H && \text{(Stetigkeit).} \end{aligned}$$

Weiterhin sei  $l: H \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges, lineares Funktional auf  $H$ . Dann gibt es genau ein Element  $u \in H$ , das Gleichung (2.2) erfüllt.

*Beweis.* Siehe [80, Theorem 6.4]. □

**Bemerkung 2.4.** *Eine kanonische Wahl für die Bilinearform  $a$  ist das zu  $H$  gehörige Skalarprodukt  $(\bullet, \bullet)_H$ . Dieses ist symmetrisch und koerziv mit  $C = 1$  aufgrund der induzierten Norm. Die Stetigkeit ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung ebenfalls mit  $C' = 1$ . Satz 2.3 besagt dann, dass ein  $u \in H$  existiert, sodass  $l(\bullet) = (u, \bullet)_H$  gilt. Das lineare Funktional  $l$  lässt sich demnach mit einem Element aus  $H$  identifizieren.*

Im Anschluss an die allgemeine Situation werden Bilinearformen betrachtet, die eine konkrete Struktur der Form  $a(\psi, \varphi) := (L_A \psi)(\varphi)$  aufweisen und somit durch einen Operator  $L_A: H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega) \rightarrow (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))'$  induziert sind. Das Bild  $L_A \psi: H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  eines beliebigen, aber fest gewählten Elementes  $\psi \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega)$  beschreibt hierbei ein lineares Funktional, das über die Anwendung auf ein beliebiges Element aus  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  durch

$$(L_A \psi)(\varphi) := \int_{\Omega} (A(x) \nabla \psi(x))^\top \nabla \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

definiert ist. Erfüllt die Abbildung  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$  mit  $x \mapsto A(x)$  und  $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$  zudem eine gleichmäßige untere Abschätzung der



Form

$$\xi^\top A(x) \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (2.3)$$

für fast alle  $x \in \Omega$  und  $\alpha > 0$ , so garantiert der nachfolgende Satz die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichung (2.2).

**Satz 2.5** (Existenz für einen elliptischen Operator). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  wie zu Beginn des Abschnitts angegeben,  $l: H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional auf  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  und  $u_0 \in L^2(\Gamma_D)$  so, dass  $H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega) \neq \emptyset$ . Weiter erfülle  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$  die Elliptizitätsbedingung (2.3) und sei punktweise symmetrisch. Dann existiert ein eindeutiges  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega)$ , das die Gleichung*

$$a(u, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

erfüllt. Dabei ist  $a$  die durch  $L_A$  induzierte Bilinearform.

Der Beweis des Satzes beruht unter anderem auf der folgenden Aussage.

**Satz 2.6** (Poincaré-Ungleichung). *Es sei  $\Omega$  wie zuvor und  $V \subset H^1(\Omega)$  eine geeignete Teilmenge. Dann existiert eine Konstante  $C_P = C_P(\Omega, V)$ , sodass*

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_P \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \quad \forall \varphi \in V.$$

Die Menge  $V \subset H^1(\Omega)$  sei dabei so gewählt, dass eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\varphi = 0$  auf  $\partial\Omega$ ,
2.  $\int_{\Omega} \varphi \, dx = 0$ ,
3. Für  $\Sigma \subset \partial\Omega$  mit nichtverschwindendem  $(d-1)$ -dimensionalem Maß gilt:  $\int_{\Sigma} \varphi \, dx = 0$ .

*Beweis.* Siehe [80, Theorem 4.22]. □

**Bemerkung 2.7.** *Die Poincaré-Ungleichung gilt ebenso für beliebiges  $p \in [1, \infty)$  sowie für vektor- oder matrixwertige Funktionen mit den entsprechenden Normen.*

*Beweis von Satz 2.5.* Im Wesentlichen erfolgt der Nachweis der Voraussetzungen des Riesz'schen Darstellungssatzes für eine entsprechend umgeformte Variationsgleichung. Eine detaillierte Ausführung ist im Anhang A.1 zu finden.  $\square$

Neben den zuvor betrachteten variationellen Problemstellungen basierend auf Variationsgleichungen spielen auch Sattelpunktprobleme beziehungsweise Sattelpunktprobleme mit Strafterm eine entscheidende Rolle. Dies ist insbesondere bei gemischten Problemformulierungen der Fall. Daher erfolgt an dieser Stelle eine Zusammenstellung entscheidender Resultate hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung. Als Grundlage für die Darstellung dient dabei [26, Kapitel III, §4–5].

Es seien  $M$  ein weiterer Hilbertraum,  $b: H \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine zusätzliche Bilinearform und  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional auf  $M$ . Dann ist ein Sattelpunktproblem gegeben durch:

**Problemstellung 2.1.** *Finde  $(u, p) \in H \times M$ , sodass gilt:*

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) + b(\varphi, p) &= l(\varphi) & \forall \varphi \in H, \\ b(u, \xi) &= g(\xi) & \forall \xi \in M. \end{aligned}$$

Für eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von Problem 2.1 sind Voraussetzungen an die Bilinearformen  $a$  und  $b$  nötig.

**Satz 2.8** (Brezzis Splitting Theorem). *Es existiert genau dann eine eindeutige Lösung  $(u, p) \in H \times M$  von Problem 2.1, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Bilinearform  $a$  erfüllt*

$$C \|\varphi\|_H^2 \leq a(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in V$$

*mit  $V := \{\varphi \in H \mid b(\varphi, \xi) = 0 \forall \xi \in M\}$ . Das heißt  $a$  ist koerziv auf dem Unterraum  $V \subset H$ .*

2. *Für die Bilinearform  $b$  existiert eine Konstante  $C_{\text{IS}} > 0$ , sodass gilt*

$$\inf_{\xi \in M} \sup_{\varphi \in H} \frac{b(\varphi, \xi)}{\|\varphi\|_H \|\xi\|_M} \geq C_{\text{IS}}.$$

Die Bedingung 2. ist auch unter dem Namen *inf-sup*-Bedingung beziehungsweise *Ladyženskaya-Babuška-Brezzi*-, kurz *LBB*-Bedingung, bekannt.

*Beweis.* Siehe [26, Kapitel III, Theorem 4.3]. □

Für ein Sattelpunktproblem mit Strafterm sei zusätzlich die Bilinearform  $c: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Die zugehörige Problemstellung lautet:

**Problemstellung 2.2.** Für  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \geq 0$  finde  $(u_s, p_s) \in H \times M$ , sodass gilt:

$$\begin{aligned} a(u_s, \varphi) + b(\varphi, p_s) &= l(\varphi) & \forall \varphi \in H, \\ b(u_s, \xi) - s^2 c(p_s, \xi) &= g(\xi) & \forall \xi \in M. \end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems 2.2 und insbesondere eine Aussage über die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter  $s$  ist Inhalt des nächsten Satzes.

**Satz 2.9.** *Es existiert genau dann eine eindeutige Lösung  $(u_s, p_s) \in H \times M$ , wenn die Bilinearformen  $a$  und  $b$  die Bedingungen aus Satz 2.8 erfüllen, die Bilinearform  $c$  stetig ist und zudem  $a(\varphi, \varphi) \geq 0$  für alle  $\varphi \in H$  und  $c(\xi, \xi) \geq 0$  für alle  $\xi \in M$  gilt.*

*Ferner sind die Lösungen  $(u_s, p_s)$  gleichmäßig beschränkt in  $s$  für alle  $0 \leq s \leq 1$ .*

*Beweis.* Siehe [26, Kapitel III, Satz 4.11]. □

## 2.2. Verschiedene Formulierungen der linearen Elastizität

Das in Abschnitt 2.1 eingeführte Gebiet  $\Omega$  beschreibe für die nachfolgenden Überlegungen einen Festkörper im  $\mathbb{R}^3$ , durch dessen unbelastete Ausgangslage die Referenzkonfiguration  $\Omega_R$  definiert ist. Der aus dem Einwirken von äußeren Kräften auf diesen Körper resultierende deformierte Zustand, beschreibt die Momentankonfiguration  $\Omega$ . Anhand der Differenz zwischen dem ursprünglichen Materialpunkt  $X \in \Omega_R$  und dem

deformierten Punkt  $x \in \Omega$  erfolgt die Definition der Verschiebung. Das heißt, es existiert eine Abbildung  $u: \Omega_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass für jedes  $X \in \Omega_{\mathbb{R}}$  und dem zugehörigen  $x \in \Omega$  gilt:  $x = x(X) = X + u(X)$ . Für die Deformation des Körpers ist jedoch die absolute Verschiebung nicht die entscheidende Größe, da durch eine reine Translation der Körper zwar von einer Position zu einer anderen bewegt wird, sich aber nicht deformiert. Aussagekräftiger ist in welchem Verhältnis sich benachbarte Materialpunkte zueinander bewegen. Ein Maß dafür ist der Verzerrungstensor  $\varepsilon$ . Dieser ist ebenfalls eine Abbildung  $\varepsilon: \Omega_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ . Dabei bezeichnet  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  die Menge der symmetrischen Matrizen der Dimension  $3 \times 3$ . Die kinematische Beziehung zwischen der Verschiebung und der dadurch verursachten Verzerrung ist im Fall der linearen Elastizität gegeben durch

$$\varepsilon = Du = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^{\top}).$$

Insbesondere wird hierbei vorausgesetzt, dass sowohl die Verschiebung an sich, als auch die daraus resultierenden Verzerrungen sehr klein sind.

Für den deformierten Körper wird analog zur unbelasteten Ausgangslage ein Gleichgewichtszustand vorausgesetzt. Nach dem zentralen Axiom der Mechanik (siehe beispielsweise [26, Kapitel VI, Axiom 1.2]) ist dieser erreicht, wenn sich alle vorhandenen Kräfte des betrachteten Systems zu Null addieren. Die aus der äußeren Belastung resultierenden Kräfte müssen demnach durch entsprechende Kräfte im Inneren des Körpers eliminiert werden. Der Satz von Cauchy (vergleiche zum Beispiel [26, Kapitel VI, Satz 1.3]) sichert die Existenz eines symmetrischen Tensors  $\sigma$ , sodass die aus diesem Tensor abgeleiteten inneren Kräfte den gewünschten Gleichgewichtszustand erzeugen. Der Tensor  $\sigma$  wird als *Cauchyscher Spannungstensor* bezeichnet und ist eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$ , also analog zu den Verzerrungen ein Tensor zweiter Stufe. Die Verknüpfung zwischen Spannungen und Verzerrungen liefern die konstitutiven Gleichungen, auch Materialgesetze genannt. Für linear elastisches, isotropes Materialverhalten lässt sich diese Beziehung durch die zweifache Überschiebung des *Elastizitätstensors* vierter Stufe  $\mathbb{C}$  mit dem Verzerrungstensor zweiter Stufe  $\varepsilon$  realisieren, das heißt

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon.$$

Weiter gilt für den Elastizitätstensor die Zerlegung

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_\mu + \mathbb{C}_K$$

mit

$$\mathbb{C}_\mu = 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{C}_K = K \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}.$$

Dabei beschreibt  $\mathbb{I}$  den Einheitstensor vierter Stufe,  $\mathbf{l}$  den Einheitstensor zweiter Stufe,  $\otimes$  das dyadische Produkt,  $\mu$  den Schub- und  $K$  den Kompressionsmodul. Die inverse Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen ist mit Hilfe des *Nachgiebigkeitstensors*  $\mathbb{A} = \mathbb{C}^{-1}$  definiert. Es gilt  $\varepsilon = \mathbb{A} : \sigma$  mit

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2\mu} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \right) + \frac{1}{9K} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}.$$

**Bemerkung 2.10.** *Es sei an dieser Stelle daraufhin gewiesen, dass der Cauchysche Spannungstensor anders als die Verschiebung und die Verzerrung bezüglich des deformierten Körpers  $\Omega$  statt der Ausgangskonfiguration  $\Omega_R$  definiert ist. Mit Hilfe sogenannter Push-Forward- beziehungsweise Pull-Back-Operationen – vergleiche [63, Abschnitte 1.2 & 1.3] – ist es möglich, alle vorhandenen Größen bezüglich einer einzigen Konfiguration anzugeben. Im Bereich der Strukturmechanik wird hier üblicherweise die Referenzkonfiguration gewählt. Die entscheidende Größe für diese Operationen ist der Gradient der Deformation. Aufgrund der vorausgesetzten kleinen Verzerrungen, das heißt  $\|\nabla u\| \ll \text{diam}(\Omega)$ , gilt*

$$\nabla_X x(X) = \mathbf{l} + \nabla_X u(X) \approx \mathbf{l} \quad \text{und} \quad \det(\nabla_X x(X)) \approx 1,$$

*sodass der Unterschied zwischen den jeweiligen Größen bezüglich der deformierten und der Ausgangskonfiguration vernachlässigbar ist. Daher werden für die weiteren Ausführungen stellvertretend die Bezeichnungen  $x$  und  $\Omega$  gewählt.*

Auf der Basis der zuvor eingeführten Größen und Notationen lässt sich der *kinematisch zulässige* und der *statisch zulässige* Zustand definieren.

**Definition 2.1.** Ein Tripel  $\{u, \varepsilon, \sigma\}$  mit

$$\begin{aligned} u &\in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\Omega \cup \Gamma_D, \mathbb{R}^3) \cap L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ \varepsilon &\in C(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}) \cap L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}) \end{aligned}$$

und

$$\sigma \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}) \cap C(\Omega \cup \Gamma_N, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}) \cap L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}),$$

heißt kinematisch zulässig, falls gilt:

$$\varepsilon(x) = \mathbb{D} u(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\sigma(x) = \mathbb{C}(x) : \varepsilon(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$u(x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Gamma_D. \quad (2.6)$$

Es heißt statisch zulässig, falls gilt:

$$-\operatorname{div}(\sigma(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon(x) = \mathbb{A}(x) : \sigma(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$\sigma(x) n(x) = f_N(x) \quad \forall x \in \Gamma_N. \quad (2.9)$$

Dabei werden mit den Funktionen  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eine Volumenkraftdichte, mit  $f_N \in C(\Gamma_N, \mathbb{R}^3) \cap L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$  eine Oberflächenkraftdichte und mit  $u_0 \in C(\Gamma_D, \mathbb{R}^3) \cap L^2(\Gamma_D, \mathbb{R}^3)$  eine Randverschiebung vorgegeben. Für  $x \in \Gamma_N$  beschreibt  $n(x)$  den äußeren Einheitsnormalenvektor an dieser Stelle.

Die Aufgabenstellung der linearen Elastizität ergibt sich schließlich zu:

**Problemstellung 2.3.** Finde ein Tripel  $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ , das sowohl kinematisch als auch statisch zulässig ist.

Für die Betrachtung der unterschiedlichen variationellen Formulierungen werden neben den Kerngrößen  $u$ ,  $\varepsilon$  und  $\sigma$  als *Mastervariablen* sogenannte *Slavevariablen* eingeführt, die sich aus den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.8) ableiten – vergleiche hierzu auch Abbildung 2.1. Ausgehend vom Kräftegleichgewicht im Gebiet – Gleichung (2.7) – und auf

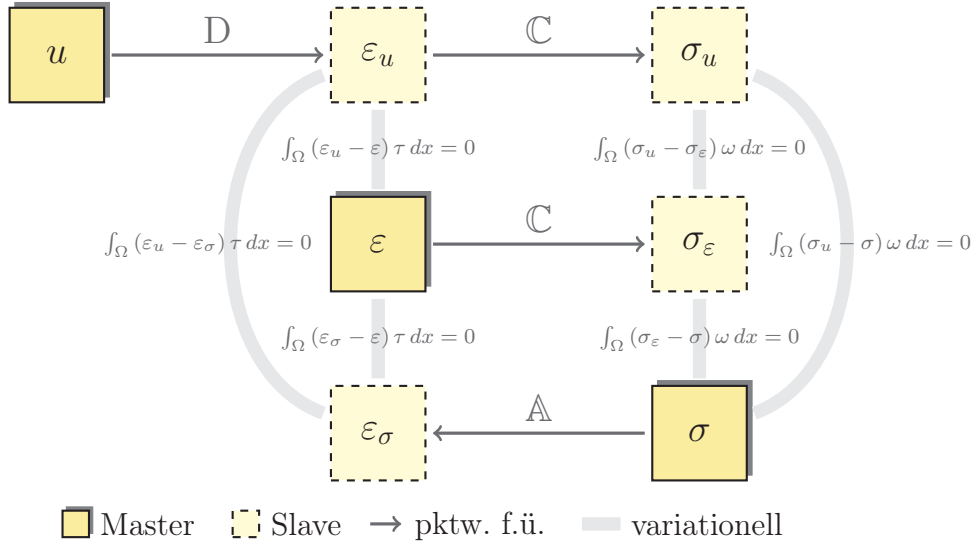


Abbildung 2.1.: Übersicht der potentiellen Mastervariablen und den daraus resultierende Slavevariablen.

dem Neumannrand – Gleichung (2.9) – ergibt sich durch die Multiplikation mit energiekonjugierten Verschiebungsgrößen, der Integration über des jeweilige Gebiet, die Anwendung der partiellen Integrationsregel, die Addition beider Resultate und das abschließende Einbeziehen der in Abbildung 2.1 dargestellten Abhängigkeiten zwischen Master- und Slavevariablen die Gleichung

$$0 = \int_{\Omega} (\varepsilon_u - \varepsilon) : \tau + (\sigma_\varepsilon - \sigma) : \omega + \sigma : \varepsilon_\varphi - f \varphi \, dx - \int_{\Gamma_D} (\sigma n) \varphi \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi \, dx.$$

Die so entwickelte schwache Formulierung erlaubt eine Anpassung der Anforderungen an die Funktionenräume dahingehend, dass alle starken Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen aus Definition 2.1 vernachlässigbar sind beziehungsweise im Falle der Verschiebung  $u$  durch die Eigenschaft der schwachen Differenzierbarkeit ersetzt werden können. Es ist demnach ausreichend zu fordern, dass

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), & \varepsilon &\in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}_{sym}), & \sigma &\in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3}_{sym}), \\ f &\in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), & f_N &\in L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^3), & u_0 &\in L^2(\Gamma_D, \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Werden darüber hinaus die Verschiebungsrandbedingungen auf  $\Gamma_D$  in den Funktionenraum integriert, so ist  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Dies impliziert insbesondere  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und somit

$$\int_{\Gamma_D} (\sigma n) \varphi \, dx = 0,$$

wobei die angegebenen Randintegrale im Spursinne zu verstehen sind.

Die zur schwachen Formulierung gehörende Problemstellung ist in der Literatur auch als Drei-Feld-Problem nach dem *Hu-Washizu-Prinzip* bekannt, vergleiche [90].

**Problemstellung 2.4** (Hu-Washizu-Prinzip). *Gesucht ist ein Tripel  $S = \{u, \varepsilon, \sigma\}$  mit  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\varepsilon, \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$ , sodass die Gleichung*

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{HW}}(S)(S') &:= \int_{\Omega} (\varepsilon_u - \varepsilon) : \tau + (\sigma_\varepsilon - \sigma) : \omega + \sigma : \varepsilon_\varphi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f \varphi \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

für jedes Tripel  $S' = (\varphi, \omega, \tau)$  mit  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\omega, \tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$  erfüllt ist.

Eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Tripels  $S$  basiert auf der in Abschnitt 2.1 behandelten Theorie der Sattelpunktprobleme.

**Satz 2.11.** *Der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  sei symmetrisch, komponentenweise essentiell beschränkt und positiv definit, das heißt*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{ijkl}(x) &= \mathbb{C}_{klij}(x) = \mathbb{C}_{jilk}(x) && \forall x \in \Omega, \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbb{C}_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega) && \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \\ \exists \alpha > 0 &\text{ mit } \tau : \mathbb{C} : \tau \geq \alpha \|\tau\|_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}^2 && \forall \tau \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

*Dann besitzt Problemstellung 2.4 eine eindeutige Lösung.*

Für den Beweis wird eine Aussage darüber benötigt, inwieweit der Gradient einer Funktion durch den symmetrischen Gradienten kontrolliert wird. Eine Antwort darauf liefert die *Korn'sche-Ungleichung*.



**Satz 2.12** (Korn'sche Ungleichung). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  eine offene Teilmenge mit positivem 2-dimensionalen Maß. Dann existiert eine Konstante  $C_K \in \mathbb{R}$  mit  $C_K = C_K(\Omega, \Gamma_D) > 0$ , sodass für alle  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gilt:*

$$\int_{\Omega} D\varphi : D\varphi \, dx \geq C_K \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2.$$

*Beweis.* Siehe [26, Kapitel VI, Satz 3.3] oder [80, Korollar 25.6].  $\square$

*Beweis von Satz 2.11.* Für den Beweis wird Problemstellung 2.4 in ein Sattelpunktproblem überführt und die Voraussetzungen von Satz 2.8 nachgewiesen. Die Details sind im Anhang A.2 ausgeführt.  $\square$

**Bemerkung 2.13.** *Die Voraussetzung  $C_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  ist insbesondere dann erfüllt, wenn  $\mu, K \in L_{>0}^\infty(\Omega)$  mit*

$$L_{>0}^\infty(\Omega) := \{\zeta \in L^\infty(\Omega) \mid \zeta(x) > 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Ausgehend vom Drei-Feld-Prinzip von Hu–Washizu lassen sich durch die Einschränkung auf ausgewählte Mastervariablen weitere Problemstellungen ableiten. So liefert beispielsweise das Eliminieren der Verzerrungen aus der Gruppe der Mastervariablen und die Forderung nach der variationellen Gleichheit der durch die Verschiebungen und Spannungen induzierten Slavevariablen  $\varepsilon_u$  und  $\varepsilon_\sigma$  das Prinzip von Hellinger–Reissner, vergleiche [49] und [75].

**Problemstellung 2.5** (Hellinger–Reissner). *Finde ein Paar  $S = \{u, \sigma\}$  mit  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$ , sodass die Gleichung*

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{HR}}(S)(S') &:= \int_{\Omega} (\varepsilon_u - \varepsilon_\sigma) : \tau + \sigma : \varepsilon_\varphi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f\varphi \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N\varphi \, dx = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

für alle Paare  $S' = \{\varphi, \tau\}$  mit  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$  erfüllt ist.

Die eindeutige Lösbarkeit lässt sich auch hier über die Identifizierung mit einem Sattelpunktproblem zeigen.

**Satz 2.14.** *Der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{A}$  sei symmetrisch, komponentenweise beschränkt und positiv definit, das heißt er erfülle die gleichen Bedingungen wie der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  in Satz 2.11. Dann besitzt Problemstellung 2.5 eine eindeutige Lösung.*

*Beweis.* Siehe Anhang A.3. □

Durch die Reduzierung des Satzes der Mastervariablen allein auf die Verschiebung  $u$ , ergibt sich die sogenannte *reine Verschiebungsmethode*. Dabei werden die statischen Kräftegleichgewichte in den Gleichungen (2.7) und (2.9) bezüglich der zugehörigen Slavevariablen  $\sigma_u = \mathbb{C} : Du$  definiert und für die schwache Form mit der ebenfalls induzierten Slavevariablen  $\varepsilon_u = Du$  als energiekonjugierte Verzerrung multipliziert.

**Problemstellung 2.6** (Reine Verschiebungsmethode). *Gesucht ist ein  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , sodass die Gleichung*

$$\delta\Pi_V(u)(\varphi) := \int_{\Omega} \sigma_u : \varepsilon_{\varphi} dx - \int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Gamma_N} f_N\varphi dx = 0 \quad (2.12)$$

für alle  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  erfüllt ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  liefert der Satz 2.5 für den Fall, dass die Voraussetzungen von Satz 2.11 erfüllt sind. Die Stetigkeit der Bilinearform

$$\begin{aligned} a &: H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}, \\ a(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \sigma_u : \varepsilon_{\varphi} dx = \int_{\Omega} (\mathbb{C} : Du) : D\varphi dx \end{aligned}$$

ergibt sich aus der essentiellen Beschränktheit der einzelnen Komponenten von  $\mathbb{C}$  und der Stetigkeit des Skalarprodukts auf  $L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$ . Die Elliptizität von  $a$  folgt aus der positiven Definitheit von  $\mathbb{C}$  und aus der Korn'schen sowie der Poincaré-Ungleichung.

Als letzte schwache Formulierung wird eine besondere Variante des Prinzips von Hellinger-Reissner aus Problemstellung 2.5 betrachtet, die auf der Aufspaltung eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe  $\tau$  in seinen *deviatorischen*  $\tau^{\text{dev}}$  und seinen *volumetrischen*  $\tau^{\text{vol}}$  Anteil beruht. Die

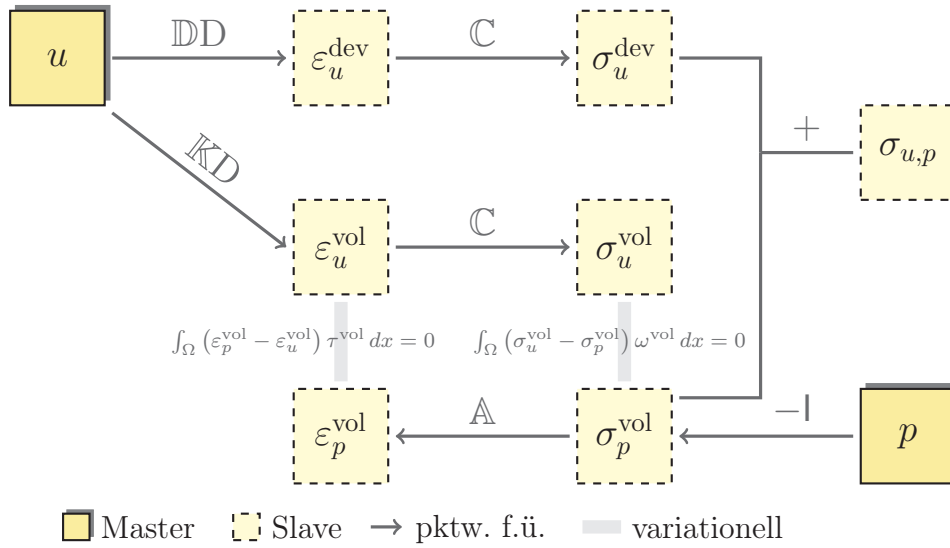


Abbildung 2.2.: Aus den Mastervariablen  $u$  und  $p$  resultierende Slavevariablen und die entsprechenden Verknüpfungen.

benötigte Zerlegung lässt sich durch die zweifache Überschiebung mit den Tensoren vierter Stufe

$$\mathbb{D} := \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \quad \text{und} \quad \mathbb{K} := \frac{1}{3} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}$$

bestimmen, die bereits bei der Definition des Elastizitätstensors  $\mathbb{C}$  und des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{A}$  verwendet wurden. Der deviatorische Teil beschreibt dabei volumenerhaltende Deformationen, wohingegen der volumetrische Anteil die reinen Volumenänderung angibt. Im Zuge einer entsprechenden Zerlegung des Spannungstensors  $\sigma$  lässt sich der volumetrische Anteil auch mit Hilfe einer weiteren physikalischen Größe, dem sogenannten mechanischen Druck  $p$ , identifizieren. Dieser ist über den negativen Mittelwert der Hauptdiagonalelemente des Spannungstensors definiert. Es gilt

$$\sigma^{\text{vol}} := \mathbb{K} : \sigma = \frac{1}{3} (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) : \sigma = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \mathbf{l} = -pl.$$

Wird nun die Spannung  $\sigma$  im Prinzip von Hellinger–Reissner als Mastervariable durch den volumetrischen Anteil, beschrieben durch den mecha-

nischen Druck  $p$ , ersetzt, so ergeben sich die in Abbildung 2.2 dargestellten Slavevariablen mit den zugehörigen Beziehungen. Das statische Kräftegleichgewicht im Gebiet und am Neumannrand wird in diesem Kontext bezüglich des zusammengesetzten Spannungstensors

$$\sigma_{u,p} := \sigma_u^{\text{dev}} + \sigma_p^{\text{vol}} = \sigma_u^{\text{dev}} - pl$$

gefordert. Darüber hinaus sind die volumetrischen Verzerrungen resultierend aus den Spannungen  $\varepsilon_p^{\text{vol}}$  und aus den Verschiebungen  $\varepsilon_u^{\text{vol}}$  in Verbindung zu setzen. Aufgrund der Symmetrie von  $\mathbb{K}$  und der Orthogonalität von  $\mathbb{D}$  und  $\mathbb{K}$  gilt die Beziehung

$$\varepsilon^{\text{vol}} : \tau = (\mathbb{K} : \varepsilon) : (\mathbb{D} : \tau + \tau^{\text{vol}}) = \varepsilon : (\mathbb{K} : \mathbb{D} : \tau) + \varepsilon^{\text{vol}} : \tau^{\text{vol}} = \varepsilon^{\text{vol}} : \tau^{\text{vol}},$$

sodass eine Einschränkung auf die Gleichheit bezüglich des volumetrischen Anteils der Spannungsvariation ausreichend ist. Mit analoger Argumentation gilt dies ebenfalls für den deviatorischen Anteil. Hieraus resultiert schlussendlich eine Darstellung basierend auf dem Prinzip von Hellinger-Reissner bezüglich der Mastervariablen  $u$  und  $p$ , die sogenannte Verschiebung–Druck–Formulierung.

**Problemstellung 2.7** (Verschiebung–Druck–Formulierung). *Finde ein Paar  $S = \{u, p\}$  mit  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $p \in L^2(\Omega)$ , sodass die Gleichung*

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Pi}_{\text{HR}}(S)(S') := & \int_{\Omega} (\varepsilon_u^{\text{vol}} - \varepsilon_p^{\text{vol}}) : \tau_{\xi}^{\text{vol}} + \sigma_{u,p} : \varepsilon_{\varphi} dx \\ & - \int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Gamma_N} f_N\varphi dx = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

für alle Paare  $S' = \{\varphi, \xi\}$  mit  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\xi \in L^2(\Omega)$  erfüllt ist.

Die Variation von Gleichung (2.13) bezüglich der einzelnen Komponenten führt auf ein Sattelpunktproblem mit Strafterm. Die Existenz einer eindeutigen Lösung garantiert dann Satz 2.9.

**Satz 2.15.** *Es seien der Elastizitäts- und der Nachgiebigkeitstensor symmetrisch, komponentenweise essentiell beschränkt und positiv definit. Dann gilt:*

(i) Ist  $\Gamma_D = \partial\Omega$ , so besitzt Problemstellung 2.7 eine eindeutige Lösung  $(u, p) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L_0^2(\Omega)$  mit

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ \xi \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} \xi \, dx = 0 \right\}.$$

(ii) Ist  $0 < |\Gamma_D|, |\Gamma_N| < |\partial\Omega|$ , so besitzt Problemstellung 2.7 eine eindeutige Lösung  $(u, p) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega)$ .

*Beweis.* Zu (i): Das resultierende Sattelpunktproblem entspricht im Wesentlichen dem Stokes–Problem, sodass auf die entsprechende Standardargumentation zurückgegriffen werden kann. Details hierzu finden sich im Anhang A.4.

Zu (ii): Es sei zunächst auf einige einfach nachzurechnenden Eigenschaften hingewiesen, die in den weiteren Überlegungen zur Anwendung kommen:

1.  $\mathbb{C}_\mu = 2\mu (\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) = 2\mu\mathbb{D}$  und  $\mathbb{C}_K = K\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} = 3K\mathbb{K}$ ,
2.  $\mathbb{A}_\mu = \frac{1}{2\mu}\mathbb{D}$  und  $\mathbb{A}_K = \frac{1}{3K}\mathbb{K}$ ,
3. für  $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ist  $\tau : \mathbb{I} = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii}$  und  $\mathbb{D}\varphi : \mathbb{I} = \text{div}(\varphi)$ ,
4.  $\mathbb{D} : \mathbb{D} = \mathbb{D}$  und  $\mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K}$ ,
5.  $\mathbb{D} : \mathbb{C} = \mathbb{C}_\mu$ ,  $\mathbb{K} : \mathbb{C} = \mathbb{C}_K$  und  $\mathbb{D} : \mathbb{A} = \mathbb{A}_\mu$ ,  $\mathbb{K} : \mathbb{A} = \mathbb{A}_K$ .

Zur Identifikation der Problemstellung 2.7 mit der Situation von Satz 2.9 werden die Bilinearformen

$$\begin{aligned} a : H \times H &\rightarrow \mathbb{R}, & a(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \sigma_u^{\text{dev}} : \varepsilon_\varphi^{\text{dev}} \, dx, \\ b : H \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & b(\varphi, p) &:= \int_{\Omega} \varepsilon_\varphi^{\text{vol}} : \sigma_p^{\text{vol}} \, dx, \\ c : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & c(p, \xi) &:= \int_{\Omega} \varepsilon_p^{\text{vol}} : \sigma_\xi^{\text{vol}} \, dx \end{aligned}$$

mit  $H = H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $M = L^2(\Omega)$  definiert. Für die Anwendbarkeit von Satz 2.9 sind die Stetigkeit von  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die Elliptizität von  $a$ , die inf-sup-Bedingung für  $b$  und die Positivität von  $c$  nachzuweisen.

Die Stetigkeit der Bilinearform  $a$  ergibt sich anhand der Ungleichung

$$\begin{aligned}
 a(u, \varphi) &= \int_{\Omega} \sigma_u^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} dx = \int_{\Omega} (\mathbb{D} : \mathbb{C} : Du) : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} dx \\
 &= \int_{\Omega} (2\mu \mathbb{D} : Du) : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} dx \leq 2\|\mu\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |\varepsilon_u^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}}| dx \\
 &\leq 2\|\mu\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\varepsilon_u^{\text{dev}}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|\varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\
 &\leq C\|u\|_H \|\varphi\|_H.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt für die Bilinearform  $b$

$$\begin{aligned}
 b(\varphi, p) &= \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} : \sigma_p^{\text{vol}} dx = \int_{\Omega} (\mathbb{K} : D\varphi) : (-p\mathbf{l}) dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{3} \text{div}(\varphi) \mathbf{l} : (-p\mathbf{l}) dx = \int_{\Omega} \text{div}(\varphi) (-p) dx \\
 &\leq \|\text{div}(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \| -p \|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_H \|p\|_M
 \end{aligned}$$

und schließlich für  $c$

$$\begin{aligned}
 c(p, \xi) &= \int_{\Omega} \varepsilon_p^{\text{vol}} : \sigma_{\xi}^{\text{vol}} dx = \int_{\Omega} (\mathbb{A} : \sigma_p^{\text{vol}}) : \sigma_{\xi}^{\text{vol}} dx = \int_{\Omega} p \xi (\mathbb{A} : \mathbf{l}) : \mathbf{l} dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{K} p \xi dx \leq \|K^{-1}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|p\|_M \|\xi\|_M.
 \end{aligned}$$

Für die Elliptizität der Bilinearform  $a$  auf dem Teilraum

$$V := \{\varphi \in H \mid b(\varphi, \xi) = 0 \ \forall \xi \in M\} \subset H$$

sei zunächst darauf hingewiesen, dass für  $\varphi \in V \subset H$  die Divergenz in  $M$  ist. Also gilt insbesondere für  $\xi = -1/3 \text{div}(\varphi)$  die Gleichung

$$0 = b(\varphi, -1/3 \text{div}(\varphi)) = \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} : \left( \frac{1}{3} \text{div}(\varphi) \mathbf{l} \right) dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} dx$$

und unter Verwendung der Poincaré- und der Korn'schen-Ungleichung liefert die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}
 a(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} (\mathbb{C}_{\mu} : \varepsilon_{\varphi}) : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} dx \geq \left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \mu(x) \right) \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} dx \\
 &= \left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \mu(x) \right) \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} + \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}} dx \\
 &= \left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \mu(x) \right) \|\varepsilon_{\varphi}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\
 &\geq \left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \mu(x) \right) C_K C_P \|\varphi\|_H^2
 \end{aligned}$$

die Elliptizität der Bilinearform  $a$  auf dem Raum  $V$ . Weiter ist die Bilinearform  $c$  positiv, denn es ist

$$c(p, p) = \int_{\Omega} \frac{1}{K} p p dx \geq \left( \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} K^{-1}(x) \right) \|p\|_M^2 \geq 0.$$

Es bleibt die inf-sup-Bedingung für  $b$  zu zeigen. Im Gegensatz zu den Nachweisen für die Problemstellungen 2.4 und 2.5 gestaltet sich das Auffinden eines Elementes, durch das das Supremum über alle Elemente aus dem Raum  $H$  nach unten abgeschätzt werden kann, deutlich schwieriger, da zu gegebenem  $p \in M$  ein  $\psi \in H$  mit  $-\operatorname{div}(\psi) = p$  und  $\|\psi\|_H \leq C\|p\|_M$  benötigt wird. Liegt dieses  $\psi$  für jedes  $p \in M$  vor, so wird die inf-sup-Bedingung impliziert durch

$$\sup_{\varphi \in H} \frac{b(\varphi, p)}{\|\varphi\|_H} \geq \frac{b(\psi, p)}{\|\psi\|_H} = \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi) (-p) dx}{\|\psi\|_H} = \frac{\|p\|_M^2}{\|\psi\|_H} \geq \frac{1}{C} \|p\|_M.$$

Die Existenz eines solchen  $\psi \in H$  lässt sich mit [40, Theorem 3.2] nachweisen. Dieses besagt, dass zu jeder Funktion  $w \in H_{\Gamma_D, 0}(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)$  mit  $H_{\Gamma_D, 0}(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3) := \{w \in H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3) \mid \gamma_n(w) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$  zwei Funktionen  $w_1, w_2 \in H = H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  existieren, mit  $w = \operatorname{rot}(w_1) + w_2$ ,

$$\|w_1\|_H \leq C\|w\|_{H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)} \quad \text{und} \quad \|w_2\|_H \leq C\|w\|_{H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)}.$$

Dabei ist  $H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3) := \{w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div}(w) \in L^2(\Omega)\}$  mit der Norm  $\|\bullet\|_{H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)} := \left( \|\bullet\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \|\operatorname{div}(\bullet)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ , der Operator  $\operatorname{rot}$

die Rotation eines Vektorfeldes und  $C > 0$  als generische Konstante zu verstehen. Für Elemente  $w \in H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)$  ist die Normalenspur  $\gamma_n(w) \in H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$  über die Anwendung auf Elemente mit Spur in  $H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$  basierend auf der dualen Paarung  $\langle \bullet, \bullet \rangle_{H^{1/2}}$  auf  $H^{-1/2} \times H^{1/2}$  definiert durch

$$\langle \gamma_n(w), v \rangle_{H^{1/2}} := \int_{\Omega} w \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(w) v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ausgehend von diesen Vorüberlegungen hat sich die Aufgabenstellung dahingehend geändert, dass nun ein  $w \in H_{\Gamma_D, 0}(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)$  gesucht ist, das die Gleichung  $-\operatorname{div}(w) = p$  erfüllt. Ist ein solches  $w$  gefunden, so entspricht die Funktion  $w_2$  der Zerlegung gemäß [40, Theorem 3.2] dem gesuchten  $\psi$ , da die Rotation eines Vektorfeldes divergenzfrei ist.

Für den Nachweis der Existenz dieses  $w$  wird die Argumentation in [40, Beispiel 3.6] aufgegriffen und folgendes Hilfsproblem betrachtet:

$$\text{Finde } z \text{ mit: } \quad -\Delta z = p \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_D, \quad z = 0 \text{ auf } \Gamma_N.$$

Da dieses Hilfsproblem einem Poisson-Problem mit gemischten homogenen Dirichlet- und Neumannrandbedingungen entspricht, existiert eine eindeutige Lösung  $z \in H_{\Gamma_N}^1(\Omega) := \{z \in H^1(\Omega) \mid \gamma(z) = 0 \text{ auf } \Gamma_N\}$  im schwachen Sinne. Die Behauptung ist nun:  $w := \nabla z$ .

Für  $z \in H_{\Gamma_N}^1(\Omega)$  ist  $w = \nabla z \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und als schwache Lösung des Hilfsproblems erfüllt  $z$  die Gleichung

$$\int_{\Omega} p v \, dx = \int_{\Omega} \nabla z \nabla v \, dx = \int_{\Omega} w \nabla v \, dx.$$

Durch den Vergleich mit der Definition der schwachen Ableitung in Abschnitt 2.1, ergibt sich  $p = -\operatorname{div}(w) \in L^2(\Omega)$  (siehe auch [26, Beispiel 2.10]) und somit  $w \in H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)$ . Das Betrachten der Normalenspur von  $w$  auf  $\Gamma_D$  für  $v \in H_{\Gamma_N}^1(\Omega)$  liefert schließlich

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n(w), v \rangle_{H^{1/2}} &= \int_{\Omega} w \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(w) v \, dx \\ &= \int_{\Omega} p v \, dx + \int_{\Omega} (-p) v \, dx = 0 \end{aligned}$$

und somit  $w \in H_{\Gamma_D, 0}(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)$ .



Es bleibt die Abschätzung  $\|\psi\|_H \leq C\|p\|_M$  zu zeigen. Nach [40, Theorem 3.2] gilt für  $\psi = w_2$

$$\begin{aligned} \|\psi\|_H &\leq C\|w\|_{H(\operatorname{div}, \Omega, \mathbb{R}^3)} = C\left(\|w\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \|\operatorname{div}(w)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\ &\leq C\left(\|z\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|-p\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

und da  $z$  das Hilfsproblem löst und  $p \in L^2(\Omega)$  gilt

$$\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq C'\|p\|_{(H_{\Gamma_N}(\Omega))'} = C' \sup_{\substack{\varphi \in H_{\Gamma_N}(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{(p, \varphi)_0}{\|\varphi\|_{H_{\Gamma_N}(\Omega)}} \leq C'\|p\|_{L^2(\Omega)}$$

mit [26, Definition 3.1]. □

**Bemerkung 2.16.** *Beim Beweis von Satz 2.15 wurde die Äquivalenz der Problemstellung 2.7 zu einem Sattelpunktproblem mit Strafterm ausgenutzt und die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung durch den Nachweis der Voraussetzungen von Satz 2.9 gezeigt. Der dort vorkommende Parameter  $s$  ist in dem hier betrachteten Kontext nur implizit über die Bilinearform  $c$  durch den Kompressionsmodul  $K$  vorhanden. Für fast inkompressibles Materialverhalten wird  $K$  beliebig groß, also  $1/\kappa \rightarrow 0$  und führt – im hier nicht betrachteten – Grenzfall zum Verschwinden von  $c$ . Es sei zudem angemerkt, dass sich das Verhalten von  $K$  lediglich auf die Bilinearform  $c$  auswirkt. Die Elliptizität der Bilinearform  $a$ , das Erfüllen der inf-sup-Bedingung von  $b$  sowie die Stetigkeit der Bilinearformen  $a$  und  $b$  sind davon unberührt.*

**Bemerkung 2.17.** *Bei der Betrachtung von beinahe inkompressiblem Materialverhalten wird oftmals anstelle des hier betrachteten Kompressionsmoduls  $K$  eine andere Kenngröße, die sogenannte Querkontraktion  $\nu$ , verwendet. Die Beziehung zwischen  $K$  und  $\nu$  ist anhand der Formel*

$$K = \frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$$

gegeben. Die Modellierung von beinahe inkompressiblem Materialverhalten erfolgt für gewöhnlich durch die Wahl von  $\Delta\nu := 0.5 - \nu$  im Bereich  $10^{-7} \leq \Delta\nu \leq 10^{-5}$ . Dabei beschreibt die Situation  $\nu = 0.5$  den Fall der Inkompressibilität.

Neben den zuvor betrachteten komplexen dreidimensionalen Modellen kommen insbesondere im Rahmen von Anwendungsbeispielen häufig vereinfachte zweidimensionale Modelle zum Einsatz. Nachfolgend wird im Hinblick auf die numerischen Beispiele in Kapitel 5 das Konzept des ebenen Spannungs- und des ebenen Verzerrungszustand diskutiert.

**Ebener Verzerrungs- und ebener Spannungszustand** Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass zu dem betrachteten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein  $\Omega_{2D} \subset \mathbb{R}^2$  existiert, sodass gilt  $\Omega = \Omega_{2D} \times (-t/2, t/2)$ . Dabei erfüllt die sogenannte Dicke  $t$  die Bedingung  $t \ll \text{diam}(\Omega_{2D})$ . Weiter sind die äußeren Lasten so, dass sie nur von der Position in  $\Omega_{2D}$  abhängen und auch nur in der  $\Omega_{2D}$ -Ebene wirken. Dies ist beispielsweise für einen sehr langen Stab der Fall, aus dem gedanklich eine dünne Scheibe herausgeschnitten wird.

Liegt die Schnittstelle ziemlich mittig, so wird davon ausgegangen, dass das an die Schnittfläche angrenzende Material dafür sorgt, dass keine Deformation in Dickenrichtung stattfindet. Insbesondere gilt somit:  $\varepsilon_{i3} \equiv 0$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dieser Zustand wird als *ebener Verzerrungszustand* (EVZ) bezeichnet. Trotz der Tatsache, dass die Verzerrungen nur in der  $\Omega_{2D}$ -Ebene auftreten, entsteht ein dreidimensionaler Spannungszustand, der sich durch das Einsetzen des ebenen Verzerrungstensor in die dreidimensionale konstitutive Gleichung ergibt.  $\sigma_{\text{EVZ}} = \mathbb{C} : \varepsilon_{\text{EVZ}}$ .

**Definition 2.2** (Ebener Verzerrungszustand). *Der Tensor  $\varepsilon_{\text{EVZ}}$  beschreibt einen ebenen Verzerrungszustand, falls für die Komponenten gilt:*

1.  $\varepsilon_{ij}(x, y, z) = \varepsilon_{ij}(x, y)$  für  $i, j \in \{1, 2\}$ ,
2.  $\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3j} \equiv 0$  für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

*Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Verschiebung  $u$  die Bedingungen  $u_i(x, y, z) = u_i(x, y)$  für  $i \in \{1, 2\}$  und  $u_3 \equiv 0$  erfüllt.*

Erfolgt der Schnitt stattdessen am äußersten Rand des Stabes so ergeben sich Bedingungen an die entsprechenden, vorliegenden Spannungen.

Es entsteht ein *ebener Spannungszustand* (ESZ), der der Tatsache Rechnung trägt, dass an Rändern ohne Zwangsbedingungen keine Spannungen auftreten. Es gilt also  $\sigma_{i3} \equiv 0$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Die benötigten Eigenschaften des Verzerrungstensors ergeben sich aus der inversen konstitutiven Beziehung.

**Definition 2.3** (Ebener Spannungszustand). *Der Tensor  $\sigma_{\text{ESZ}}$  beschreibt einen ebenen Spannungszustand, falls für die Komponenten gilt:*

1.  $\sigma_{ij}(x, y, z) = \sigma_{ij}(x, y)$  für  $i, j \in \{1, 2\}$ ,
2.  $\sigma_{i3} = \sigma_{3j} \equiv 0$  für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

*Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Verschiebung  $u$  die Bedingungen  $u_i(x, y, z) = u_i(x, y)$  für  $i \in \{1, 2\}$  und  $u_3(x, y, z) = z \varepsilon_{33}(x, y)$  erfüllt.*



# Kapitel 3.

## Finite Elemente Diskretisierung

Die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Problemstellungen der linearen Elastizität besitzen Lösungen, für die im Allgemeinen keine Darstellung in geschlossener Form angegeben werden kann. Mit der Hilfe von numerischen Verfahren ist es jedoch möglich zumindest Näherungslösungen zu bestimmen und darüber hinaus Aussagen über die Qualität der Approximationsgüte zu treffen.

Exemplarisch sei an dieser Stelle die reine Verschiebungsmethode aus Problemstellungen 2.6 herausgegriffen. Anstelle die Lösung  $u$  bezüglich des kontinuierlichen Funktionenraums  $V = H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  zu suchen, wird die zulässige Menge auf endlichdimensionale Teilräume  $V_h \subset V$  und  $W_h \subset W = H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  eingeschränkt und stattdessen eine Lösung  $u_h \in V_h$  der diskreten variationellen Gleichung

$$\mathcal{A}(u_h)(\varphi_h) := a(u_h, \varphi_h) - l(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in W_h$$

bestimmt. Durch die geeignete Wahl einer Basis von  $V_h$  und  $W_h$  wird die diskrete variationelle Gleichung, aufgrund der hier betrachteten linearen Problemstellungen, mit einem linearen Gleichungssystem identifiziert und anschließend mit entsprechenden Techniken gelöst.

Die entscheidende Aufgabe ist die explizite Konstruktion beziehungsweise Angabe der endlichdimensionalen Teilräume. Hierzu wird die Methode der Finiten Elemente verwendet, bei der die Ansatzräume auf Basis stückweise definierter Formfunktionen auf den einzelnen Elementen  $\mathcal{K}$  einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  des Ausgangsgebiets  $\Omega$  realisiert werden. Für die

ausführliche Beschreibung des Konzepts, sowie die präzise und vollständige mathematische Darstellung sei an dieser Stelle auf die umfangreiche Literatur, wie beispielsweise die Bücher [26], [29], [54] oder [58], verwiesen.

Im Rahmen dieses Kapitels werden zwei thematische Aspekte behandelt. In den Abschnitten 3.1 bis 3.3 werden verschiedene, in dieser Arbeit verwendete Finite Elemente Diskretisierungen vorgestellt. Dabei wird in Abschnitt 3.1 zunächst die Konstruktion der klassischen Verschiebungselemente basierend auf stückweise polynomialen Ansatzfunktionen betrachtet und die Eigenschaften der zugehörigen diskreten Problemstellung und a priori Fehlerabschätzungen bezüglich der  $H^1$ - beziehungsweise der  $L^2$ -Norm zusammengefasst.

Abschnitt 3.2 befasst sich anschließend mit dem Konzept der selektiv reduzierten Integration, das unter anderem bei Problemstellungen mit fast inkompressiblem Materialverhalten angewendet wird. Neben der praxisnahen Darstellung durch die Verwendung unterschiedlicher Quadraturformeln wird zusätzlich eine aus mathematischer Sicht konsistente Formulierung angegeben, die auf einer äquivalenten gemischten Formulierung beruht und die selektiv reduzierte Integration mittels eines diskreten Operators repräsentiert.

Das Konzept der volumenartigen Schalenelemente wird in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Neben einer skizzenhaften Herleitung der Elementformulierung erfolgt die Definition der zugehörigen diskreten Bilinearform unter Berücksichtigung der ebenfalls in diesem Abschnitt diskutierten Techniken zur Vermeidung auftretender Lockingeffekte.

Der zweite thematische Aspekt befasst sich mit dem Konzept der hybriden Netze. Im Rahmen von Abschnitt 3.4 wird die kombinierte Verwendung von klassischen Verschiebungselementen und volumenartigen Schalenelementen innerhalb einer Triangulierung diskutiert. Neben dem entscheidenden Punkt der Kopplung der beider Elementtypen, werden zudem mögliche Lösungsverfahren der resultierenden Gleichungssysteme angeführt.

### 3.1. Standard Diskretisierung

Es wird nachfolgend vorausgesetzt, dass das betrachtete Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$  so berandet ist, dass eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\Omega$  gemäß [26, Definition 5.1] aus konvexen Vierecken ( $d = 2$ ), beziehungsweise konvexen Hexaedern mit 6 viereckigen Seitenflächen ( $d = 3$ ) existiert. Die Konstruktion des endlichdimensionalen Teilraums erfolgt auf der Basis polynomialer Funktionen, die auf dem Referenzelement  $\widehat{\mathcal{K}} = [-1, 1]^d$  definiert sind. Zudem seien stetig differenzierbare, bijektive und orientierungserhaltende Transformationen  $F_{\mathcal{K}}: \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$  gegeben, die das Referenzelement auf das jeweilige Element  $\mathcal{K}$  der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abbilden. Der diskrete Raum  $V_h^{(k)} \subset V$  für  $1 \leq k \in \mathbb{N}$  ist dann gegeben durch

$$V_h^{(k)} := \left\{ \varphi_h \in V \mid \varphi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\varphi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\varphi}_h \in Q_k(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^t), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Dabei beschreibt  $Q_k(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^t)$  den Raum der  $t$ -komponentigen Funktionen auf dem Referenzelement  $\widehat{\mathcal{K}}$ , deren einzelne Komponenten jeweils ein Polynom vom Grad  $k$  sind. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich Polynome von Grad  $k \in \{1, 2\}$  betrachtet. Als Freiheitsgrade gemäß [26, Definition 5.8] werden dazu die Funktionswerte in den Elementeckpunkten für  $k = 1$  und in den Eckpunkten, den Kanten- und Seitenflächenmittelpunkten und dem Elementmittelpunkt für den Fall  $k = 2$  gewählt.

Eine Diskretisierung der reinen Verschiebungsmethode ist durch die Wahl  $V_h = V_h^{(1)}$  und  $W_h = W_h^{(1)}$  gegeben. Das zugehörige diskrete Problem lautet

**Problemstellung 3.1.** *Finde  $u_h \in V_h$ , sodass die Gleichung*

$$\delta \Pi_V(u_h)(\varphi_h) = \int_{\Omega} \sigma_{u_h} : \varepsilon_{\varphi_h} dx - \int_{\Omega} f \varphi_h dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi_h dx = 0 \quad (3.1)$$

für alle  $\varphi_h \in W_h$  erfüllt ist.

Die eindeutige Lösbarkeit überträgt sich in diesem Fall direkt aus dem Kontinuierlichen.

Unter der Voraussetzung, dass  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , ergibt sich mit Hilfe der Lemmata von Céa und Bramble–Hilbert [26, Kapitel II,

Satz 4.2 & 6.3] sowie der Transformationsargumentation unter Verwendung des Referenzelements eine a priori Abschätzung in der  $H^1$ -Norm von der Form

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|=2}} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}. \quad (3.2)$$

Mit Hilfe des Aubin–Nitsche–Lemmas, vergleiche zum Beispiel [34, Theorem 19.1], ist ebenfalls eine Abschätzung für die  $L^2$ -Norm möglich. Erfüllt die duale Lösung  $z$  die gleichen Regularitätseigenschaften wie die primale Lösung  $u$ , das heißt  $z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , so gilt

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|=2}} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}. \quad (3.3)$$

Andernfalls liefert dieser Ansatz eine Abschätzung mit dem Faktor  $h^{1+\beta}$ , wobei  $\beta$  der Approximationsgüte der dualen Lösung bezüglich der  $H^1$ -Norm entspricht.

## 3.2. Selektiv reduzierte Integration

Die Modellierung eines beinahe inkompressiblen Materialverhaltens lässt sich durch einen vergleichsweise großen Wert des Kompressionsmoduls  $K$  gegenüber dem des Schubmoduls  $\mu$  realisieren, das heißt  $\mu \ll K < \infty$ . Wird dieses Materialverhalten in Kombination mit der in Problemstellung 3.1 beschriebenen reinen verschiebungsbasierten Formulierung verwendet, so führt dies aus mathematischer Sicht auf ein schlecht konditioniertes Problem, was sich leicht durch die Betrachtung der Bestapproximationsabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C_{\text{BA}} \inf_{\psi_h \in V_h} \|u - \psi_h\|_{H^1} \quad (3.4)$$

basierend auf dem Céa–Lemma (vergleiche [26, Kapitel II, Satz 4.2]), belegen lässt. Die in Ungleichung (3.4) auftretende Konstante  $C_{\text{BA}}$  entspricht dem Quotienten  $C'/C$  aus der Stetigkeits- und Elliptizitätskonstanten, die wiederum maßgeblich durch die Materialparameter in der Form  $C \leq \mu$  und  $C' \geq \mu + K$  beeinflusst werden – vergleiche [26, S.



309]. Für große Werte von  $K$  verhält sich  $C_{\text{BA}}$  proportional zum Kompressionsmodul, sodass Ungleichung (3.4) zunehmend an Aussagekraft verliert. Um dies zu verdeutlichen muss die Funktion  $\psi_h$  auf der rechten Seite der Ungleichung lediglich geschickt gewählt werden. Sei hierzu  $\psi_h$  gleich der Interpolierenden von  $u$  mit einem sehr kleinen Interpolationsfehler. Dann kann der Diskretisierungsfehler auf der linken Seite diesen Wert, aufgrund der extrem großen Konstanten  $C_{\text{BA}}$ , deutlich übersteigen, ohne die Ungleichung (3.4) zu verletzen.

In praktischen Berechnungen äußert sich die zuvor erwähnte schlechte Kondition des Problems in deutlich zu kleinen Verschiebungen, die sich auf einen unverhältnismäßig großen Beitrag der volumetrischen Verzerrungen zur inneren Energie zurückführen lassen. Die Struktur verhält sich dadurch deutlich steifer, als sie eigentlich sollte, was im Bereich des Ingenieurwesens zu der Bezeichnung des volumetrischen Lockings geführt hat. Um dieser Problematik zu begegnen hat sich die Technik der selektiv reduzierten Integration etabliert. Dabei wird der volumetrische Anteil der zur Problemstellung 3.1 gehörenden Bilinearform bewusst fehlerbehaftet integriert, was zu einer Abschwächung der inneren Energie führt. In Kombination mit der unveränderten äußeren Belastung des Systems führt dies zu physikalisch sinnvollen Größenordnungen der Verschiebung. Eine detaillierte Erläuterung dazu, wie genau die veränderte Integration die Abschwächung der inneren Energie bewirkt, liefert Braess in [25], indem er die selektiv reduzierte Integration als einen Spezialfall der Enhanced–Assumed–Strain Methode (siehe Abschnitt 3.3) identifiziert.

Für die Problemstellung 3.1 erfolgt die Umsetzung der selektiv reduzierten Integration durch die Verwendung der Quadraturformel  $\mathcal{Q}_{1,\mathcal{K}}^d$  mit einem Gaußpunkt in jeder Richtung für den volumetrischen Anteil anstelle der standardmäßig verwendeten Formel  $\mathcal{Q}_{2,\mathcal{K}}^d$  mit zwei Gaußpunkten pro Richtung. Die diskrete Bilinearform ist somit gegeben durch

$$a_h(\psi_h, \varphi_h) := \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{Q}_{2,\mathcal{K}}^d(\sigma_{\psi_h}^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi_h}^{\text{dev}}) + \mathcal{Q}_{1,\mathcal{K}}^d(\sigma_{\psi_h}^{\text{vol}} : \varepsilon_{\varphi_h}^{\text{vol}}) \quad (3.5)$$

und erfüllt weiterhin die Voraussetzungen aus Satz 2.3 – vergleiche hierzu [52, Kapitel IV], wo diese für die äquivalente Darstellung bezüglich der Lamé–Parameter  $\mu$  und  $\lambda$  gezeigt werden. Darüber hinaus müssen im

Fälle von nicht konstanten Materialparametern die verwendeten Finite Elemente Räume explizit berücksichtigt werden.

Die sehr praxisorientierte Beschreibung der selektiv reduzierten Integration in Gleichung (3.5) ist für die weiteren theoretischen Überlegungen, insbesondere im Hinblick auf die Anwendungsbeispiele in Kapitel 5, weniger geeignet. Aus diesem Grund wird die in [62] gezeigte Äquivalenz der selektiv reduzierten Integration zu einer gemischten Verschiebung–Druck–Formulierung wie in Problemstellung 2.7 ausgenutzt, um so eine konsistente Darstellung abzuleiten. Die entsprechenden diskreten Funktionenräume sind in diesem Fall weiterhin durch bi- beziehungsweise trilineare Ansätze für die Verschiebung und eine stückweise konstante Approximation der Druckkomponente gegeben. Das heißt, der diskrete Druck  $p_h$  ist im Teilraum  $M_h \subset L^2(\Omega)$  mit

$$M_h := \left\{ \zeta_h \in L^2(\Omega) \mid \zeta_h|_{\mathcal{K}} = \hat{\zeta}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \hat{\zeta}_h \in Q_0(\hat{\mathcal{K}}), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Der zugehörige Elementfreiheitsgrad ist durch den Funktionswert im Elementmittelpunkt festgelegt. Die erwähnte Äquivalenz ergibt sich formal durch die statische Kondensation der Druckkomponenten auf Elementebene. Dies ist möglich, da keine Stetigkeitsanforderungen an der Druck vorliegen. In der so erhaltenen, rein verschiebungsbasierten Darstellung trifft der elementweise konstante volumetrische Anteil der Spannungen im Skalarprodukt auf die lediglich linearen volumetrischen Verzerrungen. Der resultierende Term wird durch die Verwendung einer einpunktigen Quadraturformel bereits exakt bestimmt, was der in Gleichung (3.5) angegebenen Darstellung entspricht.

Die konsistente Beschreibung der selektiv reduzierten Integration wird mit Hilfe eines entsprechenden diskreten Operators basierend auf dem Prinzip der statischen Kondensation realisiert. Dazu wird zunächst ein kontinuierliches Pendant  $P: H^1(\Omega, \mathbb{R}^t) \rightarrow L^2(\Omega)$  eingeführt. Dieser Operator ist so definiert, dass er die Gleichung

$$\left( \mathbb{1} : (\mathbb{D}\varphi)^{\text{vol}} + \mathbb{1} : \mathbb{A} : (P(\varphi) \mathbb{1}), \zeta \right)_0 = 0 \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega) \quad (3.6)$$

erfüllt, die sich aus der Variation von Problemstellung 2.7 nur bezüglich der Druckkomponenten ergibt. Ersetzen des mechanischen Drucks  $p$

durch  $P(u)$  in Gleichung (2.13) liefert eine verschiebungsbasierte Darstellung der Form

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}_V(u)(\varphi) &:= \int_{\Omega} \sigma_u^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi}^{\text{dev}} + (P(u) \mathbb{I}) : (\mathbb{A} : P(\varphi) \mathbb{I}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f \varphi \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dabei wurde aus Symmetriegründen für die Größe  $\varepsilon_{\varphi}^{\text{vol}}$  ebenfalls die Beschreibung durch den Operator  $P$  gemäß Gleichung (3.6) verwendet.

Die selektiv reduzierte Integration wird schließlich durch den Operator  $P_h: H^1(\Omega, \mathbb{R}^t) \rightarrow M_h$  repräsentiert. Dieser ist über die variationelle Beziehung

$$\left( \mathbb{I} : (D\varphi)^{\text{vol}} + \mathbb{I} : \mathbb{A} : (P_h(\varphi) \mathbb{I}), \zeta_h \right)_0 = 0 \quad \forall \zeta_h \in M_h \quad (3.8)$$

definiert. Für die diskrete Formulierung von Gleichung (3.7) wird der kontinuierliche Operator  $P$  durch die entsprechende diskrete Version  $P_h$  ersetzt. Somit ist die diskrete Lösung  $u_h$  gesucht, die die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}_{V,h}(u_h)(\varphi_h) &:= \int_{\Omega} \sigma_{u_h}^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi_h}^{\text{dev}} + (P_h(u_h) \mathbb{I}) : (\mathbb{A} : P_h(\varphi_h) \mathbb{I}) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f \varphi_h \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi_h \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

für alle  $\varphi_h \in V_h$  erfüllt. Die diskrete Bilinearform  $a_h$  aus Gleichung (3.5) lässt sich alternativ auch mit Hilfe des Operators  $P_h$  darstellen. Es gilt

$$\begin{aligned} a_h(\psi_h, \varphi_h) &= \int_{\Omega} \sigma_{u_h}^{\text{dev}} : \varepsilon_{\varphi_h}^{\text{dev}} + (P_h(u_h) \mathbb{I}) : (\mathbb{A} : P_h(\varphi_h) \mathbb{I}) \, dx \\ &= \left( \mathbb{C} : (Du_h)^{\text{dev}}, (D\varphi_h)^{\text{dev}} \right)_0 + (P_h(u_h), P_h(\varphi_h))_{K^{-1}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei für die Identität die Definitionen von  $\sigma_{u_h}^{\text{dev}}$  und  $\varepsilon_{\varphi_h}^{\text{dev}}$  sowie die Identität  $\mathbb{I} : \mathbb{A} : \mathbb{I} = K^{-1}$  und das gewichtete  $L^2$ -Skalarprodukt

$$(\bullet, \bullet)_{K^{-1}} := (K^{-1} \bullet, \bullet)_0 = (\bullet, K^{-1} \bullet)_0$$

verwendet wurden.

Es ist noch anzumerken, dass obwohl die selektiv reduzierte Integration zu deutlich verbesserten Resultaten in der Praxis führt, sich dieses Ergebnis nicht ohne Weiteres auf die Abschätzung (3.4) übertragen lässt. Eine optimalerweise vom Kompressionsmodul  $K$  unabhängige Konstante  $C_{BA}$  ergibt sich nur bei der Verwendung einer inf–sup–stabilen Diskretisierung der gemischten Verschiebung–Druck–Formulierung 2.7, also für alle für das Stokes–Problem stabilen Finite Elemente Paarungen. Die hier betrachtete, zur selektiv reduzierten Integration äquivalente Paarung ist jedoch nicht stabil, da eine schachbrettartige Druckkomponente konstruiert werden kann, für die die diskrete inf–sup–Bedingung nicht erfüllt ist – vergleiche [26, Kapitel III, §7] oder [30, Kapitel VI, §5]. Trotz dieser Tatsache ergeben sich aus numerischer Sicht einige Vorteile. Zum einen ist die Konstruktion inf–sup–stabiler Stokes–Elemente deutlich aufwendiger und führt auf ein Gleichungssystem mit indefiniter Sattelpunktstruktur, wohingegen die diskrete Problemstellung basierend auf der selektiv reduzierten Integration analog zu Problemstellung 3.1 ein Gleichungssystem mit symmetrisch positiv definiter Systemmatrix liefert. Zum anderen vergrößert sich im Gegensatz zur gemischten Formulierung die Anzahl der Freiheitsgrade nicht.

### 3.3. Volumenartige Schalenelemente

Die hier betrachteten volumenartigen Schalenelemente sind in der Literatur auch unter der Bezeichnung *Solid–Shells* beziehungsweise *Solid–Like–Shells* bekannt und beschreiben eine Klasse von Finite Elemente Entwicklungen, die auf einer Kombination aus Schalen- und Volumenelementen basieren. Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Elementtyps ist das Vorhandensein einer ausgezeichneten Dickenrichtung der betrachteten Geometrie, deren Abmessung deutlich kleiner ist, als die Ausdehnung in die anderen beiden Richtungen. Typische Größenverhältnisse sind hierbei 1 : 100 oder 1 : 1000.

Die entsprechende Herleitung beruht im Wesentlichen auf dem Degenerationskonzept – vergleiche [17, Abschnitt 4.3] – und verwendet eine Vertauschung von Diskretisierung und Dimensionsreduktion. Aufgrund der Komplexität des systematischen Entwicklungskonzepts, beschränkt

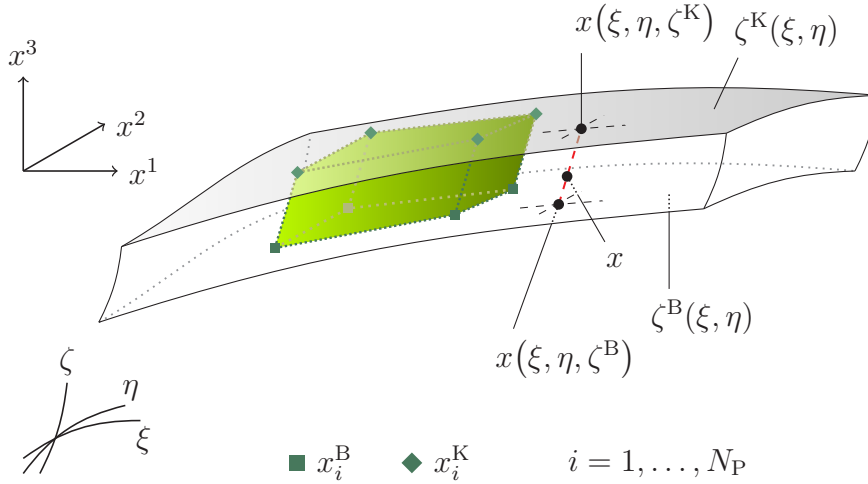


Abbildung 3.1.: Skizze eines Schalenabschnittes mit einem ausgewählten Element der zugehörigen Triangulierung, sowie einer Visualisierung der linearen Beschreibung in  $\zeta$ -Richtung der inneren Punkte.

sich die Beschreibung an dieser Stelle auf einen skizzenhaften Abriss mit dem Verweis auf die detaillierten Ausführungen in [48].

Der Ausgangspunkt ist eine Triangulierung des dreidimensionalen Gebietes, wobei in Richtung der ausgezeichneten Dimension nur ein Element verwendet wird. Somit findet indirekt eine Dimensionsreduktion, impliziert durch die Triangulierung und die gewählte Anzahl von Elementen bezüglich der ausgezeichneten Richtung, statt. Weiter wird vorausgesetzt, dass für jeden Punkt eine Beschreibung durch eine Konvexkombination von Punkten auf der Kopf- beziehungsweise Bodenfläche des Gebietes möglich ist – siehe Abbildung 3.1. Das heißt, dass für jeden Punkt  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$  in Abhängigkeit der krummlinigen Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  gilt

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{|\zeta^K - \zeta^B|} \left[ (\zeta^K - \zeta) x(\xi, \eta, \zeta^B) + (\zeta - \zeta^B) x(\xi, \eta, \zeta^K) \right].$$

Dabei sind  $\zeta^K = \zeta^K(\xi, \eta)$  und  $\zeta^B = \zeta^B(\xi, \eta)$  skalare Funktionen zur Beschreibung der Kopf- beziehungsweise Bodenfläche. Für die Approximation des Gebietes auf Basis der gewählten Triangulierung erfolgt

die Auswahl eines festen Satzes an Punkten  $\{x_i^B, x_i^K\}_{i=1}^{N_P} \subset \mathbb{R}^3$  auf der Boden- und Kopffläche innerhalb eines Elements, sowie die Festlegung von Formfunktionen  $\{N_i \mid N_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^{N_P}$ . Unter Verwendung von normierten Koordinaten – hier auch mit  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  bezeichnet – ergibt sich die Darstellung

$$x(\xi, \eta, \zeta) \approx x_h(\xi, \eta, \zeta) := \sum_{i=1}^{N_P} N_i(\xi, \eta) \left( \frac{1}{2} (1 - \zeta) x_i^B + \frac{1}{2} (1 + \zeta) x_i^K \right) \quad (3.11)$$

mit  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ . Entsprechend dem isoparametrischen Konzept, vergleiche [26, Kapitel III, §2], gilt für die Approximation der Verschiebungen

$$u(\xi, \eta, \zeta) \approx u_h(\xi, \eta, \zeta) := \sum_{i=1}^{N_P} N_i(\xi, \eta) \left( \frac{1}{2} (1 - \zeta) \underline{u}_i^B + \frac{1}{2} (1 + \zeta) \underline{u}_i^K \right), \quad (3.12)$$

wobei der Vektor  $\underline{u}_i^B \in \mathbb{R}^3$  der Verschiebung im Punkt  $x_i^B$  beziehungsweise  $\underline{u}_i^K \in \mathbb{R}^3$  in  $x_i^K$  für  $i = 1, \dots, N_P$  entspricht. An dieser Stelle ist auch eine andere Approximation der Verschiebungen möglich und zulässig, jedoch garantiert insbesondere die lineare Abhängigkeit in Dickenrichtung auf natürliche Art und Weise die Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte, die sowohl bei Kirchhoff–Love- als auch bei Reissner–Mindlin-Kinematiken eine entscheidende Rolle spielt.

Die Verzerrungen  $\varepsilon$  und Spannungen  $\sigma$  sind bezüglich lokaler, krummliniger Basisvektoren definiert, die gegeben sind durch die Beziehung

$$\underline{G}_\xi := \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}, \quad \underline{G}_\eta := \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}, \quad \underline{G}_\zeta := \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}$$

und als diskrete Approximation durch

$$\underline{G}_{h,\xi} := \frac{\partial x_h(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}, \quad \underline{G}_{h,\eta} := \frac{\partial x_h(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}, \quad \underline{G}_{h,\zeta} := \frac{\partial x_h(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}.$$

Da diese Vektoren im Allgemeinen nicht orthogonal beziehungsweise orthonormal sind, wird zusätzlich ein lokales, orthonormales Koordinatensystem betrachtet. Die zugehörigen Basisvektoren werden wie folgt bestimmt: Die lokale, ausgezeichnete Dickenrichtung ist gegeben durch

den Normalenvektor bezüglich der von  $\underline{G}_\xi$  und  $\underline{G}_\eta$  aufgespannten Tangentialebene, das heißt  $\underline{G}_t := \frac{\underline{G}_\xi \times \underline{G}_\eta}{|\underline{G}_\xi \times \underline{G}_\eta|}$ , wobei der Operator  $\times$  in diesem Kontext für das Kreuzprodukt zweier Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  steht. Für den ersten Richtungsvektor der zum Normalenvektor  $\underline{G}_t$  gehörenden Ebene wird  $\underline{G}_r := \frac{\underline{G}_\xi}{|\underline{G}_\xi|}$  gesetzt. Der zweite bestimmt sich abschließend zu  $\underline{G}_s := \frac{\underline{G}_t \times \underline{G}_r}{|\underline{G}_t \times \underline{G}_r|}$ . Die Koeffizienten des Verzerrungstensors bezüglich der so erzeugten Basis  $\{\underline{G}_r, \underline{G}_s, \underline{G}_t\}$  sind gegeben durch die komponentenweise Gleichung  $\varepsilon_{kl} = T_{klij} \varepsilon_{ij}$ ,  $i, j \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ ,  $k, l \in \{r, s, t\}$  mit dem vierstufigen Tensor  $T = [T]_{klij} = (\underline{G}_i, \underline{G}_k)_{\mathbb{R}^3} (\underline{G}_j, \underline{G}_l)_{\mathbb{R}^3}$ . Dabei beschreibt  $(\bullet, \bullet)_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  das Standardskalarprodukt für Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ . Vorteil dieses orthonormalen Systems ist, dass die einzelnen Verzerrungs- beziehungsweise Spannungsanteile separat betrachtet werden können, was beispielsweise im Zusammenhang mit anisotropen Materialgesetzen von Vorteil ist.

Das im Kontext dieser Arbeit verwendete volumenartige Schalenelement wird in [31] vorgestellt und ist eine modifizierte Version des in [85] präsentierten *RESS*-Elements für die Simulation von Blechumformprozessen. Die Grundlagen für beide Elementtypen finden sich in [82] und [83], wobei in [82] lineare und in [83] geometrisch nichtlineare Problemstellungen betrachtet werden. Für die Approximation in den Gleichungen (3.11) und (3.12) werden bilineare Formfunktionen sowie die Eckpunkte des Elements mit den zugehörigen Knotenverschiebungen zur Beschreibung des Gebietes und des Verschiebungsfeldes verwendet. Die Elemententwicklung beruht also auf standardmäßigen, trilinearen, verschiebungsbasierten Hexaederelementen.

## Lockingeffekte

Wie bereits in Abschnitt 3.2 gesehen führt die Verwendung reiner Verschiebungselemente mit niedriger Ordnung der Ansatzfunktionen in bestimmten Situationen zu numerischen Defekten, die die Qualität der Lösung beeinflussen. Neben dem bereits diskutierten volumetrischen Locking, treten im Zusammenhang mit dem hier verwendeten volumenartigen Schalenelement auch Einflüsse aus dem Bereich Schub-, Querschub- und Dickenlocking auf, welche nachfolgend lediglich kurz charakterisiert wer-

den. Für eine detaillierte Beschreibung und Analyse dieser Effekte sei zum Beispiel auf [59, Kapitel 5] und [16, Abschnitt 6.4] verwiesen.

**Volumetrisches Locking** Aus mathematischer Sicht ist es hier sinnvoller von einem schlecht konditionierten Problem zu sprechen, bei dem der kritische Parameter – der Kompressionsmodul  $K$  – in die Konstante der Bestapproximationsabschätzung eingeht und diese stark vergrößert. Der Begriff Locking, sinngemäß mit Versteifung übersetzt, resultiert aus der Beobachtung, dass numerische Berechnungen deutlich zu kleine Verschiebungen liefern, siehe auch [26, Kapitel VI, §4]. Dies lässt darauf schließen, dass sich die Struktur unverhältnismäßig steif verhält. Einer der Gründe dafür ist die Tatsache, dass der Unterraum der volumenerhaltenden Verschiebungen nicht ausreichend gut durch den diskreten Verschiebungsraum reproduziert werden kann. Ein achtknotiges Verschiebungselement liefert beispielsweise lediglich 17 der möglichen 23 inkompressiblen Deformationen, vergleiche [84].

**Dickenlocking** Das Dickenlocking resultiert aus der nicht ausgewogenen Approximation der Verzerrungen und den energiekonjugierten Spannungen, die insbesondere bei reinen Biegebeanspruchungen von Bedeutung sind. Für trilineare Ansatzfunktionen sind die zugehörigen Normalverzerrungen in Dickenrichtung konstant. Die aus den Gesamtverzerrungen resultierende Normalenspannung in Dickenrichtung ist aufgrund der zusätzlichen Abhängigkeit von den ebenen Verzerrungen  $\varepsilon_{\xi\xi}$  und  $\varepsilon_{\eta\eta}$  jedoch linear bezüglich der Dicke. Es gilt

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)\varepsilon_{\zeta\zeta} + (\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta})].$$

Dieser Effekt ist anders als das zuvor betrachtete volumetrische Locking, dessen Auswirkungen mit zunehmender Verfeinerung geringer werden, unabhängig von der Diskretisierung, da lediglich die nicht gewünschte Verfeinerung in Dickenrichtung die benötigte lineare Abhängigkeit zunehmend besser approximieren würde.

**Schublocking** Das Schublocking sowie auch das nachfolgend betrachtete Querschublocking sind durch sogenannte parasitäre Verzerrungen ge-



kennzeichnet. Das bedeutet, dass in bestimmten Belastungssituationen aus numerischen Gründen Verzerrungen auftreten, die aus physikalischer Sicht nicht sinnvoll sind. Bei der Verwendung trilinearer Verschiebungselemente bereitet die Reproduktion reiner Biegedeformationen in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene Schwierigkeiten. Während die lineare Abhängigkeit der Normalspannung  $\sigma_{\xi\xi}$  in  $\eta$ -Richtung korrekt reproduziert wird, ergeben sich fälschlicherweise aus den in  $\xi$ -Richtung linear abhängigen Schubverzerrungen entsprechende in  $\xi$ -Richtung linear abhängige Schubspannungen. Diese müssten gemäß des betrachteten Deformationszustandes jedoch identisch Null sein. Die Größenordnung der aus diesen Schubspannungen resultierenden inneren Energie verhält sich proportional zum Faktor  $(\frac{h}{t})^2$ , wobei  $t$  die ausgezeichnete Dicke in  $\zeta$ -Richtung beschreibt, vergleiche [59, Gleichung (5.16)]. Dies führt bei sehr dünnen Geometrien und nicht ausreichender Verfeinerung zu sehr großen Beiträgen, die zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung kleinere Verschiebungen implizieren.

**Querschublocking** Das Phänomen des Querschublockings ist bei der Verwendung von Elementen basierend auf einer Reissner-Mindlin-Kinematik, die explizit die Querschubverzerrungen berücksichtigen, zu beobachten. Es äußert sich, wie auch das Schublocking, durch parasitäre Querschubverzerrungen, die bei der Betrachtung bestimmter Deformationszustände auftreten. Ähnlich zum Schublocking ist das Abbilden von reinen Biegedeformationen aus der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene heraus fehlerhaft. Hierbei liegen Querschubverzerrungen vor, die physikalisch gesehen verschwinden müssen. Weiter schließt die für schlanke beziehungsweise dünne Strukturen gültige Normalenhypothese – vergleiche zum Beispiel [26, Kapitel VI, §6] – das Auftreten von Querschubverzerrungen beziehungsweise -spannungen ebenfalls aus. Die parasitären Anteile liefern zusätzliche, große Beiträge zum Schubanteil der inneren Energie. Das Verhältnis von Schub- und Biegeanteil verhält sich auch hier proportional zu  $(\frac{h}{t})^2$  und wird somit für zunehmend schlankere Strukturen immer dominanter. Daraus resultieren neben den deutlich zu kleinen Verschiebungen auch Oszillationen in den Spannungsverläufen.

## Gegenmaßnahmen

Als Gegenmaßnahmen zu den beschriebenen Effekten wurden unterschiedliche Methoden entwickelt, aus denen eine Vielzahl an Elemententwicklungen hervorgegangen ist. Das hier betrachtete volumenartige Schalenelement verwendet neben dem Konzept der reduzierten Integration (siehe zum Beispiel [52, Kapitel 4]), die *Enhanced-Assumed-Strain* (EAS)–[81] und die *Assumed-Natural-Strain* (ANS)–Methode [9], [53], [66], [67].

**(Selektiv) reduzierte Integration** Die Technik der selektiv reduzierten Integration wurde bereits in Abschnitt 3.2 für den Spezialfall der linearen Elastizität in Kombination mit beinahe inkompressiblen Materialien verwendet. Dabei wurde jedoch das eigentliche Konzept in der Definition des Operators  $P_h$  versteckt. Für gewöhnlich erfolgt die Umsetzung direkt mittels Quadraturformeln, die der vorliegenden Problemstellung entsprechend angepasst sind. Das heißt, für eine Funktion  $f$  existiere eine Quadraturformel  $\mathcal{Q}$  mit minimaler Anzahl von Quadraturpunkten  $N_{\mathcal{Q}}$ , sodass diese das Integral der Funktion  $f$  exakt bestimmt, das heißt

$$\int f(x) dx = \sum_{(q_i, \omega_i) \in \mathcal{Q}} f(q_i) \omega_i. \quad (3.13)$$

Von einer reduzierter Integration wird dann gesprochen, wenn anstelle der Quadratur  $\mathcal{Q}$  in Gleichung (3.13) eine Quadraturformel  $\tilde{\mathcal{Q}}$  verwendet wird, die die Funktion  $f$  absichtlich fehlerhaft integriert. Im Falle der selektiv reduzierten Integration wird zudem eine Zerlegung der Funktion  $f = f_1 + f_2$  vorausgesetzt und nur das Integral einer der Zerlegungsfunktionen bewusst fehlerhaft bestimmt. Das heißt

$$\int f(x) dx \approx \sum_{(q_i, \omega_i) \in \mathcal{Q}} f_1(q_i) \omega_i + \sum_{(\tilde{q}_i, \tilde{\omega}_i) \in \tilde{\mathcal{Q}}} f_2(\tilde{q}_i) \tilde{\omega}_i.$$

Der Operator  $P_h$  aus Gleichung (3.8), der im Wesentlichen eine Projektion auf den Raum der stückweise konstanten Funktionen auf jedem Element der Triangulierung beschreibt, lässt sich auch durch die Verwendung einer einpunktigen Quadratur im volumetrischen Anteil realisieren.

Das hier betrachtete volumenartige Schalenelement verwendet eine vollständig reduzierte Integration. Besonders ist hierbei die verwendete Quadraturformel  $\mathcal{Q}_{VS}$ , die aus einer bezüglich der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene reduzierten einpunktigen Quadraturformel besteht, jedoch in Dickenrichtung 3 oder mehr Punkte verwendet. Die Quadraturpunkte sind demnach gegeben durch  $q_i := (0, 0, \bar{\zeta}_i)$  für  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{Q}_{VS}}$ , wobei die Koordinaten  $\bar{\zeta}_i$  mit den Punkten einer entsprechenden eindimensionalen Gauß-Quadratur übereinstimmen. Diese Art der Quadratur verhindert das Auftreten des Schublockings und reduziert auch den Effekt des volumetrischen Lockings. Dabei ist hinsichtlich des Schublockings die Wahl der Quadraturpunkte entscheidend. Wie bereits erwähnt, ergeben sich bei der Reproduktion reiner Biegedeformationen in der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene parasitäre Schubverzerrungen, die aufgrund ihrer linearen Abhängigkeit in  $\xi$ -Richtung einen Nulldurchgang in der Elementmitte haben. Auswertungen für die Quadratur an dieser Stelle liefert den gewünschten, verschwindenden Schubverzerrungszustand. Der Effekt des volumetrischen Lockings wird dagegen nur abgemildert. Alves de Sausa, et. al. haben in [84] gezeigt, dass bei Verwendung einer einpunktigen Quadratur anstelle einer 8-Punkt-Quadratur für trilineare Verschiebungselemente alle 23 möglichen inkompressiblen Deformationen reproduziert werden können. Aufgrund der hier zulässigen beliebigen Anzahl von Punkten in Dickenrichtung ist daher nur eine Verbesserung, aber keine vollständige Behebung zu erwarten. Weiter führt die Verwendung der Quadratur  $\mathcal{Q}_{VS}$  zum Auftreten sogenannter Nullenergiemoden, denen mit Hilfe der im späteren Verlauf beschriebenen Hourglass-Stabilisierung entgegengewirkt wird.

**ANS-Methode** Die ANS-Methode nutzt ähnlich wie die reduzierte Integration die Tatsache, dass an bestimmten Punkten im Element, die möglicherweise auftretenden parasitären Größen mit den physikalisch zu erwartenden übereinstimmen. Die an diesen sogenannten Kollokationspunkten gewonnenen Informationen werden dann über das gesamte Element interpoliert und so eine verbesserte Beschreibung gewonnen.

Die hier verwendete Elemententwicklung nutzt diese Technik zur Behebung des Querschublockings. Dazu werden die Querschubverzerrungen an den Kantenmittelpunkten der Kopf- und Bodenfläche ausgewertet und von dort aus in das Innere extrapoliert, vergleiche [31, Abbildung 3]. Ent-

scheidend ist hierbei die besondere Position der Kollokationspunkte, die sich nicht wie gewöhnlich auf der Mittelfläche normal zur  $\zeta$ -Richtung befinden.

Neben den Querschubverzerrungen wird die ANS-Methode auch für Normalenverzerrungen in  $\zeta$ -Richtung verwendet, um die Stabilität des Elementes zu verbessern. Die Kollokationspunkte liegen in diesem Fall wie gewöhnlich in den Eckpunkten der Mittelfläche.

**EAS-Methode** Der Ausgangspunkt für die EAS-Methode ist das Hu-Washizu-Prinzip mit der Drei-Feld-Problemstellung 2.4. Für die Mastervariable  $\varepsilon$  wird angenommen, dass sich diese durch eine Komposition aus kompatiblen Verzerrungen  $\varepsilon_u = Du$  und zusätzlichen erweiterten Verzerrungen  $\hat{\varepsilon}$  darstellen lässt, das heißt  $\varepsilon = \varepsilon_u + \hat{\varepsilon}$ . Einsetzen in Gleichung (2.10) liefert mit der analogen Zerlegung für die Variation der Verzerrung  $\omega = D\varphi + \hat{\omega}$

$$\begin{aligned} & \delta\Pi_{\text{HW}}(u, \hat{\varepsilon}, \sigma)(\varphi, \hat{\omega}, \tau) \\ &= \int_{\Omega} -\hat{\varepsilon} : \tau + (\sigma_u + \sigma_{\hat{\varepsilon}} - \sigma) : \hat{\omega} + (\sigma_u + \sigma_{\hat{\varepsilon}}) : \varepsilon_{\varphi} dx \\ & - \int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Gamma_N} f_N\varphi dx = 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_u + \sigma_{\hat{\varepsilon}}) : \varepsilon_{\varphi} dx - \int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Gamma_N} f_N\varphi dx &= 0, \\ \int_{\Omega} -\hat{\varepsilon} : \tau &= 0, \\ \int_{\Omega} (\sigma_u + \sigma_{\hat{\varepsilon}} - \sigma) : \hat{\omega} dx &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für die diskrete Problemstellung werden endlich dimensionale Teilräume  $V_h \subset H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $\hat{E}_h, S_h \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$  gewählt. Zusätzlich wird gefordert, dass

$$S_h \subset \mathbb{C}(DV_h + \hat{E}_h) \quad \text{mit} \quad S_h \perp \hat{E}_h.$$

Dies impliziert direkt Gleichung (3.14)<sub>2</sub> und die explizite Abhängigkeit der Spannungen verschwindet. Die Lösung  $(u_h, \hat{\varepsilon}_h) \in V_h \times \hat{E}_h$  erfüllt somit die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}(u_h, \hat{\varepsilon}_h)(\varphi_h, \hat{\omega}_h) &:= \int_{\Omega} (\sigma_{u_h} + \sigma_{\hat{\varepsilon}_h}) : (\varepsilon_{\varphi_h} + \hat{\omega}_h) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f \varphi_h dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi_h dx = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

für alle  $(\varphi_h, \hat{\omega}_h) \in V_h \times \hat{E}_h$ . Im Vergleich zu der rein verschiebungsbasierten Problemstellung in Form von Gleichung (2.12), treten die erweiterten Verzerrungen in Gleichung (3.15) nur im Anteil der inneren Energie auf. Die zusätzlich vorhandenen Freiheitsgrade bieten dabei die Möglichkeit den verschiedenen Lockingeffekten durch eine entsprechende Abschwächung der inneren Energie entgegenzuwirken, vergleiche zum Beispiel [18], [24], [25], [27] und [28].

Die EAS-Methode wird bei dem hier verwendeten volumenartigen Schalenelement zum einen zur Behebung des Dickenlockings eingesetzt und dient zum anderen dazu möglicherweise auftretenden volumetrischen Lockingeffekten, die mit Hilfe der reduzierten Integration noch nicht behoben werden konnten, entgegenzuwirken. Die in [82] vorgestellten Überlegungen zeigen, dass in Kombination mit der zuvor präsentierten reduzierten Integration lediglich ein zusätzlicher EAS-Parameter pro Element benötigt wird. Demnach ist das erweiterte Verzerrungsfeld auf Elementebene gegeben durch

$$\hat{\varepsilon}_h^{\mathcal{K}}(\xi, \eta, \zeta) := \alpha_{\text{EAS}}^{\mathcal{K}} \hat{B}^{\mathcal{K}}, \quad \hat{B}^{\mathcal{K}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\text{EAS}}^{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$$

und liefert somit auch die benötigte lineare Abhängigkeit der Gesamtverzerrungen  $\varepsilon$  in Dickenrichtung. Aufgrund der Tatsache, dass für die erweiterten Verzerrungen keine globalen Stetigkeitseigenschaften gefordert werden müssen, ist ferner eine elementweise statische Kondensation der EAS-Parameter durchführbar. Diese ermöglicht die ausschließliche Verwendung der Verschiebung als globale Variable.

**Hourglass–Stabilisierung** Die verwendete reduzierte Integration mit einem Integrationspunkt in der  $\xi$ – $\eta$ –Ebene und beliebig vielen ( $\geq 3$ ) Punkten in  $\zeta$ –Richtung führt zum Auftreten von sogenannten *Nullenergiemoden* – auch *zero energy modes* genannt. Hierbei handelt es sich um Verschiebungen die zu einer Verzerrung des Körpers führen, aber, aufgrund der verwendeten Integration, keinen Beitrag zur inneren Energie liefern. Aus mathematischer Sicht bedeutet das, dass die Elliptizität der Bilinearform verloren geht und somit die Steifigkeitsmatrix singulär wird. Um dies zu verhindern besteht die Möglichkeit der selektiv reduzierten Integration. Der dabei vorhandene, voll integrierte Anteil verhindert das Auftreten der unerwünschten Moden. In den meisten Fällen ist jedoch eine Separation der einzelnen Anteile nur mit sehr hohem Aufwand verbunden oder aber gar nicht realisierbar. Die zweite Möglichkeit ist, alle Anteile voll zu integrieren und die Lockingeffekte über eine höhere Anzahl von EAS–Parametern zu beheben, was jedoch mit einem deutlich höheren numerischen Aufwand verbunden ist. Die dritte Technik, die in diesem Fall verwendet wird, ist die sogenannte *Hourglass–Stabilisierung*, vergleiche zum Beispiel [12], [13] und [39]. Dabei wird der Hourglass–Anteil der Verzerrungen, das heißt der Anteil der Verzerrungen, der sich nicht aus dem reinen linearen Anteil der Verschiebungen ergibt und somit durch die Quadraturformel entfällt, separat behandelt und anschließend als Stabilisierung der reduziert integrierten Form ergänzend hinzugefügt. Ausgangspunkt hierfür ist eine Taylor–Reihen–Entwicklung der kompatiblen Verzerrungen auf Elementebene bis hin zu den bilinearen Reihengliedern, das heißt

$$\varepsilon_{u_h}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\varepsilon}_{u_h} + \xi \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi} + \eta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\eta} + \zeta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\zeta} + \xi\eta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi\eta} + \xi\zeta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi\zeta} + \eta\zeta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\eta\zeta},$$

mit  $\bar{\varepsilon}_{u_h} := \varepsilon_{u_h}(0, 0, 0)$ ,  $\bar{\varepsilon}_{u_h}^{(\cdot)} := \frac{\partial \varepsilon_{u_h}}{\partial (\cdot)}(0, 0, 0)$  und  $\bar{\varepsilon}_{u_h}^{(\cdot)(\bullet)} := \frac{\partial^2 \varepsilon_{u_h}}{\partial (\cdot) \partial (\bullet)}(0, 0, 0)$ . Im Hinblick auf die verwendete reduzierte Integration wird deutlich, dass der Hourglass–Anteil der kompatiblen Verzerrungen gegeben ist durch

$$\varepsilon_{u_h}^H(\xi, \eta, \zeta) := \xi \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi} + \eta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\eta} + \xi\eta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi\eta} + \xi\zeta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\xi\zeta} + \eta\zeta \bar{\varepsilon}_{u_h}^{\eta\zeta}, \quad (3.16)$$

da diese Anteile bei der Auswertung von  $\varepsilon_{u_h}$  in den Quadraturpunkten verschwinden. Die Berücksichtigung dieser Anteile erfolgt nun durch die

analytische Integration der auftretenden Integrale. Dies ist möglich, da lediglich lineare beziehungsweise quadratische Polynome bezüglich  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  integriert werden müssen. Angesichts der Tatsache, dass der Hourglass-Anteil der Verzerrungen mitverantwortlich für die auftretenden Lockingeffekte ist, muss sichergestellt werden, dass diese nicht wieder auftreten. Das Querschublocking ist durch die Verwendung der ANS-Methode auch für  $\varepsilon_{u_h}^H$  behoben. Hinsichtlich des volumetrischen Lockings wird die sogenannte *B-bar*-Methode verwendet, vergleiche beispielsweise [51] und [52, Abschnitt 5.4.2]. Konkret bedeutet das in diesem Fall, dass nur der deviatorische Anteil berücksichtigt und der volumetrische Anteil schlichtweg vernachlässigt wird. Das Schublocking wird schließlich mit Hilfe der in [60] und [61] vorgestellten Technik, basierend auf einem zum linearen Verschiebungsfeld orthogonalen ergänzenden Verschiebungsanteil, behoben. Hierbei beschränkt sich die Modifikation auf die Membrananteile der Verzerrungen.

## Diskrete Problemstellung

Abschließend erfolgt die Angabe der diskreten Problemstellung für die Verwendung des zuvor beschriebenen volumenartigen Schalenelements. Dazu wird in einem ersten Schritt die Gleichung (3.15) bezüglich der Funktionen  $(\varphi_h, \hat{\omega}_h) = (0, \hat{B}^\mathcal{K})$  für ein beliebiges Element  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$  variiert. Unter Berücksichtigung der Unstetigkeit des erweiterten Verzerrungsfeldes ist  $\text{supp}(\hat{B}^\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$  und somit  $\hat{\varepsilon}_h|_{\mathcal{K}} = \alpha_{\text{EAS}}^\mathcal{K} \hat{B}^\mathcal{K}$ . Dies liefert

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Pi}(u_h, \hat{\varepsilon}_h)(\varphi, \hat{\omega}_h) &= \int_{\Omega} (\sigma_{u_h} + \sigma_{\hat{\varepsilon}_h}) : \hat{\omega}_h \, dx \\ &= \int_{\mathcal{K}} (\mathbb{C} : \varepsilon_{u_h}) : \hat{B}^\mathcal{K} \, dx + \alpha_{\text{EAS}}^\mathcal{K} \int_{\mathcal{K}} (\mathbb{C} : \hat{B}^\mathcal{K}) : \hat{B}^\mathcal{K} \, dx \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und schließlich mittels statischer Kondensation

$$\alpha_{\text{EAS}}^\mathcal{K} = - \frac{\int_{\mathcal{K}} (\mathbb{C} : \varepsilon_{u_h}) : \hat{B}^\mathcal{K} \, dx}{\int_{\mathcal{K}} (\mathbb{C} : \hat{B}^\mathcal{K}) : \hat{B}^\mathcal{K} \, dx}.$$

Weiter beschreibe  $\mathcal{M}_{\text{ANS}}$  den Operator, der die Normalenverzerrung und die Querschubverzerrungen bezüglich der Dickenrichtung durch die beschriebenen ANS-Approximationen ersetzt, sowie  $\mathcal{M}_{\text{stab}}$  den Operator, der die Membrananteile zur Stabilisierung modifiziert. Dann lässt sich die diskrete Problemstellung auf folgende Weise beschreiben.

**Problemstellung 3.2.** *Finde  $u_h \in V_h = V_h^{(1)}$ , sodass gilt*

$$\mathcal{A}_h^{\text{VS}}(u_h)(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_h$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^{\text{VS}}(\psi_h)(\varphi_h) &:= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[ a_{\mathcal{K}}(\psi_h)(\varphi_h) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(\psi_h)(\varphi_h) - \int_{\mathcal{K}} f \varphi_h dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega} f_N \varphi_h dx \right], \\ a_{\mathcal{K}}(\psi_h)(\varphi_h) &:= \sum_{(q_i, w_i) \in \mathcal{Q}_{\text{VS}}} (\mathbb{C}(q_i) : \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{\psi_h})(q_i)) : \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{\varphi_h})(q_i) w_i \\ &\quad - \alpha_{\text{EAS}}^{\mathcal{K}}(\psi_h) \sum_{(q_i, w_i) \in \mathcal{Q}_{\text{VS}}} (\mathbb{C}(q_i) : B^{\mathcal{K}}(q_i)) : \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{\varphi_h})(q_i) w_i, \\ \alpha_{\text{EAS}}^{\mathcal{K}}(\psi_h) &:= \frac{\sum_{(q_i, w_i) \in \mathcal{Q}_{\text{VS}}} (\mathbb{C}(q_i) : \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{\psi_h})(q_i)) : B^{\mathcal{K}}(q_i) w_i}{\sum_{(q_i, w_i) \in \mathcal{Q}_{\text{VS}}} (\mathbb{C}(q_i) : B^{\mathcal{K}}(q_i)) : B^{\mathcal{K}}(q_i) w_i} \end{aligned}$$

und

$$a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(\psi)(\varphi) := \int_{\mathcal{K}} \left( \mathbb{C} : \mathcal{M}_{\text{stab}} \left( \varepsilon_{\psi_h}^{H, \text{ANS}} \right)^{\text{dev}} \right) : \mathcal{M}_{\text{stab}} \left( \varepsilon_{\varphi_h}^{H, \text{ANS}} \right)^{\text{dev}} dx.$$

Weiter ist  $\varepsilon_{\psi_h}^{H, \text{ANS}}$  analog zu Gleichung (3.16) definiert, wobei

$$\bar{\varepsilon}_{u_h} := \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{u_h})(0, 0, 0), \quad \bar{\varepsilon}_{u_h}^{(\cdot)} := \frac{\partial \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{u_h})}{\partial (\cdot)}(0, 0, 0)$$

und

$$\bar{\varepsilon}_u^{(\cdot)(\bullet)} := \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{\text{ANS}}(\varepsilon_{u_h})}{\partial (\cdot) \partial (\bullet)}(0, 0, 0)$$

gilt.



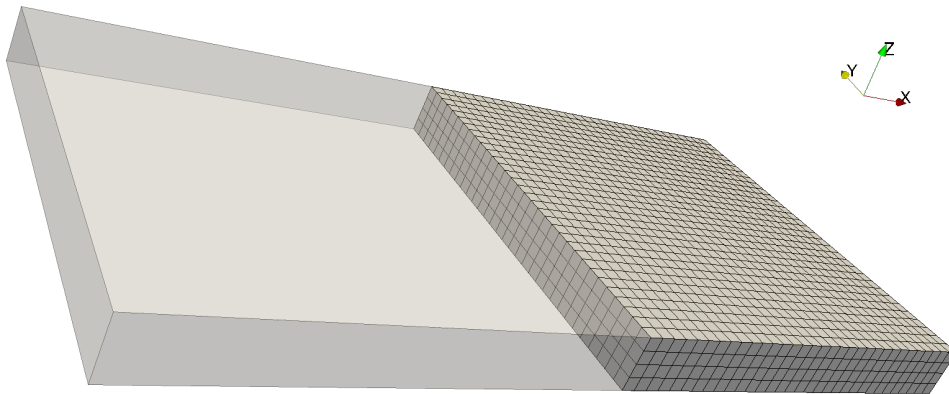


Abbildung 3.2.: Prinzipskizze eines hybriden Netzes bestehend aus einem volumenartigen Schalenelement (links) und mehreren Volumenelementen (rechts).

### 3.4. Hybride Netze

Diskretisierungen, die aus unterschiedlichen Typen von Finiten Elementen bestehen, werden als *hybride Triangulierung* beziehungsweise als *hybrides Netz* bezeichnet. Der entscheidende Punkt bei der Nutzung eines solchen Netzes ist die sinnvolle Interaktion der unterschiedlichen Elementtypen. Die hier angestrebte lokal adaptive Verwendung von Volumen- und volumenartigen Schalenelementen ermöglicht auf den ersten Blick eine vergleichsweise einfache Kopplung, da weder ein Unterschied in der Geometriebeschreibung<sup>1</sup> noch in der Anzahl und Art der Freiheitsgrade vorliegt. Problematisch ist hingegen die notwendige, deutlich feinere Diskretisierung hinsichtlich der Volumenelemente, wie die in Abbildung 3.2 dargestellte Prinzipskizze verdeutlicht. Die dadurch entstehenden hängenden Knoten beziehungsweise hängenden Freiheitsgrade erfordern eine entsprechende Kopplung der Art, dass die Stetigkeit des Verschiebungsfeldes gewährleistet ist.

Dies lässt sich zum einen analog zu  $h$ -adaptiven Verfahren durch die Vorgabe von Interpolationsbedingungen realisieren, die die entsprechenden Freiheitsgrade so restringieren, dass die Verschiebungsfelder über-

<sup>1</sup>Bei der Betrachtung reiner Schalenelemente erfolgt die Geometriebeschreibung beispielweise über die Mittelfläche. Weiter sind neben den reinen Verschiebungs- auch Verdrehungsfreiheitsgrade vorhanden, vergleiche zum Beispiel [17].

einstimmen. Der Nachteil dieser Technik ist jedoch, dass durch die hohe Anzahl an Zwangsbedingungen die Verschiebungsfreiheit der Volumenelemente an der Kante deutlich eingeschränkt wird, was eine negative Auswirkung auf die Qualität der Lösung hat.

Eine andere Möglichkeit bietet das Konzept der schwachen Kopplung, das heißt einer Gleichheit im integralen Mittel. Hierzu wird auf Techniken aus dem Bereich der Gebietszerlegung und der Behandlung von Mehrkörperkontaktproblemen zurückgegriffen. Eine detaillierte Beschreibung der Gebietszerlegung findet sich zum Beispiel in [57] oder [92]. Die Art der Diskretisierung des Lagrange-Multiplikators ist der entscheidende Unterschied bei den ansonsten ähnlichen Techniken, die auch bei der Diskretisierung von Mehrkörperkontaktproblemen Anwendung finden, siehe beispielsweise [20] beziehungsweise [93]. Der Ausgangspunkt ist jeweils die Unterteilung des Gebietes  $\Omega$  in zwei oder mehrere Teilgebiete, die dann unabhängig voneinander behandelt werden. Die Kopplung an den Übergangs- beziehungsweise Kontaktkanten wird schließlich durch Forderung nach dem dortigen Verschwinden des Sprungs  $[u] = 0$  im variationalen Sinne realisiert. In der hier betrachteten Situation ergibt sich die Unterteilung des Gebietes direkt aus der Verteilung der unterschiedlichen Elementtypen. Das Teilgebiet, das alle Volumenelemente vereint, erhält die Bezeichnung  $\Omega_{\text{VE}}$ . Entsprechend beschreibt  $\Omega_{\text{VS}}$  den Bereich der volumenartigen Schalenelemente. Durch die Integration der Zwangsbedingung an den Sprung mittels Lagrange-Techniken in die Gleichgewichtsbedingung und der anschließenden Identifizierung der diskreten Funktionen mit den zugehörigen Koeffizientenvektoren ergibt sich ein algebraisches Block-Gleichungssystem in Sattelpunktform

$$\begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Die Gebietszerlegung sowie die Verwendung der in [93, Abschnitt 3] eingeführten biorthogonalen Mortar-Basisfunktionen führen zudem auf numerisch vorteilhafte Strukturen der einzelnen Untermatrizen. Die unabhängige Betrachtung der einzelnen Teilgebiete  $\Omega_{\text{VE}}$  und  $\Omega_{\text{VS}}$  liefert im

Idealfall eine Matrix  $A$  mit einer entkoppelten Blockstruktur der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{\text{VE}} & 0 \\ 0 & A_{\text{VS}} \end{pmatrix}.$$

Zudem hat die Kopplungsmatrix  $N$  lediglich vier von Null verschiedene Einträge pro Zeile.

Zur Bestimmung einer Lösung des Gleichungssystems (3.17) stehen unterschiedliche Verfahren zur Auswahl. Ein ersten Ansatz ist das System als ganzes zu betrachten und monolithisch mit Hilfe eines direkten Lösungsverfahrens – zum Beispiel der LR-Zerlegung – zu lösen. Dies hat jedoch den Nachteil, dass bei großen Systemen schnell die maximalen Ressourcen erreicht sind und aufgrund der Indefinitheit des Systems auch Stabilitätsprobleme auftreten können. Zudem werden die Struktureigenschaften des Problems völlig vernachlässigt.

Alternativ kann auf typische Techniken zum Lösen von Sattelpunktproblemen wie beispielsweise die Verwendung des Schurkomplements (vergleiche [79, S. 217]) zurückgegriffen werden. Die Multiplikation der Gleichung (3.17) mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -N^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} A & N \\ 0 & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ -N^T A^{-1} F \end{pmatrix}$$

und somit eine Bestimmungsgleichung für den Lagrange-Parameter  $\underline{\chi}$ . Durch Umformen des Ausdrucks in der ersten Zeile ergibt sich für bekanntes  $\underline{\chi}$  schließlich eine Gleichung für  $\underline{u}$  der Form  $A\underline{u} = F - N\underline{\chi}$ . Die entscheidende Größe in dem zuvor beschriebenen Vorgehen ist die Inverse der Matrix  $A$ . Unter der Voraussetzung, dass  $A$  regulär ist, lässt sich die Multiplikation mit  $A^{-1}$  durch das Lösen eines Gleichungssystems realisieren. Dabei wird das Problem aufgrund der Struktur von  $A$  auf zwei Teilprobleme bezüglich der Matrizen  $A_{\text{VE}}$  und  $A_{\text{VS}}$  reduziert, deren Behandlung unabhängig voneinander möglich ist. Dies setzt jedoch voraus,

dass die beiden Untermatrizen jeweils regulär sind, was zumindest für den Fall von in beiden Teilgebieten vorliegenden Dirichletrandbedingungen garantiert ist. Ist dies nicht der Fall, so ist trotz der Tatsache, dass eine der beiden Untermatrizen singularär ist, das vollständige System aus Gleichung (3.17) weiterhin lösbar, vergleiche [47, Abschnitt 7.4.1]. Um in dieser Situation nicht erneut auf den monolitischen Ansatz zurückgreifen zu müssen, bietet sich eine Kombination aus starker und schwacher Kopplung an. Dabei werden lediglich die in beiden Triangulierungen vorkommenden Freiheitsgradknoten identifiziert und stark gekoppelt – in Abbildung 3.2 sind das die Eckknoten des volumenartigen Schalenelements auf der Übergangskante. Bei allen anderen wird die Gleichheit weiterhin im integralen Mittel gefordert. Die starke Kopplung ausgewählter Freiheitsgrade wirkt sich zudem positiv auf die Vorkonditionierbarkeit des Systems aus, sodass insbesondere für iterative Lösungsverfahren eine effizientere Lösung möglich ist, siehe [56]. Nachteilig ist jedoch, dass durch die starke Kopplung die vorteilhafte Blockstruktur verloren geht und die Matrix  $A$  wieder im ganzen betrachtet werden muss. Für einen numerisch effizienten Umgang mit dieser Situation sei auf die Technik in [56, Abschnitt 3] verwiesen.

Eine andere Möglichkeit ist der Übergang zu einer Helmholtz-Gleichung. Der hierdurch entstehende zusätzliche Anteil aus der Massenmatrix sorgt dann auf beiden Teilgebieten unabhängig von der Verteilung der Dirichletrandbedingungen für positiv definite Untermatrizen. Dieser Ansatz lässt sich damit begründen, dass die Beschreibung eines vollständigen Blechmassivumformprozesses die Verwendung einer zeitabhängigen Modellierung verlangt und die hier betrachtete statische Situation als ein zeitdiskreter Zustand interpretiert werden kann.

Als letzte Technik sei die statische Kondensation des Lagrange-Multiplikators mittels einer Neuinterpretation der Freiheitsgrade auf den Übergangskanten erwähnt. Diese beinhaltet eine Aufspaltung in einen totalen und einen relativen Verschiebungsanteil und wird durch die Einführung sogenannter *bedingter Basisfunktionen* – vergleiche zum Beispiel [50, Abschnitt 2.3] – realisiert. Die entscheidende Eigenschaft dieser Basisfunktionen ist, dass sie einen Träger in beiden Teilgebieten haben. Dies führt erneut zu einer Kopplung der Untermatrizen  $A_{VS}$  und  $A_{VE}$  und einer Auf-

lösung der Blockstruktur von  $A$ . Dafür reduziert sich die Systemgröße wieder auf die ursprüngliche Anzahl von Freiheitsgraden.

Um den implementatorischen Aufwand zu begrenzen und neben der Verwaltung der aufwendigen Netzstruktur nicht zusätzliche Datenstrukturen für die Lösungsalgorithmen bereitstellen zu müssen, wird zur Bestimmung der Lösung in allen numerischen Anwendungsbeispielen durchweg der monolitische Ansatz unter Einsatz der LR-Zerlegung verwendet.



## Kapitel 4.

# Fehlerschätzung auf Basis der DWR–Methode für modifizierte diskrete Semilinearformen

Im Rahmen der a priori Fehleranalyse wurde aufgezeigt, in wieweit der Diskretisierungsfehler anhand der Ungleichungen (3.2) und (3.3) kontrolliert werden kann. Die hieraus ableitbaren Informationen sind jedoch eher von qualitativer Natur, wie beispielsweise die Ordnung der zu erwartenden Konvergenzgeschwindigkeit, als dass sie quantitativ die Größenordnung des Fehlers wiedergeben. Der Grund dafür ist, dass nur in wenigen Fällen Informationen über die Norm der zweiten Ableitung der kontinuierlichen Lösung sowie die Größenordnung der auftretenden Konstanten vorhanden sind. Darüber hinaus liegt der Fokus in praktischen Anwendung häufig auf deutlich spezielleren Fehlermaßen, wie beispielsweise der Verschiebung oder der Vergleichsspannung in einem bestimmten Teilgebiet, über die anhand der globalen  $H^1$ - oder  $L^2$ -Norm keine Aussagen möglich sind. Um dennoch den Fehler quantitativ abzuschätzen, kommt das Konzept der a posteriori Fehlerschätzung zur Anwendung, bei dem die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers auf der zur aktuellen Triangulierung bestimmten diskreten Lösung basiert. Aus den unterschiedlichen Ansätzen der a posteriori Fehlerschätzung wird an dieser Stelle das Konzept der zielorientierten Fehlerschätzer genauer betrachtet, da es im Hinblick auf die Berücksichtigung spezieller Fehlermaße von ent-

scheidender Bedeutung ist. Für die weiteren Vorgehensweisen sei auf die entsprechende Literatur – wie beispielsweise [89, Kapitel 1] – verwiesen.

Die grundlegende Idee der zielorientierten Fehlerschätzung beruht darauf, dass das zu betrachtende Fehlermaß durch ein – möglicherweise nichtlineares – Funktional  $J: V \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentiert und dieses dann über ein duales beziehungsweise adjungiertes Problem mit der Ausgangsproblemstellung verknüpft wird. Basierend auf dem dualen Problem lässt sich der Fehler bezüglich des Zielfunktionals dann mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und a posteriori Fehlerschätzern hinsichtlich der Energienorm des primalen und dualen Problems abschätzen – vergleiche zum Beispiel [3], [70], [71]. Die Konvergenz von adaptiven Methoden basierend auf der zuvor beschriebenen Technik zur Fehlerschätzung wird unter anderem in [10], [38], [68] gezeigt, jedoch sind die Resultate auf lineare Zielfunktionale und Ausgangsproblemstellungen beschränkt.

Alternativ bietet die in [7] und [11] vorgestellte Methode der dualgewichteten Residuen – kurz DWR–Methode – eine weitere Möglichkeit zur zielorientierten Schätzung des Diskretisierungsfehlers in Form einer Fehleridentität. Diese besteht unter anderem aus dem Residuum des primalen Problems gewichtet mit der kontinuierlichen Lösung des dualen Problems, wodurch der Einfluss der diskreten Lösung in einem konkreten Punkt auf den Wert des Zielfunktionals beschrieben wird. Durch eine adäquate Approximation der noch vorhandenen kontinuierlichen Größen in der Fehleridentität, ergibt sich ein numerisch auswertbarer Fehlerschätzer, der in der Praxis gute Ergebnisse liefert, obwohl ein präziser mathematischer Beweis hinsichtlich der Effizienz und Zuverlässigkeit lediglich unter der Voraussetzung einer schwierig zu verifizierenden Sättigungsannahme möglich ist – vergleiche [36]. Für lineare Problemstellungen hingegen wird in [69] eine Modifikation vorgestellt, die eine zuverlässige Fehlerschätzung garantiert.

Das Konzept der DWR–Methode lässt sich auch zur Schätzung anderer Fehlerarten verwenden. Neben der in [74] von Rannacher und Vihharen vorgestellten Erweiterung zur Schätzung des numerischen Fehlers bei der Behandlung von nichtlinearen Problemen unter der Verwendung von iterativen Lösungsverfahren, lässt sich ferner der Fehler bezüglich unterschiedlicher Modelle schätzen. Braack und Ern entwickelten auf abstrakter Ebene eine Vorgehensweise zur gleichzeitigen Schätzung des Modell-



---

und Diskretisierungsfehlers, wobei sich die unterschiedlichen kontinuierlichen Modelle durch einen additiven (nichtlinearen) Anteil unterscheiden – vergleiche [22]. Dabei beschränkt sich die Anwendung der Technik in [22] auf Diffusion–Reaktionsgleichungen mit stark oszillierenden Koeffizienten. Eine Anpassung auf zeitabhängige Probleme erfolgt in [23]. Auch im Bereich der Strukturmechanik findet diese Technik Anwendung. So behandelt [46] die Kombination von elastischem und linear elastischem Materialverhalten, wohingegen in [45] der Fokus auf thermoplastischen Problemstellungen mit nicht-lokaler Schädigung liegt. Die Anwendung auf das Gebiet der Kontaktprobleme, insbesondere des reibungsbehafteten Kontakts, wird in [73] präsentiert. Hierbei besteht die Modellhierarchie aus verschiedenen linearen und nichtlinearen Reibgesetzen.

Die folgenden Ausführungen in diesem Kapitel befassen sich ebenfalls mit den zwei Teilgebieten der Diskretisierungs- und Modellfehlerschätzung basierend auf der DWR–Methodik. Dabei wird das ursprüngliche Konzept auf die Situation einer modifizierten diskreten Problemstellung, wie sie beispielsweise durch die Verwendung der Bilinearformen bezüglich der selektiv reduzierten Integration oder der volumenartigen Schalenelemente – vergleiche Abschnitte 3.2 und 3.3 – entsteht, erweitert. Eine ähnliche Thematik wurde bereits in [11, Abschnitt 2.3] für Stabilisierungstechniken untersucht, wobei als Konsistenzvoraussetzung das Lösen der diskreten Gleichung durch die kontinuierliche Lösung verlangt wird. Da diese Bedingung bereits in den zuvor erwähnten Beispielen nicht erfüllt ist, erfolgen die nachfolgenden Untersuchungen ohne eine entsprechende Forderung.

Bei der Herleitung der Fehleridentität für den Diskretisierungsfehler entsteht die Schwierigkeit, dass aufgrund der modifizierten diskreten Problemstellung auch ein diskretes triviales Optimierungsproblem entsteht. Die Argumentation über die stationären Punkte ist somit hinfällig. Abhilfe schafft hier die Einführung eines Hilfsfunktional, mit dem die neue Situation auf die ursprüngliche Ausgangslage zurückgeführt werden kann.

Im Hinblick auf die Modellfehlerschätzung ist in einem ersten Schritt zu klären, was im Sinne der Dimensionsadaptivität unter einem Modellfehler zu verstehen ist. Die Definition erfolgt an dieser Stelle basierend auf der Differenz der Diskretisierungsfehler bezüglich verschiedener Finite Elemente Diskretisierungen. Für die Herleitung der zugehörigen Modell-

fehleridentität dient die in in [22] vorgestellten Technik für den kontinuierlichen Modellfehler als Orientierung. Da das gesamte Vorgehen auf diskreter Ebene stattfindet, stellt sich heraus, dass zusätzlich die Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Diskretisierungen eine entscheidende Rolle spielen. Neben der allgemeinen Modellfehleridentität werden daher auch Resultate für ausgewählte Konstellationen vorgestellt.

## 4.1. Allgemeine Problemstellung

In diesem Abschnitt erfolgt die Spezifizierung der eingangs beschriebenen modifizierten Problemstellung durch die Identifizierung mit einer entsprechenden diskreten Semilinearform. Dabei sind anders als für den Rest der Arbeit auch allgemeinere, nichtlineare Problemstellungen zugelassen. Um die Unterschiede und Schwierigkeiten im Vergleich zum klassischen DWR-Konzept zu verdeutlichen, werden zunächst die grundlegenden Resultate zur Diskretisierungsfehleridentität aus [7] beziehungsweise [11] zusammengefasst. Der Abschnitt schließt mit der Angaben der modifizierten diskreten Problemstellung inklusive des zugehörigen trivialen Optimierungsproblems und der Definition des Modellbegriffs sowie des entsprechenden Modellfehlers.

### 4.1.1. Klassische DWR–Fehleridentität

Die Herleitung der klassischen Fehleridentität basierend auf der DWR–Methodik – siehe [7], [11] – erfolgt unter der Annahme, dass die zur kontinuierlichen Ausgangsproblemstellung

**Problemstellung 4.1.** *Finde  $u \in V$  mit*

$$\mathcal{A}(u)(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W. \quad (4.1)$$

gehörende diskrete Problemstellung gegeben ist durch

**Problemstellung 4.2.** *Finde  $u_h \in V_h$  mit*

$$\mathcal{A}(u_h)(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in W_h. \quad (4.2)$$

Dabei sind  $\mathcal{A} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Semilinearform mit linearem Anteil im zweiten Argument,  $V$  und  $W$  passend gewählte Funktionenräume und  $V_h \subset V$  sowie  $W_h \subset W$  die zugehörigen endlichdimensionalen Teilräume. Weiter sei eine frei wählbare Zielgröße gegeben, die mittels eines – möglicherweise nichtlinearen – Funktionals  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentiert wird und bezüglich dessen der Fehler der diskreten Lösung  $u_h \in V_h$  gemessen werden soll.

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, lässt sich unter der Voraussetzung, dass sowohl Problemstellung 4.1 als auch 4.2 eine eindeutige Lösung besitzen, der Wert des Zielfunktionalen anhand eines trivialen Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen bestimmen. Das heißt, gesucht ist  $u \in V$  beziehungsweise  $u_h \in V_h$  mit

$$J(u) = \min_{\psi \in V} J(\psi), \quad \text{sodass} \quad \mathcal{A}(\psi)(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W$$

beziehungsweise

$$J(u_h) = \min_{\psi_h \in V_h} J(\psi_h), \quad \text{sodass} \quad \mathcal{A}(\psi_h)(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in W_h.$$

Über das zugehörige Lagrangefunktional

$$\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(\psi, \varphi) = J(\psi) - \mathcal{A}(\psi)(\varphi)$$

ist jedes Minimum  $u$  beziehungsweise  $u_h$  durch einen stationären Punkt von  $\mathcal{L}$  charakterisiert, also ein Tupel  $(u, z) \in V \times W$  beziehungsweise  $(u_h, z_h) \in V_h \times W_h$ , das die Euler–Lagrange Gleichung

$$\mathcal{L}'(u, z)(\psi, \varphi) = 0 \quad \forall (\psi, \varphi) \in V \times W$$

beziehungsweise

$$\mathcal{L}'(u_h, z_h)(\psi_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall (\psi_h, \varphi_h) \in V_h \times W_h$$

erfüllt. Die separate Betrachtung der partiellen Variationen ergibt bezüglich des Lagrangemultiplikators – hier  $z$  beziehungsweise  $z_h$  – die Ausgangsproblemstellung 4.1 beziehungsweise 4.2 und entsprechend hinsichtlich der primalen Größe  $u$  beziehungsweise  $u_h$  das duale oder auch

adjungierte Problem

$$\mathcal{A}'(u)(\psi, z) = J'(u)(\psi) \quad \forall \psi \in V, \quad (4.3)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{A}'(u_h)(\psi_h, z_h) = J'(u_h)(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h. \quad (4.4)$$

Durch die Charakterisierung der kontinuierlichen und diskreten Lösung als stationäre Punkte des Lagrangefunktional  $\mathcal{L}$ , lässt sich die Differenz  $J(u) - J(u_h)$  durch die entsprechende Differenz des Lagrangefunktional in den stationären Punkten beschreiben. Dies ermöglicht unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie der Trapezregel die Herleitung einer Fehleridentität gemäß [11, Satz 2.2] der Form

$$J(u) - J(u_h) = \frac{1}{2}\rho(u_h)(z - \varphi_h) + \frac{1}{2}\rho^*(u_h, z_h)(u - \psi_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}. \quad (4.5)$$

Dabei ist das Restglied  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  von dritter Ordnung bezüglich des primalen und dualen Fehlers  $e_u := u - u_h$  und  $e_z := z - z_h$  und gegeben durch

$$\mathcal{R}_h^{(3)} := \int_0^1 \mathcal{L}'''(u_h + se_u, z_h + se_z)((e_u, e_z), (e_u, e_z), (e_u, e_z)) s(s-1) ds.$$

Der Term  $\rho(u_h)(\bullet) := -\mathcal{A}(u_h)(\bullet)$  beschreibt das Residuum des primalen, der Term  $\rho^*(u_h, z_h)(\bullet) := J'(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}'(u_h)(\bullet, z_h)$  das Residuum des dualen Problems. Beide Residuen werden mit der kontinuierlichen Lösung des jeweils anderen Problems gewichtet. Insbesondere die Lösung des dualen Problems fungiert in diesem Zusammenhang als eine Art Einflussfunktion, die die Auswirkung der diskreten primalen Lösung in einem Punkt auf den Wert des Zielfunktional beschreibt.

Die Fehleridentität in Gleichung (4.5) wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, dass die Gleichungen (4.2) und (4.4) exakt erfüllt sind. In der Praxis werden jedoch lediglich numerische Approximationen  $\tilde{u}_h$  von  $u_h$  beziehungsweise  $\tilde{z}_h$  von  $z_h$  anhand der zugehörigen Gleichungssysteme bestimmt, für die die Gleichungen (4.2) und (4.4) dementsprechend nur näherungsweise gelten. Die Berücksichtigung dieses Sachverhalts bei der

Herleitung der Fehleridentität aus Gleichung (4.5) liefert einen zusätzlichen Term, der den Fehler hinsichtlich der numerischen Approximation misst. Die entsprechende Fehlerdarstellung gemäß [74, Satz 3.1] lautet

$$J(u) - J(\tilde{u}_h) = \frac{1}{2}\rho(\tilde{u}_h)(z - \tilde{z}_h) + \frac{1}{2}\rho^*(\tilde{u}_h, \tilde{z}_h)(u - \tilde{u}_h) + \rho(\tilde{u}_h)(\tilde{z}_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}. \quad (4.6)$$

Da in vielen Fällen der numerische Fehler mehrere Größenordnungen kleiner ist als der zugehörige Diskretisierungsfehler, wird der entsprechende Anteil  $\rho(\tilde{u}_h)(\tilde{z}_h)$  für gewöhnlich vernachlässigt. Dies ändert sich jedoch mit zunehmender Verfeinerung, da aufgrund der hardware-spezifischen Gegebenheiten eine maximale arithmetische Genauigkeit vorgeben ist und sich somit die Größenordnungen der beiden Fehleranteile immer weiter annähern. Darüber hinaus gibt es andere Faktoren, die sich negativ auf den numerischen Fehler auswirken und diesen signifikant vergrößern. Neben der Genauigkeit der verwendeten Quadraturformeln und der Wahl der Toleranzen für die Gleichungssystemlöser, spielen auch problemspezifische Aspekte, wie die Modellierung von inkompressiblem, linear elastischem Materialverhalten, eine Rolle. Um all diesen Situationen Rechnung zu tragen, wird bei den folgenden Überlegungen der numerische Fehler stets miteinbezogen. Für eine bessere Lesbarkeit wird jedoch auf eine explizite Unterscheidung zwischen den diskreten Größen und deren berechneten Näherungen verzichtet und davon ausgegangen, dass – falls nicht explizit anders vorausgesetzt – mit  $u_h$  beziehungsweise  $z_h$  immer die numerische Approximation gemeint ist.

### 4.1.2. Modifizierte diskrete Problemstellung

Ausgehend von der klassischen DWR-Methode soll das bestehende Konzept dahingehend erweitert werden, dass es auch für Problemstellungen anwendbar ist, die beispielsweise die in Abschnitt 3.2 beschriebene selektiv reduzierte Integration oder die volumenartigen Schalenelemente aus Abschnitt 3.3 verwenden. Allgemein bedeutet dies, dass zur adäquaten Beschreibung des diskreten Problems, neben der Einschränkung auf die endlichdimensionalen Teilräume, zusätzlich eine modifizierte diskrete Se-

ilinearform berücksichtigt werden muss. Daraus resultiert, dass anstelle von Problemstellung 4.2 die modifizierte diskrete Problemstellung

**Problemstellung 4.3.** *Finde  $u_h \in V_h$  mit*

$$\mathcal{A}_h(u_h)(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in W_h \quad (4.7)$$

zu betrachten ist. Auch in dieser Situation erfolgt die Verknüpfung zum Zielfunktional  $J$  anhand eines trivialen Optimierungsproblems. Dieses impliziert ebenfalls ein modifiziertes Lagrangefunktional, das gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_h: V \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_h(\psi_h, \varphi_h) = J(\psi_h) - \mathcal{A}_h(\psi_h)(\varphi_h).$$

Der stationärer Punkt  $(u_h, z_h) \in V_h \times W_h$  von  $\mathcal{L}_h$  erfüllt zudem die entsprechende duale Gleichung

$$\mathcal{A}'_h(u_h)(\psi_h, z_h) = J'(u_h)(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h. \quad (4.8)$$

Obwohl das modifizierte Lagrangefunktional auf dem kontinuierlichen Produktraum  $V \times W$  definiert ist, wird an dieser Stelle nicht vorausgesetzt, dass die kontinuierliche Lösung  $u \in V$  eine Konsistenzbedingung der Form  $\mathcal{A}_h(u)(\varphi) = 0$  für alle  $\varphi \in V$  erfüllt, was ein entscheidender Unterschied zu den in [11, Abschnitt 2.3] betrachteten Ausführungen ist, die sich mit der Behandlung von Stabilisierungstechniken beschäftigen.

### 4.1.3. Modell und Modellfehler

Für die Herleitung einer Modellfehleridentität in Abschnitt 4.3 sind zunächst der Begriff des *Modells* und der des *Modellfehlers* genauer zu spezifizieren.

Der entscheidende Unterschied in der hier betrachteten Situation zum klassischen Rahmen ist die modifizierte diskrete Problemstellung 4.3, die für eine adäquate Beschreibung notwendig ist. Unter der Annahme, dass diese Anpassung nicht eindeutig ist, sondern darüber hinaus eine weitere zielführende Beschreibungen mittels einer Semilinearform  $\bar{\mathcal{A}}_h: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  und zugehörigen Teilräumen  $\bar{V}_h \subset V$  und  $\bar{W}_h \subset W$

existiert, so lässt sich jede dieser beiden Anpassungen als ein eigenständiges Modell interpretieren.

**Problemstellung 4.4.** *Finde  $u_{hm} \in \bar{V}_h \subset V$  mit*

$$\bar{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(\bar{\varphi}_h) = 0 \quad \forall \bar{\varphi}_h \in \bar{W}_h \subset W. \quad (4.9)$$

In Bezug auf die Lösung  $u_{hm}$  der durch die Semilinearform  $\bar{\mathcal{A}}_h$  gegebenen Problemstellung 4.4 stellt sich die Frage, inwieweit diese eine bessere Näherung an den Wert des Zielfunktional liefert als die Lösung  $u_h$  der Problemstellung 4.3. Eine Aussage darüber lässt sich anhand eines Vergleichs der jeweiligen Diskretisierungsfehler machen. Zudem liefert diese Betrachtung auf natürliche Weise die Definition des Modellfehlers.

**Definition 4.1** (Modellfehler). *Es sei  $u_h \in V_h$  eine Lösung von Problemstellung 4.3 und  $u_{hm} \in \bar{V}_h$  eine Lösung von Problemstellung 4.4. Dann ist im Kontext dieser Arbeit der Modellfehler  $E_M$  definiert durch*

$$E_M := [J(u) - J(u_{hm})] - [J(u) - J(u_h)] = J(u_h) - J(u_{hm}).$$

Der Modellfehler entspricht demnach der Differenz der durch die Betrachtung der Problemstellungen 4.3 und 4.4 entstehenden Diskretisierungsfehler bezüglich des Zielfunktional  $J$ .

## 4.2. Diskretisierungsfehlerschätzung

Für die Herleitung der Fehleridentität ist in der hier vorliegenden Situation zu beachten, dass die kontinuierliche und diskrete Lösung weiterhin als stationäre Punkte charakterisiert werden können, diese jedoch bezüglich unterschiedlicher Lagrangefunktionale stationär sind. Somit ist die in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Vorgehensweise nicht direkt anwendbar. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, wird zunächst ein Hilfsfunktional  $\delta L$  eingeführt, das die Differenz zwischen kontinuierlichem und diskretem Lagrangefunktional beschreibt. Es ist

$$\begin{aligned} \delta L(y) &:= L(y) - L_h(y) \\ &= J(\psi) - \mathcal{A}(\psi)(\varphi) - [J(\psi) - \mathcal{A}_h(\psi)(\varphi)] \\ &= \mathcal{A}_h(\psi)(\varphi) - \mathcal{A}(\psi)(\varphi) \end{aligned}$$

und damit eine Zerlegung von  $L$  der Form

$$L(y) = L_h(y) + \delta L(y) \quad (4.10)$$

gegeben, wobei zur besseren Lesbarkeit die abkürzenden Schreibweisen  $L(x) := \mathcal{L}(u, z)$  und  $L_h(x_h) := \mathcal{L}_h(u_h, z_h)$  für die Lagrangefunktionale,  $x := (u, z)$  und  $x_h := (u_h, z_h)$  für die zugehörigen stationären Punkte sowie  $y := (\psi, \varphi)$  und  $y_h := (\psi_h, \varphi_h)$  für die entsprechenden Variationen verwendet werden. Mit Hilfe der Zerlegung in Gleichung (4.10) ist es möglich, die aktuelle Situation so umzuformulieren, dass die Techniken der klassischen Herleitung wieder einsetzbar sind und die nachfolgende Fehleridentität nachgewiesen werden kann.

**Satz 4.1.** *Es seien  $J$  und  $\mathcal{A}$  dreimal,  $\mathcal{A}_h$  mindestens einmal richtungsdifferenzierbar bezüglich des kontinuierlichen Funktionenraumes der ersten Komponente, sowie  $u$  eine Lösung von Problemstellung 4.1 und  $u_h$  von Problemstellung 4.3. Dann gilt für den Fehler gemessen im Zielfunktional  $J$  die Identität*

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \frac{1}{2} \rho_h(u_h)(e_z) + \frac{1}{2} \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta \rho(u_h)(e_z) + \frac{1}{2} \Delta \rho^*(u_h, z_h)(e_u) \\ &\quad + \rho_h(u_h)(z_h) + \Delta \rho(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit

$$\rho_h(u_h)(\bullet) := -\mathcal{A}_h(u_h)(\bullet), \quad (4.12)$$

$$\rho_h^*(u_h, z_h)(\bullet) := J'(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}'_h(u_h)(\bullet, z_h), \quad (4.13)$$

$$\Delta \rho(u_h)(\bullet) := \mathcal{A}_h(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}(u_h)(\bullet), \quad (4.14)$$

$$\Delta \rho^*(u_h, z_h)(\bullet) := \mathcal{A}'_h(u_h)(\bullet, z_h) - \mathcal{A}'(u_h)(\bullet, z_h). \quad (4.15)$$

Das Restglied  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{(3)} &:= \frac{1}{2} \int_0^1 [J'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u) \\ &\quad - \mathcal{A}'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u, z_h + se_z) \\ &\quad - 3\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_z)] s(s-1) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$



und ist von dritter Ordnung in den Fehlern  $e_u$  und  $e_z$ .

Der Vergleich der klassische Fehleridentität in Gleichung (4.5) beziehungsweise (4.6) mit der hergeleiteten Version in Gleichung (4.11) zeigt, dass diese, neben dem primalen und dualen Residuum sowie dem numerischen Fehler – in der aktuellen Situation alle bezüglich der modifizierten diskreten Semilinearform definiert – aus weiteren Anteilen besteht. Die hinzugekommenen Terme  $\Delta\rho(u_h)(\bullet)$  und  $\Delta\rho^*(u_h, z_h)(\bullet)$  gewichtet mit kontinuierlichen Funktionen sind als Konsistenzfehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Problemstellung und der Term  $\Delta\rho(u_h)(z_h)$  als Maß für die Verletzung der Galerkinorthogonalität zu verstehen.

*Beweis.* Der Beweis beruht im Wesentlichen auf der Verwendung des Hilfsfunktionals  $\delta\mathbf{L}$ , mit dem die Differenz der Lösungen bezüglich des Zielfunktionals in eine Differenz des kontinuierlichen Lagrangefunktionals überführt und auf diese anschließend die klassische Vorgehensweise angewendet wird.

Mit Hilfe von Gleichung (4.1) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= J(u) - \mathcal{A}(u)(z) - [J(u_h) - \mathcal{A}_h(u_h)(z_h)] - \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) \\ &= \mathbf{L}(x) - \mathbf{L}_h(x_h) - \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) \\ &= \mathbf{L}(x) - \mathbf{L}(x_h) + \delta\mathbf{L}(x_h) - \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) \\ &= \int_0^1 \mathbf{L}'(x_h + se_x)(e_x) ds + \delta\mathbf{L}(x_h) - \mathcal{A}_h(u_h)(z_h). \end{aligned}$$

Die Definition von  $\delta\mathbf{L}$  und die Approximation des Integralterms mit der Trapezregel inklusive zugehörigem Restglied liefert

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \int_0^1 \mathbf{L}'(x_h + se_x)(e_x) ds + \Delta\rho(u_h)(z_h) + \rho_h(u_h)(z_h) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{L}'(x_h)(e_x) + \frac{1}{2}\mathbf{L}'(x)(e_x) + \mathcal{R}_h^{(3)} \\ &\quad + \Delta\rho(u_h)(z_h) + \rho_h(u_h)(z_h). \end{aligned}$$

Da  $x$  ein stationärer Punkt von  $\mathbf{L}$  ist, verschwindet der Term  $\mathbf{L}'(x)(e_x)$ . Weiter resultiert aus der Zerlegung von  $\mathbf{L}$  gemäß Gleichung (4.10) die

Identität

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}'(x_h)(e_x) &= \mathbf{L}'_h(x_h)(e_x) + \delta \mathbf{L}'(x_h)(e_x) \\
 &= (\mathcal{L}_h)'_{u_h}(u_h, z_h)(e_u) + (\mathcal{L}_h)'_{z_h}(u_h, z_h)(e_z) + \delta \mathbf{L}'(x_h)(e_x) \\
 &= J'(u_h)(e_u) - \mathcal{A}'_h(u_h)(e_u, z_h) - \mathcal{A}_h(u_h)(e_z) + \delta \mathbf{L}'(x_h)(e_x) \\
 &= \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \rho_h(u_h)(e_z) + \delta \mathbf{L}'(x_h)(e_x) \\
 &= \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \rho_h(u_h)(e_z) + \mathcal{A}_h(u_h)(e_z) - \mathcal{A}(u_h)(e_z) \\
 &\quad + \mathcal{A}'_h(u_h)(e_u, z_h) - \mathcal{A}'(u_h)(e_u, z_h) \\
 &= \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta \rho(u_h)(e_z) \\
 &\quad + \Delta \rho^*(u_h, z_h)(e_u).
 \end{aligned}$$

Abschließend ist noch die Darstellung des Restglieds zu zeigen. Die verwendete Trapezregel liefert

$$\mathcal{R}_h^{(3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{L}'''(x_h + se_x)(e_x, e_x, e_x) s(s-1) ds.$$

Für die dritte Variation von  $\mathbf{L}$  ergibt sich zunächst mit beliebigen Funktionen  $y_1 = (\psi_1, \varphi_1)$ ,  $y_2 = (\psi_2, \varphi_2)$ ,  $y_3 = (\psi_3, \varphi_3) \in V \times W$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}'''(y)(y_1, y_2, y_3) &= J'''(\psi)(\psi_1, \psi_2, \psi_3) - \mathcal{A}'''(\psi)(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi) \\
 &\quad - \mathcal{A}''(\psi)(\psi_1, \psi_2, \varphi_3) - \mathcal{A}''(\psi)(\psi_1, \psi_3, \varphi_2) \\
 &\quad - \mathcal{A}''(\psi)(\psi_1, \psi_3, \varphi_1).
 \end{aligned}$$

und für den Spezialfall

$$y_1 = y_2 = y_3 = e_x = (e_u, e_z), \quad y = x_h + se_x = (u_h + se_u, z_h + se_z)$$

die entsprechende Darstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}'''(x_h + se_x)(e_x, e_x, e_x) &= J'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u) \\
 &\quad - \mathcal{A}'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u, z_h + se_z) \\
 &\quad - 3\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_z)
 \end{aligned}$$

wie in Gleichung (4.16). □

Bei der Betrachtung der Definitionen des primalen und dualen Residuums sowie des primalen und dualen Zusatzterms in den Gleichungen (4.12) – (4.15) fällt auf, dass einige Terme der Fehleridentität in Gleichung (4.11) zusammengefasst werden können. Es ergibt sich

$$J(u) - J(u_h) = \frac{1}{2}\rho(u_h)(e_z) + \frac{1}{2}\rho^*(u_h, z_h)(e_u) + \rho(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)},$$

mit

$$\begin{aligned} \rho(u_h)(\bullet) &= \rho_h(u_h)(\bullet) + \Delta\rho(u_h)(\bullet) \\ &= -\mathcal{A}_h(u_h)(\bullet) + \mathcal{A}_h(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}(u_h)(\bullet) \\ &= -\mathcal{A}(u_h)(\bullet), \\ \rho^*(u_h, z_h)(\bullet) &= \rho_h^*(u_h, z_h)(\bullet) + \Delta\rho^*(u_h, z_h)(\bullet) \\ &= J'(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}'(u_h)(\bullet, z_h). \end{aligned}$$

Die so erhaltene Identität stellt alle Anteile analog zur klassischen Identität bezüglich der kontinuierlichen Semilinearform dar. Dies hat jedoch den Nachteil, dass die einzelnen Fehlerquellen nicht mehr präzise identifiziert werden können und alle Zusatzinformation hinsichtlich der diskreten Semilinearform verloren gehen. Insbesondere für die numerische Approximation der Fehleridentität ist die separate Behandlung der einzelnen Anteile von entscheidender Bedeutung, wie sich in den Anwendungen in Kapitel 5 herausstellt.

**Bemerkung 4.2.** *Unter der Annahme, dass  $u_h$  und  $z_h$  die Gleichung (4.7) beziehungsweise (4.8) numerisch exakt erfüllen, so gilt zusätzlich zu der Stationarität von  $\mathbb{L}$  in  $x = (u, z)$  auch die von  $\mathbb{L}_h$  in  $x_h = (u_h, z_h)$ , das heißt*

$$\mathbb{L}'_h(x_h)(y_h) = 0 \quad \forall y_h \in W_h, \quad (4.17)$$

und folglich ist

$$\mathbb{L}_h(x_h) = J(u_h). \quad (4.18)$$

Ferner gilt  $\rho_h(u_h)(\varphi_h) = 0$  und  $\rho_h^*(u_h, z_h)(\psi_h) = 0$  für alle  $\varphi_h \in W_h$  und  $\psi_h \in V_h$ . Somit reduziert sich Gleichung (4.11) auf

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \frac{1}{2}\rho_h(u_h)(z - \varphi_h) + \frac{1}{2}\rho_h^*(u_h, z_h)(u - \psi_h) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta\rho(u_h)(e_z) + \frac{1}{2}\Delta\rho^*(u_h, z_h)(e_u) \\ &\quad - \mathcal{A}(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}, \end{aligned}$$

für beliebige Funktionen  $\varphi_h \in W_h$  und  $\psi_h \in V_h$ .

Analog zu den Resultaten der klassischen DWR–Methodik lässt sich auch im Falle modifizierter diskreter Problemstellungen eine entsprechende Beziehung zwischen den beiden diskreten Residuen  $\rho_h$  und  $\rho_h^*$  nachweisen. Diese basiert wie im ursprünglichen Fall auf einem Linearisierungsfehler – vergleiche [7, Satz 6.6]. Darüber hinaus sind die in der Fehleridentität (4.11) auftretenden Zusatzterme ebenfalls zu berücksichtigen.

**Satz 4.3.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 gilt für das duale Residuum*

$$\begin{aligned} \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) &= \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta\rho(u_h)(e_z) \\ &\quad - \Delta\rho^*(u_h, z_h)(e_u) + \delta\rho, \end{aligned} \tag{4.19}$$

wobei der Linearisierungsfehler  $\delta\rho$  gegeben ist durch

$$\delta\rho := \int_0^1 [\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, z_h + se_z) - J''(u_h + se_u)(e_u, e_u)] ds.$$

Darüber ergibt sich eine rein primale Fehleridentität der Form

$$J(u) - J(u_h) = \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta\rho(u_h)(z) + \rho_h(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(2)} \tag{4.20}$$

mit

$$\Delta\rho(u_h)(z) = \mathcal{A}_h(u_h)(z) - \mathcal{A}(u_h)(z).$$

Das Restglied  $\mathcal{R}_h^{(2)}$  ist in diesem Fall von zweiter Ordnung im primalen Fehler  $e_u$  und definiert durch

$$\mathcal{R}_h^{(2)} := \int_0^1 [\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, z) - J''(u_h + se_u)(e_u, e_u)] s ds.$$

*Beweis.* In Anlehnung an den Beweis von [7, Satz 6.6] wird zunächst eine skalare Hilfsfunktion  $g$  eingeführt, die durch

$$g(s) := \mathcal{L}'_u(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u)$$

gegeben ist und aufgrund von Gleichung (4.3) die Eigenschaft

$$g(1) = \mathcal{L}'_u(u, z)(e_u) = 0$$

besitzt. Die Ableitung bezüglich der Variablen  $s$  lautet

$$g'(s) = \mathcal{L}''_{uu}(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u, e_u) + \mathcal{L}''_{uz}(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u, e_z).$$

Der sich anschließende Nachweis der Identität in Gleichung (4.19) verwendet die Definitionen des kontinuierlichen und diskreten Lagrangefunktionalen, die Zerlegungseigenschaft von  $\mathbf{L}$  gemäß Gleichung (4.10) und erneuert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) &= (\mathcal{L}_h)'_{u_h}(u_h, z_h)(e_u) \\ &= \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \\ &= g(0) - g(1) - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \\ &= - \int_0^1 g'(s) ds - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \\ &= - \int_0^1 \mathcal{L}''_{uu}(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u, e_u) ds \\ &\quad - \int_0^1 \mathcal{L}''_{uz}(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u, e_z) ds \\ &\quad - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^1 \mathcal{L}_{uu}''(u_h + se_u, z_h + se_z)(e_u, e_u) ds \\
 &\quad + \mathcal{L}'_z(u_h, z_h)(e_z) - \mathcal{L}'_z(u, z)(e_z) - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \\
 &= \int_0^1 [\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, z_h + se_z) \\
 &\quad - J''(u_h + se_u)(e_u, e_u)] ds + (\mathcal{L}_h)'_{z_h}(u_h, z_h)(e_z) \\
 &\quad + \delta \mathcal{L}'_z(u_h, z_h)(e_z) - \delta \mathcal{L}'_u(u_h, z_h)(e_u) \\
 &= \delta \rho + (\mathcal{L}_h)'_{z_h}(u_h, z_h)(e_z) + \mathcal{A}_h(u_h)(e_z) \\
 &\quad - \mathcal{A}(u_h)(e_z) - \mathcal{A}'_h(u_h)(e_u, z_h) + \mathcal{A}'(u_h)(e_u, z_h) \\
 &= \delta \rho + \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta \rho(u_h)(e_z) - \Delta \rho^*(u_h, z_h)(e_u).
 \end{aligned}$$

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der rein primalen Fehleridentität dient das Restglied zweiter Ordnung. Bei Berücksichtigung der Stationarität von  $\mathcal{L}$  in  $(u, z)$  ergibt sich mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_h^{(2)} &= \int_0^1 [\mathcal{A}''(u_h + se_u)(e_u, e_u, z) - J''(u_h + se_u)(e_u, e_u)] s ds \\
 &= - \int_0^1 \mathcal{L}_{uu}''(u_h + se_u, z)(e_u, e_u) s ds \\
 &= \int_0^1 \mathcal{L}'_u(u_h + se_u, z)(e_u) ds - [\mathcal{L}'_u(u_h + se_u, z)(e_u) s]_0^1 \\
 &= \mathcal{L}(u, z) - \mathcal{L}(u_h, z) - \mathcal{L}'_u(u, z)(e_u) \\
 &= J(u) - \mathcal{L}_h(u_h, z) - \delta \mathcal{L}(u_h, z) \\
 &= J(u) - J(u_h) + \mathcal{A}_h(u_h)(z) - \mathcal{A}_h(u_h)(z) + \mathcal{A}(u_h)(z) \\
 &= J(u) - J(u_h) - \rho_h(u_h)(e_z) - \rho_h(u_h)(z_h) - \Delta \rho(u_h)(z).
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.4.** *Es sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, dass die rein primale Fehleridentität (4.20) in Anlehnung an die Darstellung in Gleichung (4.11) ebenfalls geschrieben werden*

kann als

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta\rho(u_h)(e_z) \\ &\quad + \rho_h(u_h)(z_h) + \Delta\rho(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(2)}. \end{aligned}$$

Die zuvor hergeleiteten Resultate sind wie zu Beginn des Kapitels erwähnt auch für allgemeine, nichtlineare Problemstellungen und Zielfunktionale gültig. Durch die Einschränkung auf die im Rest dieser Arbeit betrachtete lineare Elastizitätstheorie ist auch die zugehörige Semilinearform affin-linear bezüglich des ersten Arguments, wodurch die Restglieder in den Fehleridentitäten der Sätze 4.1 und 4.3 nur noch vom Zielfunktional  $J$  abhängen.

**Bemerkung 4.5.** Falls die Semilinearform  $\mathcal{A}$  affin-linear und zusätzlich das Zielfunktional  $J$  linear ist, so gilt  $\mathcal{R}_h^{(2)} = \mathcal{R}_h^{(3)} = \delta\rho = 0$  und die Identität

$$\rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \Delta\rho^*(u_h, z_h)(e_u) = \rho_h(u_h)(e_z) + \Delta\rho(u_h)(e_z)$$

beschreibt die Beziehung zwischen primalem und dualem Residuum.

### 4.3. Modellfehlerschätzung

Im Anschluss an die Herleitung einer Fehleridentität für den Diskretisierungsfehler in Abschnitt 4.2, ist das Ziel dieses Abschnittes, eine entsprechende Identität für den in Definition 4.1 angegebenen Modellfehler zu entwickeln. Dazu wird die Problemstellung 4.4 und das Zielfunktional  $J$  ebenfalls zu einem trivialen Optimierungsproblem mit zugehörigem Lagrangefunktional

$$\bar{\mathcal{L}}_h(\bar{y}_h) = \bar{\mathcal{L}}_h(\bar{\psi}_h, \bar{\varphi}_h) := J(\bar{\psi}_h) - \bar{\mathcal{A}}_h(\bar{\psi}_h)(\bar{\varphi}_h)$$

kombiniert. Für einen stationären Punkt  $x_{hm} = (u_{hm}, z_{hm}) \in \bar{V}_h \times \bar{W}_h$  von  $\bar{\mathcal{L}}_h$  gelten die Beziehungen

$$\bar{\mathcal{L}}_h(x_{hm}) = J(u_{hm}), \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathcal{L}}_h'(x_{hm})(\bar{y}_h) = 0 \quad \forall \bar{y}_h \in \bar{V}_h \times \bar{W}_h. \quad (4.22)$$

Die Schwierigkeit bei der Herleitung der Modellfehleridentität ist erneut die Stationaritätsbedingung zu unterschiedlichen Lagrangefunktionalen. Daher wird auch hier ein Hilfsfunktional

$$\delta\mathbf{L}_h(y) := \mathbf{L}_h(y) - \bar{\mathbf{L}}_h(y) = \bar{\mathcal{A}}_h(\psi)(\varphi) - \mathcal{A}_h(\psi)(\varphi)$$

eingeführt, dass die Differenz zwischen beiden auftretenden Funktionalen beschreibt und eine Zerlegung der Form

$$\mathbf{L}_h(y) = \bar{\mathbf{L}}_h(y) + \delta\mathbf{L}_h(y) \quad (4.23)$$

ermöglicht. Für den Modellfehler ergibt sich somit folgende Identität:

**Satz 4.6.** *Es seien  $J$  und  $\mathcal{A}_h$  dreimal, sowie  $\bar{\mathcal{A}}_h$  mindestens einmal richtungsdifferenzierbar bezüglich des kontinuierlichen Funktionenraumes der ersten Komponente und  $x_h = (u_h, z_h) \in V_h \times W_h$  beziehungsweise  $x_{hm} = (u_{hm}, z_{hm}) \in \bar{V}_h \times \bar{W}_h$  ein stationärer Punkt von  $\mathbf{L}_h$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{L}}_h$ . Dann ist der Modellfehler gegeben durch*

$$\begin{aligned} E_M &= J(u_h) - J(u_{hm}) \\ &= \delta\mathbf{L}_h(x_{hm}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{L}'_h(x_h)(e_m) + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m) \\ &\quad + \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) - \bar{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \mathcal{R}_m^{(3)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit einem Restglied dritter Ordnung im Fehler  $e_m := x_h - x_{hm}$  der Form

$$\mathcal{R}_m^{(3)} := \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{L}_h'''(x_{hm} + se_m)(e_m, e_m, e_m) s(s-1) ds.$$

*Beweis.* Die Vorgehensweise ist identisch zu der im Beweis von Satz 4.1. Formal wird zunächst  $\mathbf{L}_h$  durch  $\bar{\mathbf{L}}_h$  sowie  $\mathbf{L}$  durch  $\mathbf{L}_h$  ersetzt. Unter Berücksichtigung der Zerlegung in Gleichung (4.24), des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Trapezregel ergibt sich dann

$$\begin{aligned} J(u_h) - J(u_{hm}) &= \mathbf{L}_h(x_h) - \mathbf{L}_h(x_{hm}) + \delta\mathbf{L}_h(x_{hm}) \\ &\quad + \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) - \bar{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(z_{hm}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \mathbf{L}'_h(x_h)(e_m) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) \\
 &\quad + \delta \mathbf{L}_h(x_{hm}) + \mathcal{A}_h(u_h)(z_h) - \bar{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \mathcal{R}_m^{(3)}.
 \end{aligned}$$

□

Im Gegensatz zum Beweis von Satz 4.1 verschwindet in der aktuellen Situation weder der Term  $\mathbf{L}'_h(x_h)(e_m)$  noch der Term  $\bar{\mathbf{L}}'_h(x_h)(e_m)$ , da einerseits die Stationaritätsbedingungen (4.17) und (4.22) nur näherungsweise erfüllt und andererseits – und das ist entscheidend – der Fehler  $e_m$  im Allgemeinen kein Element von  $V_h \times W_h$  beziehungsweise  $\bar{V}_h \times \bar{W}_h$  ist. Dies lässt darauf schließen, dass die einzelnen Bestandteile der Fehleridentität (4.24), für den hier betrachteten Modellfehler, stark von den jeweils vorliegenden diskreten Problemstellungen abhängen. Insbesondere die Beziehungen der einzelnen endlichdimensionalen Teilräume untereinander sind hierbei entscheidend und werden daher im Folgenden genauer untersucht.

**Korollar 4.7.** *Zusätzlich zu allen Voraussetzungen von Satz 4.6 seien die Gleichungen (4.17) und (4.22) numerisch exakt erfüllt. Dann reduziert sich die Modellfehleridentität für den Fall, dass*

$$\bar{V}_h \subset V_h \quad \text{und} \quad \bar{W}_h \subset W_h$$

beziehungsweise

$$V_h \subset \bar{V}_h \quad \text{und} \quad W_h \subset \bar{W}_h,$$

auf die Terme

$$\begin{aligned}
 J(u_h) - J(u_{hm}) &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 J(u_h) - J(u_{hm}) &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{L}'_h(x_h)(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

*Beweis.* Die erfüllten Stationaritätsbedingungen (4.17) und (4.22) implizieren die Gleichungen (4.7) und (4.9) sowie die Identitäten (4.18) und (4.21). Zusätzlich liefern die Teilraumbeziehungen der endlichdimensionalen Räume im einen Fall  $e_m \in V_h \times W_h$  und im anderen  $e_m \in \bar{V}_h \times \bar{W}_h$ , also  $\mathbf{L}'_h(x_h)(e_m) = 0$  beziehungsweise  $\bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m) = 0$ .  $\square$

Dass die in Korollar 4.7 geforderten Teilraumbeziehungen nicht nur von theoretischem Interesse sind, sondern auch in der Praxis häufig vorkommen, zeigen bereits die in Abschnitt 3.4 beschriebenen hybriden Netze. Hierbei sind die volumenartigen Schalenelemente offensichtlich ein Teilraum der verschiebungsbasierten trilinearen Volumenelemente. Darüber hinaus sind die Kombination von kontinuierlichen und nicht kontinuierlichen Galerkin-Verfahren, die Verwendung unterschiedlicher Polynomgrade der Ansatzfunktionen oder auch die Definition der Teilräume bezüglich verschiedener Verfeinerungsstufen der Triangulierung weitere Situationen, in denen eine der geforderten Konstellationen erfüllt ist.

Für den Spezialfall, dass sich die verschiedenen Modelle nur durch die Semilinearformen, nicht aber durch die endlichdimensionalen Teilräume unterscheiden, lässt sich die Modellfehleridentität nochmals vereinfachen.

**Korollar 4.8.** *Neben den Voraussetzungen von Korollar 4.7 gelte*

$$\bar{V}_h = V_h \quad \text{und} \quad \bar{W}_h = W_h.$$

*Dann reduziert sich die Modellfehleridentität (4.24) auf*

$$J(u_h) - J(u_{hm}) = -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)}. \quad (4.27)$$

**Bemerkung 4.9.** *Die Modellfehleridentität (4.26) hängt im Gegensatz zu den Identitäten (4.25) und (4.27) sowohl von  $x_{hm}$  als auch von  $x_h$  ab. Bei der Verwendung modelladaptiver Algorithmen steht für gewöhnlich nur  $x_{hm}$  zur Verfügung, sodass die in Gleichung (4.26) dargestellte Fehleridentität eher ungeeignet ist. Die explizite Abhängigkeit von  $x_h$  kann jedoch vermieden werden, indem anstelle auf die Trapezregel zur Approximation des Integrals auf die Rechteckregel zurückgegriffen wird. Dies*

liefert dann die Identität

$$J(u_h) - J(u_{hm}) = -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \delta \mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(2)}. \quad (4.28)$$

Die geringere Approximationsgüte der Rechteckregel wirkt sich auch auf das Restglied

$$\mathcal{R}_m^{(2)} := \int_0^1 \mathbf{L}''_h(x_{hm} + se_m)(e_m, e_m) s \, ds$$

der Fehleridentität (4.28) aus. Anstelle von dritter Ordnung, ist das resultierende Restglied  $\mathcal{R}_m^{(2)}$  nur von zweiter Ordnung im Fehler  $e_m$ . Dies muss insbesondere bei der im nachfolgenden Abschnitt 4.4 beschriebenen Approximation der Fehleridentitäten berücksichtigt werden.

Auch die in diesem Abschnitt hergeleiteten Fehleridentitäten sind für allgemeine, nichtlineare Problemstellungen gültig. Im Rahmen der linearen Elastizität, vereinfachen sich die Darstellungen und Abhängigkeiten der Restglieder erneut.

**Bemerkung 4.10.** Für affin-lineare Semilinearformen hängen die Restglieder  $\mathcal{R}_m^{(3)}$  und  $\mathcal{R}_m^{(2)}$  nur vom betrachteten Zielfunktional  $J$  ab. Ist dieses zusätzlich linear, so ist  $\mathcal{R}_m^{(3)} = \mathcal{R}_m^{(2)} = 0$ .

## 4.4. Numerische Approximation und Fehlerlokalisierung

Die zuvor hergeleiteten Fehleridentitäten für den Modell- und Diskretisierungsfehler sind aus praktischen Gründen für die a posteriori Fehlerschätzung nicht geeignet, da sie von unbekanntem Größen wie beispielsweise der kontinuierlichen primalen und dualen Lösung abhängen und somit nicht auswertbar sind. Um dennoch einen numerisch berechenbaren Fehlerschätzer zu erhalten, werden anstelle der Fehleridentitäten geeignete Näherungen verwendet, die auf guten Approximationen der unbekanntem Größen und der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung basieren.

Im Hinblick auf die Verwendung von adaptiven Algorithmen ist neben der globalen Fehlerschätzung auch die lokale Fehlerverteilung von ent-

scheidender Bedeutung. Sie indiziert die Bereiche, in denen eine lokale Anpassung der diskreten Problemstellung zu einer deutlichen Reduzierung des Fehlers bezüglich des Zielfunktional führt. Die benötigte Fehlerverteilung wird mit Hilfe von Lokalisierungstechniken bestimmt, von denen einige in Abschnitt 4.4.2 beschrieben werden.

#### 4.4.1. Numerische Approximation

Die numerische Approximation der Modell- und Diskretisierungsfehleridentität erfolgt separat, da die unterschiedlichen Voraussetzungen in den jeweiligen Situationen eine entsprechend angepasste Vorgehensweise erfordert.

**Diskretisierungsfehlerschätzer** In der Fehleridentität (4.11) tauchen neben den bekannten diskreten Größen  $u_h$  und  $z_h$  die unbekanntes kontinuierlichen Größen  $u$  und  $z$  auf, die für eine numerische Auswertung approximiert werden müssen. Dabei ist es entscheidend, dass die resultierende Approximation die kontinuierliche Lösung besser annähert, als die bereits berechnete diskrete Lösung. Dies wird beispielsweise durch eine erneute Finite Elemente Rechnung unter Verwendung von Ansatzfunktionen höheren Polynomgrads erreicht. Der dadurch entstehende Mehraufwand ist jedoch enorm, da zum einen eine erneute vollständige Assemblierung notwendig ist und zum anderen die Dimensionen des Gleichungssystems deutlich anwachsen. Neben der hieraus resultierenden schlechteren Konditionierung und den längeren Lösungszeiten ist unter Umständen auch mit Speicherproblematiken zu rechnen. Zudem stellt sich berechtigterweise die Frage, warum für die Auswertung der Fehlerschätzung mehr Aufwand betrieben werden soll, als für das Lösen der eigentlichen diskreten Problemstellung.

Alternativ lassen sich Approximationen der kontinuierlichen Größen mit Hilfe von Rekonstruktionstechniken basierend auf Superkonvergenzeigenschaften gewinnen - vergleiche [7] oder [11]. Diese haben den Vorteil, dass die Konstruktion nur auf den bereits vorhandenen Informationen der diskreten Lösungen beruht und somit kein zusätzliches Gleichungssystem assembliert und gelöst werden muss. Je nach Rekonstruktionstechnik können aber zusätzliche Voraussetzungen wie beispielsweise eine

Patchstruktur der vorhandenen Triangulierung nötig sein, die unter Umständen zu einer größeren Gesamtanzahl von Elementen führt, als für die optimale Konvergenz erforderlich. Dennoch ist der daraus resultierende numerische Aufwand im Vergleich zum zuvor präsentierten Ansatz deutlich geringer.

Die Verwendung von Rekonstruktionstechniken ist aufgrund der besseren Effizienz stark verbreitet und wird auch in dieser Arbeit standardmäßig genutzt. Da die explizite Beschreibung in vielen Fällen von der konkret betrachteten Problemstellung abhängt, wird für eine allgemeine Darstellung der Approximation stellvertretend der Operator  $\Pi$  eingeführt. Das Einschleiben der Rekonstruktionen von  $u$  und  $z$  in die Fehleridentität (4.11) liefert

$$J(u) - J(u_h) = \eta_h + \eta^\Pi + \mathcal{R}_h^{(3)}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_h := & \frac{1}{2} \rho_h(u_h) (\Pi(z) - z_h) + \frac{1}{2} \rho_h^*(u_h, z_h) (\Pi(u) - u_h) \\ & + \frac{1}{2} \Delta \rho(u_h) (\Pi(z) - z_h) + \frac{1}{2} \Delta \rho^*(u_h, z_h) (\Pi(u) - u_h) \\ & + \rho_h(u_h)(z_h) + \Delta \rho(u_h)(z_h) \end{aligned} \quad (4.29)$$

und

$$\begin{aligned} \eta^\Pi := & \frac{1}{2} \rho_h(u_h) (z - \Pi(z)) + \frac{1}{2} \rho_h^*(u_h, z_h) (u - \Pi(u)) \\ & + \frac{1}{2} \Delta \rho(u_h) (z - \Pi(z)) + \frac{1}{2} \Delta \rho^*(u_h, z_h) (u - \Pi(u)). \end{aligned}$$

Der Term  $\eta_h$  enthält nur noch bekannte Größen und kann damit numerisch ausgewertet werden. Unter der Voraussetzung, dass die Rekonstruktion  $\Pi$  so gewählt ist, dass sie asymptotisch gesehen mit zunehmender Verfeinerung deutlich schneller gegen die entsprechende kontinuierliche Größe strebt, ist ein ähnliches Verhalten auch für die zugehörigen Anteile der Fehleridentität zu erwarten. Das heißt der Term  $\eta^\Pi$  strebt schneller gegen Null als  $\eta_h$  und ist somit potentiell für die Fehlerschätzung als Term höherer Ordnung vernachlässigbar. Bezüglich des Restglieds  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  ergibt

sich zunächst die rein formale Abschätzung mit  $\mathbf{X} := V \times W$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{(3)} &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \mathbf{L}'''(x_h + se_x)(e_x, e_x, e_x) s(s-1) \right| ds \\ &\leq \frac{1}{12} \sup_{s \in [0,1]} \|\mathbf{L}'''(x_h + se_x)\| \|e_x\|_{\mathbf{X}}^3. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die auftretende Operatornorm  $\|\bullet\|$  sei dabei, im Hinblick auf die Verwendung bezüglich weiterer Operatoren und Räume, allgemein für einen linearen Operator  $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  zwischen zwei Banachräumen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  definiert durch

$$\|T\| := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{\|T(\mathbf{x})\|_{\mathcal{Y}}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}}}. \quad (4.31)$$

In der konkreten Situation von Ungleichung (4.30) entspricht dies

$$\|\mathbf{L}'''(y)\| = \sup_{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X} \setminus \{0,0,0\}} \frac{|\mathbf{L}'''(y)(y_1, y_2, y_3)|}{\|(y_1, y_2, y_3)\|_{\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X}}}$$

für ein beliebiges, aber fest gewähltes  $y \in \mathbf{X}$ . Die Identifizierung der weiteren Normen erschließt sich dann aus dem jeweiligen Kontext.

Um eine Aussage über den Einfluss des Restgliedes auf die Fehleridentität zu machen, muss die Operatornorm von  $\mathbf{L}'''(y)$  in irgendeiner Form kontrollierbar sein. Wird vorausgesetzt, dass  $\|\mathbf{L}'''(y)\| \leq C_{\mathbf{L}'''}$  für alle  $y \in \mathbf{X}$  mit einer von der Diskretisierung unabhängigen Konstanten  $C_{\mathbf{L}'''} > 0$  erfüllt ist, so gilt  $\mathcal{R}_h^{(3)} = O(\|e_x\|_{\mathbf{X}}^3)$  und das Restglied kann ebenfalls als ein Term von höherer Ordnung angesehen werden. In diesem Fall lässt sich die Fehleridentität auch schreiben als

$$J(u) - J(u_h) = \eta_h + \eta^{\text{THO}},$$

wobei mit  $\eta^{\text{THO}} := \eta^{\text{II}} + \mathcal{R}_h^{(3)}$  alle Terme höherer Ordnung zusammengefasst werden. Der numerisch auswertbare Fehlerschätzer  $\eta_h$  ergibt sich schließlich durch die Vernachlässigung von  $\eta^{\text{THO}}$ , das heißt

$$J(u) - J(u_h) \approx \eta_h.$$

Die Identität (4.20) liefert entsprechend den rein primalen Fehlerschätzer. Es ist

$$J(u) - J(u_h) \approx \eta_h^{\text{pr}}$$

mit

$$\eta_h^{\text{pr}} := \rho_h(u_h) (\Pi(z) - z_h) + \Delta\rho(u_h) (\Pi(z)) + \rho_h(u_h)(z_h). \quad (4.32)$$

**Modellfehlerschätzer** Bei der Entwicklung des Fehlerschätzers für den Diskretisierungsfehler konnte mit Hilfe einer Approximation höherer Ordnung an die vorhandenen kontinuierlichen Größen eine numerisch auswertbare Näherung abgeleitet werden. Im Hinblick auf die in Satz 4.6 hergeleitete Modellfehleridentität wird deutlich, dass für eine analoge Vorgehensweise eine Approximation höherer Ordnung an die Lösung des zweiten Modells benötigt wird. Da im Allgemeinen nicht klar ist, wie eine entsprechende Realisierung aussehen könnte, ist die Identifizierung von Termen höherer Ordnung, die für eine Approximation der Fehleridentität vernachlässigt werden können, der vielversprechendere Ansatz. Hierzu bedarf es allerdings weiterer Annahmen an die betrachteten Modelle und die zugehörigen Lagrangefunktionale.

Unter der Voraussetzung, dass der durch das diskrete Lagrangefunktional  $L_h$  definierte Operator  $L'_h : V \times W \rightarrow (V \times W)'$  eine Stabilitätseigenschaft der Form

$$\|y_1 - y_2\|_{\mathbf{X}} \leq C_s \|\|L'_h(y_1) - L'_h(y_2)\|\| \quad (4.33)$$

für alle  $y_1, y_2 \in \mathbf{X}_h := (V_h \times W_h) \cup (\bar{V}_h \times \bar{W}_h)$  und für eine Konstante  $C_s > 0$  erfüllt, lassen sich jedoch vernachlässigbare Terme identifizieren. Dabei wird ausgenutzt, dass der Modellfehler  $e_m$  mittels Ungleichung (4.33) abgeschätzt werden kann durch

$$\begin{aligned} \|e_m\|_{\mathbf{X}} &= \|x_h - x_{hm}\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C_s \|\|L'_h(x_h) - L'_h(x_{hm})\|\| \\ &\leq C_s \left( \|\|L'_h(x_h)\|\| + \|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\| + \|\|\delta L'_h(x_{hm})\|\| \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Für die Modellfehleridentität (4.24) ergibt sich unter Verwendung der Ungleichung (4.34)

$$\begin{aligned}
 & |J(u_h) - J(u_{hm})| \\
 & \leq |\delta L_h(x_{hm})| + \frac{1}{2} \left( \|\|L'_h(x_h)\|\| + \|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\| \right. \\
 & \quad \left. + \|\|\delta L'_h(x_{hm})\|\| \right) \|e_m\|_{\mathcal{X}} + |\mathcal{R}_m^{(3)}| \\
 & \leq |\delta L_h(x_{hm})| \\
 & \quad + \frac{1}{2} C_s \left( \|\|L'_h(x_h)\|\| + \|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\| + \|\|\delta L'_h(x_{hm})\|\| \right)^2 \\
 & \quad + |\mathcal{R}_m^{(3)}|.
 \end{aligned}$$

Ist auch die Operatornorm von  $L_h'''(y)$ , analog zur Betrachtung des Restgliedes  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  im Kontext des Diskretisierungsfehlers, abschätzbar durch  $\|\|L_h'''(y)\|\| \leq C_{L_h''}$  für alle  $y \in \mathcal{X}_h$ , so verhält sich das Restglied  $\mathcal{R}_m^{(3)}$  gemäß Ungleichung (4.30) wie  $\mathcal{R}_m^{(3)} = O(\|e_m\|_{\mathcal{X}}^3)$ . Damit liefert die erneute Anwendung der Ungleichung (4.34)

$$\begin{aligned}
 & |J(u_h) - J(u_{hm})| \\
 & \leq |\delta L_h(x_{hm})| \\
 & \quad + \frac{1}{2} C_s \left( \|\|L'_h(x_h)\|\| + \|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\| + \|\|\delta L'_h(x_{hm})\|\| \right)^2 \\
 & \quad + \frac{1}{12} C_{L_h''} C_s^3 \left( \|\|L'_h(x_h)\|\| + \|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\| + \|\|\delta L'_h(x_{hm})\|\| \right)^3.
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sind weitere a priori Aussagen über die auftretenden Operatornormen der unterschiedlichen Lagrangefunktionale und deren Ableitungen notwendig. Im Idealfall verschwinden die Anteile  $\|\|L'_h(x_h)\|\|$  und  $\|\|\bar{L}'_h(x_{hm})\|\|$  aufgrund der Stationaritätsbedingungen (4.17) und (4.22). Dies hängt jedoch insbesondere von den Konstellationen der betrachteten diskreten Teilräume ab – vergleiche Korollar 4.7 beziehungsweise 4.8. Sind die Bedingungen (4.17) und (4.22) nicht erfüllt, so ist eine entsprechende Untersuchung für die konkret betrachtete Problemstellung nötig. Eine allgemeine Aussage kann in diesem Fall nicht getroffen werden.

Der Anteil bezüglich  $\delta L_h$  beschreibt den Unterschied der beiden betrachteten Semilinearformen  $\mathcal{A}_h$  und  $\bar{\mathcal{A}}_h$ . Für eine hinreichend feine Dis-



kreisierung ist davon auszugehen, dass diese Differenz und auch die der ersten Variation  $\delta L'_h$  entsprechend klein ist, das heißt eine Konstante  $0 < C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h) \ll 1$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} |\delta L_h(x_{hm})| &= |\overline{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(z_{hm}) - \mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm})| \\ &\leq \|\overline{\mathcal{A}}_h(u_{hm}) - \mathcal{A}_h(u_{hm})\| \|(0, z_{hm})\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h) \|x_{hm}\|_{\mathcal{X}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

und

$$\|\delta L'_h(x_{hm})\| \leq C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h) \|x_{hm}\|_{\mathcal{X}} \quad (4.36)$$

gilt. In der speziellen Ausgangssituation von Korollar 4.8 kann der Modellfehler mit Hilfe der Ungleichungen (4.35) und (4.36) weiter abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} |J(u_h) - J(u_{hm})| &\leq C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h) \|x_{hm}\|_{\mathcal{X}} + \frac{1}{2} C_s C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h)^2 \|x_{hm}\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} C_{L_h}''' C_s^3 C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h)^3 \|x_{hm}\|_{\mathcal{X}}^3. \end{aligned}$$

Ausgehend von dieser Abschätzung, lässt sich schlussendlich eine numerisch auswertbare Approximation der Modellfehleridentität durch die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung bezüglich der Konstanten  $C(\mathcal{A}_h, \overline{\mathcal{A}}_h)$  der Form

$$J(u_h) - J(u_{hm}) \approx \eta_m := \delta L_h(x_{hm}) = -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) \quad (4.37)$$

ableiten.

Die vorausgegangen Überlegungen haben deutlich gezeigt, dass die Modellfehlerschätzung signifikant sowohl von der aktuell betrachteten kontinuierlichen Problemstellung, als auch von den jeweils gewählten diskreten Modellen abhängt. Dies erfordert explizite Untersuchungen der jeweiligen konkreten Anwendungssituation und erlaubt somit keine allgemein gültigen Aussagen.

### 4.4.2. Fehlerlokalisierung

Die in Abschnitt 4.4.1 entwickelten numerisch auswertbaren Approximationen der Fehleridentitäten ermöglichen eine quantitative Schätzung des Fehlers. Für die Verwendung von adaptiven Algorithmen ist neben dem globalen Fehlerwert auch die zugehörige Fehlerverteilung innerhalb des betrachteten Gebiets entscheidend, da anhand dieser die adaptive, lokale Anpassung der diskreten Problemstellung durchgeführt wird. Die benötigte Fehlerverteilung kann mit Hilfe von Fehlerindikatoren beschrieben werden, die sich durch eine Lokalisierung des bis dato global geschätzten Fehlers auf die einzelnen Elemente der Triangulierung ergeben. Eine erste, intuitive Herangehensweise zur Umsetzung der Lokalisierung ist die elementweise Auswertung der Fehlerschätzer aus den Gleichungen (4.29), (4.32) und (4.37), die jedoch, aufgrund der isolierten Betrachtungsweise und der Vernachlässigung von eventuellen Einflüssen der jeweiligen Nachbarelemente, zu stark oszillierenden Elementfehlerindikatoren führt. Um dies zu vermeiden, muss also bei der Bestimmung der Indikatoren ein Austausch mit der Elementumgebung stattfinden. Die standardmäßig verwendeten Techniken, wie beispielsweise die Lokalisierung mittels elementweiser partieller Integration, die sogenannte Filterungstechnik oder die variationelle Lokalisierungsmethode unter Verwendung einer Zerlegung der Eins, realisieren diesen Austausch auf unterschiedliche Art und Weise.

Bei Lokalisierung mittels partieller Integration erfolgt die Berücksichtigung der Elementumgebung durch die Betrachtung der Sprungterme auf den inneren Kanten der Triangulierung. Diese entstehen durch die partielle Integration der schwachen Formulierung auf Elementebene – vergleiche [11]. Dabei ist die Tatsache, dass die verwendeten Finite Elemente Funktionen stückweise polynomial und somit unendlich differenzierbar sind, entscheidend. Der Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass zur numerischen Auswertung des Fehlerschätzers auch die starke Form des Differentialoperators ausgewertet werden muss. Dies ist insbesondere bei nichtlinearen Problemen oder auch bei komplizierten Differentialoperatoren mit großem Aufwand verbunden oder mitunter gar unmöglich.

Im Gegensatz dazu basiert die in [22] beschriebene Filterungstechnik auf der schwachen Formulierung. Die Lokalisierung erfolgt in diesem Fall

nicht direkt auf die einzelnen Elemente, sondern zunächst auf die Knoten der Triangulierung. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass eine Bündelung der Fehlerinformationen der an einen Knoten angrenzenden Elemente statt findet, bevor zur Bestimmung der Elementfehlerindikatoren der resultierende Wert auf die zugehörigen Elemente anteilmäßig verteilt wird. Dies garantiert den gewünschten Austausch mit der Umgebung des jeweiligen Elements. Durch die vorherige Filterung der Gewichtsfunktion werden zudem die oszillierenden Anteile eliminiert. Der hier erwähnte Filterungsoperator setzt erneut eine Patchstruktur der zugrunde liegenden Triangulierung voraus, die aber je nach Approximation höherer Ordnung der kontinuierlichen Größen bereits vorhanden ist. Nicht genauer spezifiziert ist dagegen die Anwendung bei vektorwertigen Problemstellungen. Insbesondere die Bestimmung der elementweisen Fehlerindikatoren aus den lokalisierten Knotenwerten ist auf unterschiedliche Art und Weise möglich.

Analog zur Filterung basiert auch die variationelle Lokalisierung auf der schwachen Formulierung der Problemstellung – vergleiche [77]. Die Idee ist hierbei, die auftretenden Gewichtsfunktionen mit Hilfe einer Zerlegung der Eins so aufzuspalten, dass die Betrachtung der einzelnen Komponenten die gewünschte Fehlerverteilung liefert. Für die benötigte Konstruktion einer Zerlegung der Eins kann auf skalare  $d$ -lineare Lagrange-Elemente bezüglich der Knoten der Triangulierung zurückgegriffen werden. Dies führt erneut auf eine Knotenlokalisierung, die jedoch anders als bei der Filterungstechnik auch für vektorwertige Problemstellungen nur einen skalaren Wert liefert. Die Fehlerindikatoren bestimmen sich dann durch die Addition der zum aktuell betrachteten Element gehörenden Knotenwerte.



## Kapitel 5.

# Anwendungsbeispiel I: Selektiv reduzierte Integration

Das Ziel ist es, die in Kapitel 4 hergeleiteten theoretischen Ergebnisse auf ihre Funktionalität und Anwendbarkeit zu überprüfen. Hierzu wird in einem ersten Schritt die Problemstellung der linearen Elastizität für beinahe inkompressible Materialien und die in diesem Zusammenhang häufig verwendete selektiv reduzierte Integration (SRI) als vereinfachtes, repräsentatives Modellproblem betrachtet.

Nach der Identifizierung der einzelnen Terme des in Abschnitt 4.2 entwickelten Fehlerschätzers, wird anhand eines Beispiels mit glatter  $C^\infty$ -Lösung und moderater Querkontraktion  $\nu = 0.25$  verdeutlicht, dass die auftretenden Zusatzterme nicht nur von theoretischem Interesse, sondern für eine genaue Fehlerschätzung notwendig sind.

Für den beinahe inkompressiblen Fall, das heißt  $\Delta\nu = 0.5 - \nu \leq 10^{-5}$ , stellt sich jedoch heraus, dass diese Genauigkeit verloren geht und der Fehler deutlich überschätzt wird. Durch die Betrachtung der äquivalenten gemischten Formulierung ist es möglich eine entsprechende Modifikation für die Zusatzterme abzuleiten, sodass diese Problematik behoben werden kann.

Abschließend wird der Fall der Modelladaptivität auf der Basis von selektiv reduzierter und voll integrierter Bilinearform betrachtet, wobei eine Lokalisierung des inkompressiblen Materialverhaltens auf ein ausgewähltes Teilgebiet zugrunde liegt. Es ist offensichtlich, dass diese Art von Modellwahl in keinsten Weise zu einer Reduktion des Aufwandes beiträgt. Auch hier steht erneut die Demonstration der Funktionalität im Vordergrund.

## 5.1. Diskretisierungsfehlerschätzung

Im hier betrachteten Anwendungsbeispiel erfolgt die Einschränkung auf den Fall der linearen Elastizität unter Annahme des in Abschnitt 2.2 eingeführten ebenen Verzerrungszustandes. Dies führt auf ein zweidimensionales Problem auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit der Semilinearform

$$\mathcal{A}(\psi)(\varphi) = a(\psi, \varphi) - l(\varphi), \quad (5.1)$$

$$a(\psi, \varphi) = \left( \mathbb{C}_{\text{EVZ}} : (\mathbf{D}\psi)^{\text{dev}}, (\mathbf{D}\varphi)^{\text{dev}} \right)_0 + (\mathbf{P}(\psi), \mathbf{P}(\varphi))_{K^{-1}}, \quad (5.2)$$

$$l(\varphi) = (f, \varphi)_0 + (f_N, \gamma(\varphi))_{\Gamma_N}, \quad (5.3)$$

wobei die in Abschnitt 3.2 angegebene äquivalente Darstellung für die Bilinearform  $a$  verwendet wird. Da homogene Dirichletrandbedingungen vorausgesetzt werden, gilt die Gleichheit der Räume  $V$  und  $W$ , das heißt  $V = W = \{\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \gamma(\varphi) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$ .

### 5.1.1. Fehleridentität

Die diskrete Problemstellung wird durch die Verwendung der selektiv reduzierten Integration definiert. Dabei ist die modifizierte diskrete Bilinearform  $a_h$  gegeben durch

$$a_h(\psi_h, \varphi_h) = \left( \mathbb{C}_{\text{EVZ}} : (\mathbf{D}\psi_h)^{\text{dev}}, (\mathbf{D}\varphi_h)^{\text{dev}} \right)_0 + (\mathbf{P}_h(\psi_h), \mathbf{P}_h(\varphi_h))_{K^{-1}}.$$

Die zugehörigen endlichdimensionalen Teilräume sind zum einen für die Verschiebung

$$V_h = \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}$$

und zum anderen für den mechanischen Druck

$$M_h = \left\{ \xi_h \in M = L^2(\Omega) \mid \xi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\xi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\xi}_h \in Q_0(\widehat{\mathcal{K}}), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Definitionsgleichung (3.8) des Operators  $\mathbf{P}_h$  im Wesentlichen der  $L^2$ -Projektion der Divergenz von  $\psi \in V$  auf  $M_h$  entspricht, gilt zum einen  $a_h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und zum anderen ist

$a_h$  richtungsdifferenzierbar bezüglich der ersten Komponenten. Somit ist Satz 4.1 anwendbar und liefert eine Identität für den Diskretisierungsfehler gemessen bezüglich eines benutzerdefinierten Zielfunktional der Form

$$\begin{aligned} & J(u) - J(u_h) \\ &= \frac{1}{2} [\rho_h(u_h)(e_z) + \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \Delta\rho(u_h)(e_z) + \Delta\rho^*(u_h, z_h)(e_u)] \\ &\quad + \rho_h(u_h)(z_h) + \Delta\rho(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}. \end{aligned}$$

Dabei sind die einzelnen Fehleranteile gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_h(u_h)(\bullet) &= -\mathcal{A}_h(u_h)(\bullet) = l(\bullet) - a_h(u_h, \bullet), \\ \rho_h^*(u_h, z_h)(\bullet) &= J'(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}'_h(u_h)(\bullet, z_h) = J'(u_h)(\bullet) - a_h(\bullet, z_h), \\ \Delta\rho(u_h)(\bullet) &= \mathcal{A}_h(u_h)(\bullet) - \mathcal{A}(u_h)(\bullet) \\ &= (\mathbb{P}_h(u_h), \mathbb{P}_h(\bullet))_{K^{-1}} - (\mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}(\bullet))_{K^{-1}} \\ &= (\mathbb{P}_h(u_h), \mathbb{P}(\bullet))_{K^{-1}} - (\mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}(\bullet))_{K^{-1}} \\ &= (\mathbb{P}_h(u_h) - \mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}(\bullet))_{K^{-1}} \\ &= -(\mathbb{P}_h(u_h) + K \operatorname{div}(u_h), \operatorname{div}(\bullet))_0, \\ \Delta\rho^*(u_h, z_h)(\bullet) &= \mathcal{A}'_h(u_h)(\bullet, z_h) - \mathcal{A}'(u_h)(\bullet, z_h) \\ &= (\mathbb{P}(\bullet), \mathbb{P}_h(z_h) - \mathbb{P}(z_h))_{K^{-1}} \\ &= -(\operatorname{div}(\bullet), \mathbb{P}_h(z_h) + K \operatorname{div}(z_h))_0. \end{aligned}$$

Einfaches Umformen liefert zudem

$$\begin{aligned} \Delta\rho(u_h)(z_h) &= \frac{1}{2} [(\mathbb{P}_h(u_h), \mathbb{P}(z_h))_{K^{-1}} - (\mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}(z_h))_{K^{-1}}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}_h(z_h))_{K^{-1}} - (\mathbb{P}(u_h), \mathbb{P}(z_h))_{K^{-1}}] \\ &= \frac{1}{2} \Delta\rho(u_h)(z_h) + \frac{1}{2} \Delta\rho^*(u_h, z_h)(u_h) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 & J(u) - J(u_h) \\
 &= \frac{1}{2} [\rho_h(u_h)(e_z) + \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \Delta\rho(u_h)(z) + \Delta\rho^*(u_h, z_h)(u)] \\
 &\quad + \rho_h(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Das Restglied hängt wie bereits erwähnt aufgrund der affin-linearen Abhängigkeit im ersten Argument nur vom Zielfunktional  $J$  ab, das heißt

$$\mathcal{R}_h^{(3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 J'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u) s(s-1) ds$$

und verschwindet für lineare oder quadratische Größen in  $u$  vollständig.

### 5.1.2. Numerische Approximation

Die numerische Auswertung der Fehleridentität in Gleichung (5.4) erfolgt analog zu Abschnitt 4.4.1. Neben der Vernachlässigung des Restgliedes ist die explizite Angabe des Operators  $\Pi$  entscheidend. Hierzu wird nachfolgend auf die Verwendung von Rekonstruktionstechniken, genauer auf die Herleitung von Approximationen höherer Ordnung mittels Patchinterpolation, zurückgegriffen. Die Definition eines Patches  $\mathcal{P}$  beinhaltet in diesem Kontext die Vereinigung von Elementen der Triangulierung  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^{(k)}$ , sodass ein Element  $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_{2h} = \mathcal{T}_h^{(k-1)}$  existiert mit  $\mathcal{K} = \mathcal{P}$ . Der Index  $k = 1, \dots, n_{\text{ref}}$  beschreibt das jeweilige Verfeinerungslevel. Dies bedeutet insbesondere für die hier betrachtete Triangulierung des zweidimensionalen Gebietes mittels Viereckselementen, dass das Zusammenfassen von jeweils vier Elementen der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  zu einem Patchelement aus  $\mathcal{T}_{2h}$  möglich sein muss. Weiter ist sicherzustellen, dass diese Eigenschaft auch nach der Verfeinerung vorhanden ist. Es ist also darauf zu achten, dass, falls ein Element des Patches zur Verfeinerung ausgewählt wird, dies auch für alle anderen Elemente dieses Patches geschieht, um so die Patchstruktur zu erhalten. Hieraus resultiert unter Umständen eine größere Anzahl an Elementen, als für die optimale Konvergenz notwendig ist.



Für den Operator  $\Pi$  ist aufgrund der bilinearen Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld die Verwendung einer biquadratischen Patchinterpolierenden  $\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h} : V_h \rightarrow V_{2h}^{(2)}$  mit

$$V_{2h}^{(2)} = \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_2(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_{2h} \right\}$$

naheliegend. Dieser Ansatz ist ebenfalls für Basisfunktionen mit höherem Polynomgrad  $r > 1$  möglich und liefert dann eine Patchinterpolierende vom Grad  $2r$ . Für den Diskretisierungsfehlerschätzer ergibt sich hier mit  $\Pi = \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}$  und der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \eta_h = \frac{1}{2} & \left[ \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) + \rho_h^*(u_h, z_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(u_h) - u_h \right) \right. \\ & \left. + \Delta\rho(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) \right) + \Delta\rho^*(u_h, z_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(u_h) \right) \right] \\ & + \rho_h(u_h)(z_h). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nachfolgend wird auf die technischen Details im Hinblick auf die implementatorische Umsetzung zur Auswertung von  $\eta_h$  genauer eingegangen. Dabei sei zur Reduktion der Komplexität vorausgesetzt, dass die aktuelle Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  keine hängenden Knoten besitzt und die Funktionsräume  $V_h$  und  $V_{2h}^{(2)}$  eine einheitliche globale Nummerierung der Freiheitsgrade bezüglich der Basen  $v_i^{(1),h}$ ,  $i = 1, \dots, N_h^{(1)}$  von  $V_h$  und  $v_j^{(2),2h}$ ,  $j = 1, \dots, N_{2h}^{(2)}$  von  $V_{2h}^{(2)}$  besitzen. Aus Konsistenzgründen wird zudem die Bezeichnung  $V_h^{(1)}$  anstelle von  $V_h$  verwendet.

Die einheitliche globale Nummerierung impliziert insbesondere  $N_{2h}^{(2)} = N_h^{(1)} =: N$ , sodass die Patchinterpolation durch

$$\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\varphi_h) = \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h} \left( \sum_{i=1}^N \varphi_i v_i^{(1),h} \right) = \sum_{j=1}^N \varphi_j v_j^{(2),2h}, \quad \varphi_h \in V_h^{(1)},$$

beschrieben werden kann. Dabei ist  $\underline{\varphi} \in \mathbb{R}^N$  der zu  $\varphi_h$  gehörende Koeffizientenvektor. Der Wert des Fehlerschätzers ergibt sich schließlich anhand

der Formel

$$\begin{aligned} \eta_h = & \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left\{ \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),2h} - v_i^{(1),h} \right) \underline{z}_i + \rho_h^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),2h} - v_i^{(1),h} \right) \underline{u}_i \right. \\ & \left. + \Delta \rho(u_h) \left( v_i^{(2),2h} \right) \underline{z}_i + \Delta \rho^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),2h} \right) \underline{u}_i \right\} \\ & + \sum_{i=1}^N \rho_h(u_h) \left( v_i^{(1),h} \right) \underline{z}_i. \end{aligned}$$

Hierbei fällt auf, dass Differenzen von Basisfunktionen zu unterschiedlichen Triangulierungen auftreten. Dies verkompliziert die Auswertung des Fehlerschätzers durch die Berechnung der zugehörigen Integrale. Mit der alternativen Betrachtung des Raums

$$V_h^{(2)} = \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_2(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}$$

lässt sich der Fehlerschätzer unter Verwendung der Prolongationsoperatoren  $P_{(2),h}^{(2),2h} : V_{2h}^{(2)} \rightarrow V_h^{(2)}$  und  $P_{(2),h}^{(1),h} : V_h^{(1)} \rightarrow V_h^{(2)}$  lediglich bezüglich der Basis  $v_i^{(2),h}$ ,  $i = 1, \dots, N_h^{(2)}$  von  $V_h^{(2)}$  darstellen. Die Prolongationsoperatoren sind gegeben durch

$$P_{(2),h}^{(2),2h}(\varphi_h) = P_{(2),h}^{(2),2h} \left( \sum_{i=1}^{N_{2h}^{(2)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(2),2h} \right) = \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \underline{\varphi}_i^{(2)} v_i^{(2),h}, \quad \forall \varphi_h \in V_{2h}^{(2)}$$

und

$$P_{(2),h}^{(1),h}(\varphi_h) = P_{(2),h}^{(1),h} \left( \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} \right) = \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \underline{\varphi}_i^{(1)} v_i^{(2),h}, \quad \forall \varphi_h \in V_h^{(1)}$$

mit den zugehörigen Koeffizientenvektoren  $\underline{\varphi}^{(1)}, \underline{\varphi}^{(2)} \in \mathbb{R}^{N_h^{(2)}}$  und dem generisch zu verstehenden Koeffizientenvektor  $\underline{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_{2h}^{(2)}}$  beziehungsweise  $\underline{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_h^{(1)}}$ . Aufgrund der Tatsache, dass sowohl  $P_{(2),h}^{(2),2h}$  auf  $V_{2h}^{(2)}$  als auch  $P_{(2),h}^{(1),h}$  auf  $V_h^{(1)}$  der Identitätsabbildung entsprechen, ergibt sich exempla-

risch für das primale Residuum

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),2h} - v_i^{(1),h} \right) \underline{z}_i &= \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) \\
 &= \rho_h(u_h) \left( \mathbf{P}_{(2),h}^{(2),2h} \circ \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - \mathbf{P}_{(2),h}^{(1),h}(z_h) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \left( \underline{z}_i^{(2)} - \underline{z}_i^{(1)} \right).
 \end{aligned}$$

Das heißt, mit Hilfe der biquadratischen Basis lässt sich die ursprüngliche Differenz zwischen den Basisfunktionen der unterschiedlichen Finite Elemente Räume auf die Differenz der zugehörigen Koeffizientenvektoren zurückführen. Dies ermöglicht – bei vorhandenen Koeffizientenvektoren – eine elementweise Auswertung des Fehlerschätzer. Eine analoge Argumentation für die weiteren Anteile liefert also

$$\begin{aligned}
 \eta_h &= \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \frac{1}{2} \left\{ \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \left( \underline{z}_i^{(2)} - \underline{z}_i^{(1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \rho_h^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \left( \underline{u}_i^{(2)} - \underline{u}_i^{(1)} \right) + \Delta \rho(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \underline{z}_i^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. + \Delta \rho^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \underline{u}_i^{(2)} \right\} + \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \underline{z}_i^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenvektoren  $\underline{u}^{(1)}$ ,  $\underline{z}^{(1)}$ ,  $\underline{u}^{(2)}$  und  $\underline{z}^{(2)}$  lassen sich über eine einfache Matrix–Vektor–Multiplikation bestimmen. Es sind

$$\begin{aligned}
 \underline{u}^{(1)} &= P^{(1)} \underline{u}, & \underline{u}^{(2)} &= P^{(2)} \underline{u}, \\
 \underline{z}^{(1)} &= P^{(1)} \underline{z}, & \underline{z}^{(2)} &= P^{(2)} \underline{z}.
 \end{aligned}$$

Die Einträge der Matrizen  $P^{(1)} \in \mathbb{R}^{N_h^{(2)} \times N_h^{(1)}}$  und  $P^{(2)} \in \mathbb{R}^{N_h^{(2)} \times N_{2h}^{(2)}}$  sind im Wesentlichen durch die Auswertung der Basisfunktionen des Ausgangsraums in den Definitionspunkten der Freiheitsgrade des Zielraums gegeben. Auch diese globale Operation kann auf Patch- beziehungsweise Elementebene effizienter ausgeführt werden. Hierbei lässt sich ausnutzen, dass die entsprechenden Matrizen für alle Patches identisch sind und es daher genügt, alle Größen für einen Referenzpatch zu bestimmen. Der

Aufwand reduziert sich somit auf die einmalige Berechnung der entsprechenden Matrizen bezüglich des Referenzpatch für alle Verfeinerungslevel und auf lokale Matrix–Vektor–Multiplikationen.

### 5.1.3. Beispiel mit $C^\infty$ -Lösung

Nachdem der Fehlerschätzer mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt erläuterten Techniken ausgewertet werden kann, erfolgt nun die Anwendung auf ein konkretes Beispiel. Ziel ist es, die Genauigkeit der Fehlerschätzung zu überprüfen. Hierzu wird eine Aufgabenstellung mit vorgegebener analytischer Lösung  $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$  auf dem Gebiet  $\Omega := (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  mit Dirichletrand  $\Gamma_D = \partial\Omega$  betrachtet. Bei der Wahl dieser Lösung ist die Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften der Problemstellung entscheidend. Es muss daher sichergestellt sein, dass für beinahe inkompressibles Materialverhalten das entsprechende Verschiebungsfeld eine fast volumenerhaltende Deformation beschreibt, also  $\operatorname{div}(u) \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow 0.5$  gilt. Unter der Annahme konstanter Materialeigenschaften im gesamten Gebiet, das heißt  $\mu(x, y) = \mu = 1.0$  und  $\nu(x, y) = \nu = 0.25$ , sei

$$u(x, y) := \frac{1}{64} \begin{bmatrix} -\frac{2\pi}{3} [\sin(\pi(x - 0.5)) + 1] \cos(2\pi(y - 0.25)) \\ \frac{\pi}{2(1+\nu)} \cos(\pi(x - 0.5)) [\sin(2\pi(y - 0.25)) + 1] \end{bmatrix}$$

mit  $u(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \in \Gamma_D$  und

$$\operatorname{div}(u(x, y)) = \frac{\pi^2(1 - 2\nu)}{42(1 + \nu)} \cos(\pi(x - 0.5)) \cos(2\pi(y - 0.25)).$$

Die Linearform  $l$  aus Gleichung (5.3) reduziert sich aufgrund der reinen Dirichletrandbedingungen auf das Volumenintegral, wobei die rechte Seite  $f$  durch die starke Form der Differentialgleichung gegeben ist, das heißt  $f := -\operatorname{div}(\sigma(u))$ . Insbesondere resultiert aus dem Vorfaktor in der Divergenz eine Unabhängigkeit von der Querkontraktion  $\nu$ .

Als Zielfunktional  $J$  dient in diesem Fall der integrale Mittelwert von  $u$  über die Teilmenge  $B := [1.4, 1.6] \times [0.15, 0.65]$ . Um eine höhere Glattheit der dualen Lösung  $z$  zu erreichen, wird die unstetige charakteristische Funktion  $\chi_B$  durch eine stetig differenzierbare Appro-

ximation  $\chi_{B_\alpha}(x, y) = r_x(x, y)r_y(x, y) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  ersetzt. Dabei sind  $B_\alpha := [x_\alpha^l, x_\alpha^u] \times [y_\alpha^l, y_\alpha^u]$ ,

$$\begin{aligned} x_\alpha^l &= 1.4 - \alpha, & y_\alpha^l &= 0.15 - \alpha, \\ x_\alpha^u &= 1.6 + \alpha, & y_\alpha^u &= 0.65 + \alpha \end{aligned}$$

und

$$r_x(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin B_\alpha \\ 1, & (x, y) \in B_{-\alpha} \\ r_{x_\alpha^l}(x), & (x, y) \in B_\alpha \setminus B_{-\alpha}, x \leq x_{-\alpha}^l \\ r_{x_\alpha^u}(x), & (x, y) \in B_\alpha \setminus B_{-\alpha}, x \geq x_{-\alpha}^u \end{cases},$$

$$r_y(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin B_\alpha \\ 1, & (x, y) \in B_{-\alpha} \\ r_{y_\alpha^l}(y), & (x, y) \in B_\alpha \setminus B_{-\alpha}, y \leq y_{-\alpha}^l \\ r_{y_\alpha^u}(y), & (x, y) \in B_\alpha \setminus B_{-\alpha}, y \geq y_{-\alpha}^u \end{cases}.$$

Weiter sind die kubischen Polynome  $r_{\beta_\alpha^l}(\beta)$  und  $r_{\beta_\alpha^u}(\beta)$ ,  $\beta \in \{x, y\}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} r_{\beta_\alpha^l}(\beta) &= \frac{1}{(\beta_{-\alpha}^l - \beta_\alpha^l)^2} (\beta - \beta_\alpha^l)^2 \left( 1 - \frac{2}{(\beta_{-\alpha}^l - \beta_\alpha^l)} (\beta - \beta_{-\alpha}^l) \right), \\ r_{\beta_\alpha^u}(\beta) &= 1 - \frac{1}{(\beta_\alpha^u - \beta_{-\alpha}^u)^2} (\beta - \beta_{-\alpha}^u)^2 \left( 1 - \frac{2}{(\beta_\alpha^u - \beta_{-\alpha}^u)} (\beta - \beta_\alpha^u) \right). \end{aligned}$$

Mit  $\tilde{B} := B_{0.02}$  sei dann

$$J(u) = \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} u_1 + u_2 d(x, y) = \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\Omega} (u_1 + u_2) \chi_{\tilde{B}} d(x, y).$$

Die Qualität der Fehlerschätzung lässt sich mit Hilfe des Effektivitätsindex überprüfen. Dieser ist für gewöhnlich über den Quotienten der Absolutbeträge von geschätztem und tatsächlichem Fehler definiert. Da die DWR-Methodik neben dem absoluten Wert der Fehlerschätzung zusätzlich eine Aussage über das Vorzeichen des Fehlers liefert, sollte auch

diese Information in die Bewertung mit einfließen. Daher ist eine Betrachtung des Effektivitätsindex ohne die Beträge üblich. Im Idealfall gibt der Fehlerschätzer  $\eta_h$  den tatsächlichen Fehler  $e$  exakt wieder und somit ist der Effektivitätsindex identisch 1. Ist hingegen die Bedingung  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta_h}{e} = 1$  erfüllt, ist von einer asymptotisch exakten Schätzung die Rede. Dieses Verhalten ist in praktischen Anwendungen nur bei wenigen ausgewählten Beispielen zu beobachten, sodass von einer guten Qualität beziehungsweise guten Genauigkeit des Fehlerschätzers gesprochen wird, wenn sich der Effektivitätsindex mit zunehmend feinerer Triangulierung um den Wert 1 stabilisiert.

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Zusatzterme werden für die zuvor definierte Aufgabenstellung die Fehlerschätzungen unter Berücksichtigung und bei Vernachlässigung der Zusatzterme verglichen. Dazu erfolgt eine Zerlegung des Fehlerschätzers  $\eta_h$  in einen reinen Residuumsanteil  $\eta_R$ , einen Teil bezüglich der Zusatzterme  $\eta_A$  und in einen numerischen Fehleranteil  $\eta_N$ . Es ist demnach  $\eta_h = \eta_R + \eta_A + \eta_N$  mit

$$\begin{aligned} \eta_R &:= \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \frac{1}{2} \left[ \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \left( z_i^{(2)} - z_i^{(1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho_h^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \left( \underline{u}_i^{(2)} - \underline{u}_i^{(1)} \right) \right], \\ \eta_A &:= \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \frac{1}{2} \left[ \Delta \rho(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) z_i^{(2)} + \Delta \rho^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \underline{u}_i^{(2)} \right], \\ \eta_N &:= \sum_{i=1}^{N_h^{(2)}} \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) z_i^{(1)}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung der zugehörigen Effektivitätsindizes bei uniformer Verfeinerung ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Dabei sind

$$I_{1,\text{Eff}} = \frac{\eta_h}{J(u) - J(u_h)} \quad \text{und} \quad I_{2,\text{Eff}} = \frac{\eta_R + \eta_N}{J(u) - J(u_h)}.$$

Es ist deutlich zu erkennen, dass sich, bei der Berücksichtigung der Zusatzterme, der zugehörige Effektivitätsindex immer mehr dem Wert 1 annähert. Bei der Vernachlässigung dieser Terme ist ebenfalls ein konvergentes Verhalten zu beobachten, jedoch stabilisiert sich der Wert des Ef-

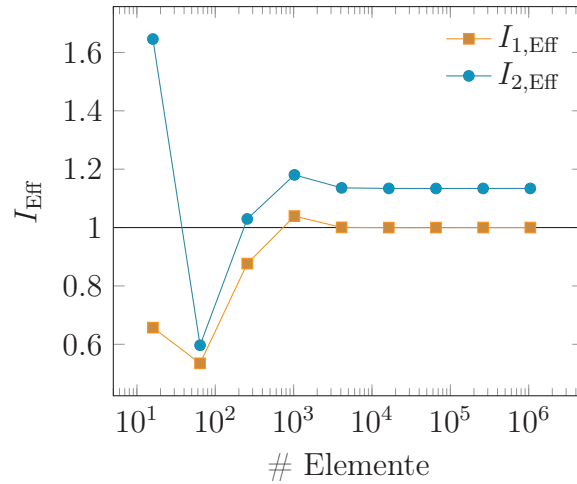


Abbildung 5.1.: Effektivitätsindizes für Fehlerschätzung mit und ohne Zusatzterme.

fektivitätsindex um den Wert 1.18. Die Qualität der beiden Fehlerschätzungen unterscheidet sich also durch eine feste Konstante. Dies zeigt, dass die in Abschnitt 4.2 identifizierten Zusatzterme nicht nur von theoretischem Interesse sind, sondern auch in der numerischen Behandlung nicht vernachlässigt werden dürfen. Nur so kann eine genaue Fehlerschätzung mit Effektivitätsindizes um den Wert 1 erreicht werden.

Im Anschluss daran wird das Verhalten des Effektivitätsindex im fast inkompressiblen Fall, das heißt für  $\nu \rightarrow 0.5$ , auf der Basis einer fest vorgegebenen, uniform verfeinerten Triangulierung des Gebietes  $\Omega$  mit 262 144 Elementen, untersucht. Tabelle 5.1 veranschaulicht die Entwicklung, wobei anstelle der Querkontraktion  $\nu$  die Differenz zu 0.5 herangezogen wird. Für moderate Differenzen, das heißt für  $\Delta\nu \geq 10^{-3}$ , ist die Fehlerschätzung weiterhin von guter Genauigkeit und liefert Werte für den Effektivitätsindex nahe 1. Mit dem Erreichen des für fast inkompressible Materialien üblichen Bereichs ( $\Delta\nu \leq 10^{-5}$ ), wird die Schätzung jedoch zunehmend schlechter und überschätzt den Fehler letztendlich deutlich. Auch das Vorzeichen des Fehlers wird nicht mehr korrekt wiedergegeben. Es stellt sich die Frage, ob dieses Verhalten problembedingt ist oder ob etwaige Annahmen bei der numerischen Approximation der Fehleri-

$\Delta\nu$	$J(u) - J(u_h)$	$\eta_h$	$I_{1,\text{Eff}}$
$2.5 \cdot 10^{-1}$	$-3.00398 \cdot 10^{-7}$	$-3.00383 \cdot 10^{-7}$	0.99995
$1.0 \cdot 10^{-1}$	$-2.93666 \cdot 10^{-7}$	$-2.93648 \cdot 10^{-7}$	0.99994
$1.0 \cdot 10^{-2}$	$-3.09182 \cdot 10^{-7}$	$-3.09111 \cdot 10^{-7}$	0.99977
$1.0 \cdot 10^{-3}$	$-3.13180 \cdot 10^{-7}$	$-3.12561 \cdot 10^{-7}$	0.99802
$1.0 \cdot 10^{-4}$	$-3.13628 \cdot 10^{-7}$	$-3.07935 \cdot 10^{-7}$	0.98185
$1.0 \cdot 10^{-5}$	$-3.13670 \cdot 10^{-7}$	$-2.64011 \cdot 10^{-7}$	0.84169
$1.0 \cdot 10^{-6}$	$-3.13703 \cdot 10^{-7}$	$1.65067 \cdot 10^{-7}$	-0.52619
$1.0 \cdot 10^{-7}$	$-3.13516 \cdot 10^{-7}$	$4.46228 \cdot 10^{-6}$	-14.23300

Tabelle 5.1.: Effektivitätsindex unter Berücksichtigung der Zusatzterme für  $\nu \rightarrow 0.5$ .

dentität unzureichend sind. Mit der Beantwortung dieser Fragestellung beschäftigen sich die Ausführungen des nächsten Abschnittes.

## 5.2. Diskretisierungsfehlerschätzung mittels gemischter Formulierung

Kernpunkt der folgenden Überlegungen ist die in Abschnitt 3.2 erwähnte Äquivalenz von SRI und der diskreten Verschiebung–Druck–Formulierung. Ausgehend von der zugehörigen kontinuierlichen Problemstellung 2.7 erfolgt die Herleitung einer entsprechenden Fehleridentität auf Basis der DWR-Methode für den Fall einer konformen Diskretisierung. Entscheidend ist hierbei, dass sowohl in der kontinuierlichen als auch in der diskreten Version die Semilinearformen übereinstimmen, sodass auf die klassische Fehleridentität aus Gleichung (4.5) zurückgegriffen werden kann. Im Anschluss an die numerische Approximation wird der sich ergebende Fehlerschätzer mit Hilfe des Operators  $P_h$  in eine rein verschiebungsbasierte Darstellung überführt und mit der in Abschnitt 5.1.1 hergeleiteten Version verglichen.



### 5.2.1. Fehleridentität

Die nachfolgend eingeführte kompakte Schreibweise der kontinuierlichen Problemstellung 2.7 dient im Wesentlichen der besseren Lesbarkeit. Es sei  $\mathbf{V} := V \times M$  und  $U := (u, p) \in \mathbf{V}$  eine Lösung der Gleichung

$$\mathcal{B}(U)(\Phi) = 0 \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}, \quad (5.6)$$

mit  $\Phi := (\varphi, \zeta)$  und einer Semilinearform  $\mathcal{B}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\mathcal{B}(U)(\Phi) = b(u, \varphi) + c(\varphi, p) - l(\varphi) + c(u, \zeta) - d(p, \zeta).$$

Die Bilinearformen  $b$ ,  $c$  und  $d$  entsprechen dabei denen der äquivalenten Sattelpunktformulierung von Problemstellung 2.7, das heißt

$$\begin{aligned} b: V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & b(u, \varphi) &= \left( \mathbb{C}_{\text{EVZ}} : (D u)^{\text{dev}}, (D \varphi)^{\text{dev}} \right)_0, \\ c: V \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & c(u, \zeta) &= (P(u), \zeta)_{K^{-1}} = -(\text{div}(u), \zeta)_0, \\ d: M \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & d(p, \zeta) &= (p, \zeta)_{K^{-1}} \end{aligned}$$

und  $l$  der Linearform aus Gleichung (5.3). Für die diskrete Problemstellung sei  $\mathbf{V}_h := V_h \times M_h \subset \mathbf{V}$  mit den selben endlichdimensionalen Teilräumen  $V_h$  und  $M_h$  wie in Abschnitt 5.1.1. Die diskrete Lösung  $U_h = (u_h, p_h) \in \mathbf{V}_h$  erfüllt dann die Gleichung

$$\mathcal{B}(U_h)(\Phi_h) = 0 \quad \forall \Phi_h \in \mathbf{V}_h. \quad (5.7)$$

Wie eingangs erwähnt ist entscheidend, dass bei dieser Formulierung keine Modifikation der Semilinearform  $\mathcal{B}$  auf diskreter Ebene notwendig ist. Die klassische Fehleridentität aus Gleichung (4.5) liefert unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Gleichung (5.7) nur unzureichend genau gelöst wurde, ein Darstellung des Fehlers der Form

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_h) &= \frac{1}{2} \rho(U_h)(e_Z) + \frac{1}{2} \rho^*(U_h, Z_h)(e_U) \\ &\quad + \rho(U_h)(Z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\rho(U_h)(\bullet) &:= -\mathcal{B}(U_h)(\bullet) \\ &= l(\bullet) - b(u_h, \bullet) - c(\bullet, p_h) - c(u_h, \bullet) + d(p_h, \bullet), \\ \rho^*(U_h, Z_h)(\bullet) &:= J'(u_h)(\bullet) - \mathcal{B}'(U_h)(\bullet, Z_h) \\ &= J'(u_h)(\bullet) - b(\bullet, z_h) - c(z_h, \bullet) - c(\bullet, q_h) + d(\bullet, q_h).\end{aligned}$$

Das zugehörige Restglied ist von dritter Ordnung im Fehler

$$e_X = (e_U, e_Z) = (e_u, e_p, e_z, e_q) = (u - u_h, p - p_h, z - z_h, q - q_h)$$

und nur abhängig vom Zielfunktional  $J$ , da auch  $\mathcal{B}$  affin-linear im ersten Argument ist, das heißt

$$\mathcal{R}_h^{(3)} := \frac{1}{2} \int_0^1 J'''(u_h + se_u)(e_u) s(s-1) ds.$$

Auch hier verschwindet das Restglied vollständig für lineare und quadratische Zielfunktionale in  $u$ .

## 5.2.2. Numerische Approximation, Vergleich und Anwendung

Die numerische Approximation der Fehleridentität erfolgt analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.1.2. Der wesentliche Schritt ist hierbei erneut die explizite Angabe des Operators  $\Pi$ .

Die Rekonstruktion der Verschiebungsanteile  $u$  und  $z$  von  $U$  beziehungsweise  $Z$  verwendet die in Abschnitt 5.1.2 eingeführte Patchinterpolierende  $I_{(2),2h}^{(1),h}$ . Die skalaren, stückweise konstanten Drücke werden als skalare, bilineare Funktionen interpoliert, wobei auf Mittelungstechniken, wie beispielsweise in [8] und [32] beschrieben, zurückgegriffen wird. Diese Techniken sind auch als ZZ-Methode bekannt, siehe [94]. Mit der zugehörigen Bezeichnung  $I_h^{ZZ}$  ist der vollständige Rekonstruktionsoperator gegeben durch

$$\Pi(\Psi) := (I_{(2),2h}^{(1),h}(\psi_h), I_h^{ZZ}(\xi_h)).$$

Durch die Vernachlässigung des Restglieds sowie der Terme höherer Ordnung bezüglich  $\Pi$  ergibt sich der Fehlerschätzer für die gemischte Problemstellung als

$$\begin{aligned} \eta_h &= \frac{1}{2} \rho(U_h) \left( [I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h), I_h^{ZZ}(q_h)] - Z_h \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho^*(U_h, Z_h) \left( [I_{(2),2h}^{(1),h}(u_h), I_h^{ZZ}(p_h)] - U_h \right) \\ &\quad + \rho(U_h)(Z_h). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für den im nächsten Schritt anstehenden Vergleich der Darstellungen in den Gleichungen (5.5) und (5.8) ist eine Überführung des Fehlerschätzers, basierend auf der gemischten Formulierung, in eine rein verschiebungsbasierte Form notwendig. Dazu dient die Identifizierung der diskreten primalen und dualen Drucklösung mit dem jeweiligen Bild des Operator  $P_h$  der Verschiebungsanteile, das heißt  $p_h = P_h(u_h)$  und  $q_h = P_h(z_h)$ . Für das primale Residuum aus Gleichung (5.8) ergibt sich mit  $U_h^{P_h} = (u_h, P_h(u_h))$  und  $Z_h^{P_h} = (z_h, P_h(z_h))$

$$\begin{aligned} &\rho(U_h^{P_h}) \left( [I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h), I_h^{ZZ}(P_h(z_h))] - Z_h^{P_h} \right) \\ &= l(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) - b(u_h, I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) - c(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h, P_h(z_h)) \\ &\quad - c(u_h, I_h^{ZZ}(P_h(z_h)) - P_h(z_h)) + d(P_h(u_h), I_h^{ZZ}(P_h(z_h)) - P_h(z_h)). \end{aligned}$$

Die folgenden Umformungen verwenden lediglich die Definition der Bilinearformen  $c$  und  $d$  sowie die Bestimmungsgleichung (3.8) des Operators  $P_h$ . Es gilt

$$\begin{aligned} c(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h, P_h(u_h)) &= (P(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h), P_h(u_h))_{K^{-1}} \\ &= (-K \operatorname{div}(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h), P_h(u_h))_{K^{-1}} \\ &= (P_h(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h), P_h(u_h))_{K^{-1}} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &l(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) - b(u_h, I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) - c(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h, P_h(z_h)) \\ &= l(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) - (\mathbb{C}_{\text{EVZ}} : Du_h, D(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h))_0 \\ &\quad - (P_h(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h), P_h(u_h))_{K^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= l \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) - a_h \left( u_h, \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) \\
 &= \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right).
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 &d(\mathbf{P}_h(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) - \mathbf{P}_h(z_h)) - c(u_h, \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) - \mathbf{P}_h(z_h)) \\
 &= d(\mathbf{P}_h(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h))) - c(u_h, \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h))) \\
 &\quad + (\mathbf{P}(u_h) - \mathbf{P}_h(u_h), \mathbf{P}_h(z_h))_{K^{-1}} \\
 &= (\mathbf{P}_h(u_h) - \mathbf{P}(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)))_{K^{-1}}.
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 &\rho \left( U_h^{\mathbf{P}_h}, Z_h^{\mathbf{P}_h} \right) \left( \left[ \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) \right] - Z_h^{\mathbf{P}_h} \right) \\
 &= \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) - c(u_h, \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) - \mathbf{P}_h(z_h)) \\
 &\quad + d(\mathbf{P}_h(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) - \mathbf{P}_h(z_h)) \\
 &= \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) + (\mathbf{P}_h(u_h) - \mathbf{P}(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)))_{K^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Für das duale Residuum folgt entsprechend

$$\begin{aligned}
 &\rho^* \left( U_h^{\mathbf{P}_h}, Z_h^{\mathbf{P}_h} \right) \left( \left[ \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(u_h), \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}(z_h)) \right] - U_h^{\mathbf{P}_h} \right) \\
 &= \rho_h^*(u_h, z_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(u_h) - u_h \right) + (\mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(u_h)), \mathbf{P}_h(z_h) - \mathbf{P}(z_h))_{K^{-1}}
 \end{aligned}$$

sowie für den numerischen Fehleranteil

$$\begin{aligned}
 \rho \left( U_h^{\mathbf{P}_h}, Z_h^{\mathbf{P}_h} \right) &= \rho_h(u_h)(z_h) - c(z_h, \mathbf{P}_h(u_{hm})) + d(\mathbf{P}_h(u_h), \mathbf{P}_h(z_h)) \\
 &= \rho_h(u_h)(z_h).
 \end{aligned}$$

Der Vergleich der überführten Darstellung mit der des rein verschiebungsbasierten Fehlerschätzer aus Gleichung (5.5) liefert einen entscheidenden Unterschied bei den Zusatztermen. Während in Gleichung (5.5) auch in den Zusatztermen die biquadratische Patchinterpolierende des Verschiebungsfeldes verwendet wird, enthält die aus der gemischten Formulierung überführte Version eine Rekonstruktion höherer Ordnung von  $\mathbf{P}(u)$  beziehungsweise  $\mathbf{P}(z)$ . Die entsprechende Anpassung des Fehlerschätzers

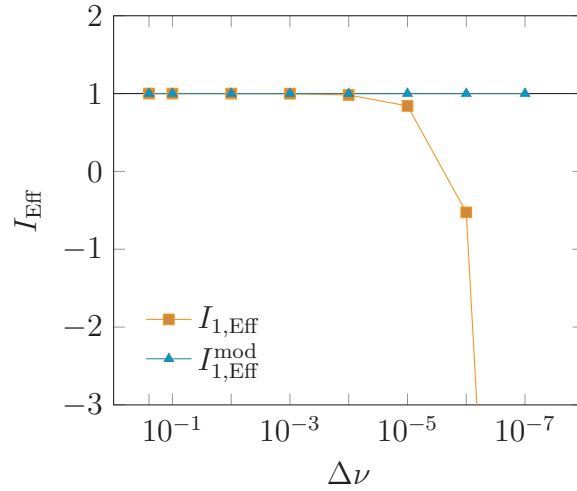


Abbildung 5.2.: Effektivitätsindex für den modifizierten und ursprünglichen Fehlerschätzer für  $\nu \rightarrow 0.5$  mit  $\Delta\nu = 0.5 - \nu$ .

liefert

$$\begin{aligned}
 \eta_h^{\text{mod}} &= \eta_R + \eta_A^{\text{mod}} + \eta_N \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \rho_h(u_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h \right) + \rho_h^*(u_h, z_h) \left( \mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(u_h) - u_h \right) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta\rho(u_h) \left( \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(z_h)) \right) + \Delta\rho^*(u_h, z_h) \left( \mathbf{I}_h^{\text{ZZ}}(\mathbf{P}_h(u_h)) \right) \right] \\
 &\quad + \rho_h(u_h)(z_h)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \Delta\rho(u_h)(\bullet) &= (\mathbf{P}_h(u_h) + K \operatorname{div}(u_h), \bullet)_{K^{-1}}, \\
 \Delta\rho^*(u_h, z_h)(\bullet) &= (\bullet, \mathbf{P}_h(z_h) + K \operatorname{div}(z_h))_{K^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob die Modifikation den gewünschten Effekt einer Fehlerschätzung unabhängig von der Querkontraktion  $\nu$  liefert, wird erneut das Beispiel aus Abschnitt 5.1.3 betrachtet. Die Verläufe der Effektivitätsindizes für den ursprünglichen Fehlerschätzer  $\eta_h$  und den modifizierten  $\eta_h^{\text{mod}}$  sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Es zeigt sich, dass mit der angepassten Version aus Gleichung (5.9) eine sehr genaue Fehler-

schätzung mit Effektivitätsindizes nahe 1 erreicht wird, die insbesondere unabhängig von der Querkontraktionszahl  $\nu$  ist.

### 5.2.3. Beispiel mit reduzierter Regularität

Nachdem für das vorherige Beispiel die  $C^\infty$ -Eigenschaft der Lösung vorausgesetzt wurde, behandelt die folgende Problemstellung die Situation einer Lösung mit reduzierter Regularität. Eines der einfachsten und gängigsten Modellprobleme in diesem Zusammenhang ist die Laplace-Gleichung auf dem L-Gebiet. Hierfür kann eine Lösung mit einer Singularität an der einspringen Ecke konstruiert werden, die zwar in  $H^1(\Omega)$ , aber nicht mehr in  $H^2(\Omega)$  ist. Ausgehend von dieser Problemstellung erfolgt zunächst die Anpassung an den Fall der linearen Elastizität, indem eine divergenzfreie Lösung von der in [64] dargestellten Singularitätenfunktion für die Kirchhoffsche Platte abgeleitet wird. Ebenso wie bei der skalaren Laplace-Gleichung wird auch diese Funktion in Polarkoordinaten  $(r, t) \in \mathbb{R}^2$  angegeben. Es ist

$$u(r, t) := \frac{r^{c_0}}{52} \begin{bmatrix} -(c_0 + 1) \sin(t) \theta(t) - \cos(t) \partial_t \theta(t) \\ (c_0 + 1) \cos(t) \theta(t) - \sin(t) \partial_t \theta(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi,$$

mit der Funktion  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \theta(t) := & c_1 \sin((c_0 - 1)t) + c_2 \cos((c_0 - 1)t) + c_3 \sin((c_0 + 1)t) \\ & + c_4 \cos((c_0 + 1)t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

und den Konstanten

$$\begin{aligned} c_0 = & 0.544483736782463, & c_1 = & 0.857971843963184, \\ c_2 = & 0.190068891083326, & c_3 = & 0.103221773043934, \\ c_4 = & -0.465943555785929. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Das L-Gebiet ist gegeben durch  $\Omega = (-0.5, 0.5)^2 \setminus [0, 0.5]^2$  mit Dirichletrand  $\Gamma_D = \{0\} \times [0, 0.5] \cup [0, 0.5] \times \{0\}$  und Neumannrand  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ . Die Volumenkraft  $f$  und die Neumannrandbedingungen  $f_N$  lassen sich aufgrund der Tatsache, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}_\epsilon(0, 0), \mathbb{R}^2)$  mit der Kreis-

scheibe  $\mathfrak{B}_\epsilon(0,0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \epsilon, \epsilon > 0\}$ , über die starke Form der Differentialgleichung bestimmen.

Die reduzierte Regularität der Lösung schlägt sich auch auf die Konvergenzgeschwindigkeit nieder, was sich leicht anhand der in Abschnitt 3.1 angegebenen a priori Abschätzungen in den Gleichungen (3.2) und (3.3) belegen lässt. Da die  $H^2$ -Regularität nicht gegeben ist, lässt sich für den Fehler in der  $H^1$ -Norm lediglich eine Abschätzung der Form

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^\beta$$

mit  $C > 0$  und  $0 < \beta < 1$  erwarten. Aufgrund der Konstruktionsweise der analytischen Lösung entspricht  $\beta$  der Potenz des Radius, das heißt es ist  $\beta = c_0 \approx 0.54$ .

Liegen zusätzliche Informationen zur Struktur der Lösung vor, ist es möglich trotz reduzierter Regularität bessere Konvergenzraten zu erreichen, als die, die durch die a priori Abschätzungen suggeriert werden. Die hier betrachtete Lösung lässt sich in einen glatten Anteil und in einen Singularitätsanteil aufspalten. Durch eine geschickte Wahl der Triangulierung wird die Konvergenzordnung des glatten Anteils für die gesamte Lösung erreicht, vergleiche hierzu [19]. Die wesentliche Idee ist hierbei, die Triangulierung so zu wählen, dass der Singularitätsanteil, durch die Konzentration von Elementen im Bereich der Singularität, mit der gleichen Ordnung approximiert wird wie der glatte Anteil. Analoge Resultate lassen sich mit Hilfe von adaptiven Netzverfeinerungen erzielen.

#### 5.2.4. Fehlerlokalisierung und adaptive Netzverfeinerung

Für die adaptive Netzverfeinerung werden Informationen über die lokale Fehlerverteilung benötigt. Hieraus lassen sich Fehlerindikatoren ableiten, die eine Aussage darüber liefern, ob ein bestimmtes Element verfeinert werden soll oder nicht. Die Bestimmung dieser Indikatoren beruht dabei auf der Lokalisierung des bis dato nur global geschätzten Fehlers auf die einzelnen Elemente der Triangulierung. Mögliche Techniken wurden bereits in Abschnitt 4.4 aufgezeigt, wobei hier die von Braack und Ern in [22] beschriebene Filterungstechnik zur Anwendung kommt. Im Falle

von bilinearen Ansatzfunktion ergibt sich dadurch eine Lokalisierung auf die Knoten der Triangulierung, von wo aus diese Anteile gewichtet in die jeweiligen Fehlerindikatoren der angrenzenden Elemente einfließen.

Für die nachfolgenden Überlegungen sei vorausgesetzt, dass die Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  eine Patchstruktur und außerdem keine hängenden Knoten besitzt. Neben den in Abschnitt 5.1.2 eingeführten Funktionenräumen und Interpolations- beziehungsweise Prolongationsoperatoren, wird zusätzlich der Raum

$$V_{2h}^{(1)} := \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_{2h} \right\} \subset V_h^{(1)}$$

mit dem zugehörigen Interpolationsoperator  $I_{(1),2h}^{(1),h} : V_h^{(1)} \rightarrow V_{2h}^{(1)}$  benötigt. Dieser wird analog zum Operator der biquadratischen Patchinterpolierenden realisiert, wobei anstelle von biquadratischen die bilinearen Basisfunktionen  $v_i^{(1),2h}$ ,  $i = 1, \dots, N_{2h}^{(1)}$  von  $V_{2h}^{(1)}$  verwendet werden. Es ist also

$$I_{(1),2h}^{(1),h}(\varphi_h) = I_{(1),2h}^{(1),h} \left( \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} \right) = \sum_{i=1}^{N_{2h}^{(1)}} \underline{\varphi}_i^{(1),2h} v_i^{(1),2h}$$

mit  $\underline{\varphi}^{(1),2h} = I^{(1)} \underline{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_{2h}^{(1)}}$  und der Matrix  $I^{(1)} \in \mathbb{R}^{N_{2h}^{(1)} \times N_h^{(1)}}$ . Mit Hilfe des Interpolationsoperators  $I_{(1),2h}^{(1),h}$  lässt sich der Filterungsoperator  $\pi : V_h^{(1)} \rightarrow V_h^{(1)}$  durch die Vorschrift  $\pi := \text{id} - I_{(1),2h}^{(1),h}$  definieren. Dieser dient unter anderem dazu auftretende Oszillationen zu eliminieren, siehe [22, Abschnitt 4.1]. Durch die Einführung der zusätzlichen Prolongation  $P_{(1),h}^{(1),2h} : V_{2h}^{(1)} \rightarrow V_h^{(1)}$ , die für Funktionen aus  $V_{2h}^{(1)}$  der Identität entspricht, ergibt sich für ein Element  $\varphi_h \in V_h^{(1)}$  die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} \pi(\varphi_h) &= \varphi_h - I_{(1),2h}^{(1),h}(\varphi_h) = \varphi_h - P_{(1),h}^{(1),2h} \left( I_{(1),2h}^{(1),h}(\varphi_h) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} - P_{(1),h}^{(1),2h} \left( I_{(1),2h}^{(1),h} \left( \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} - P_{(1),h}^{(1),2h} \left( \sum_{i=1}^{N_{2h}^{(1)}} \underline{\varphi}_i^{(1),2h} v_i^{(1),2h} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i v_i^{(1),h} - \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \left[ P_{2h}^{(1)} \underline{\varphi}^{(1),2h} \right]_i v_i^{(1),h} \\
 &= \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \underline{\varphi}_i^\pi v_i^{(1),h}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Prolongationsmatrix  $P_{2h}^{(1)} \in \mathbb{R}^{N_h^{(1)} \times N_{2h}^{(1)}}$  ist der gefilterte Koeffizientenvektor  $\underline{\varphi}^\pi$  von  $\varphi_h$  gegeben durch  $\underline{\varphi}_i^\pi = \underline{\varphi}_i - \left[ P_{2h}^{(1)} \underline{\varphi}^{(1),2h} \right]_i$  für  $i = 1, \dots, N_h^{(1)}$ .

Weiterhin gilt aufgrund der Identitätseigenschaft der biquadratischen Patchinterpolierenden  $I_{(2),2h}^{(1),h}$  auf  $V_{2h}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 I_{(2),2h}^{(1),h}(\pi(\varphi_h)) - \pi(\varphi_h) &= I_{(2),2h}^{(1),h}(\varphi_h) - I_{(2),2h}^{(1),h}(I_{(1),2h}^{(1),h}(\varphi_h)) - \varphi_h + I_{(2),2h}^{(1),h}(\varphi_h) \\
 &= I_{(2),2h}^{(1),h}(\varphi_h) - \varphi_h
 \end{aligned}$$

und somit für das primale Residuum

$$\begin{aligned}
 \rho_h(u_h)(I_{(2),2h}^{(1),h}(z_h) - z_h) &= \rho_h(u_h)(I_{(2),2h}^{(1),h}(\pi(\varphi_h)) - \pi(\varphi_h)) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_h^{(1)}} \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),2h} - v_i^{(1),h} \right) z_i^\pi.
 \end{aligned}$$

Die erhaltene Darstellung entspricht der aus Abschnitt 5.1.2, lediglich der Koeffizientenvektor der dualen diskreten Lösung wurde durch den entsprechenden gefilterten Vektor ersetzt. Daher kann die Filterung auch als eine rein algebraische Operation bezüglich des Koeffizientenvektors der diskreten Funktion verstanden werden. Für das duale Residuum liefert die gleiche Vorgehensweise eine Darstellung bezüglich des gefilterten Koeffizientenvektors  $\underline{u}^\pi$  von  $u_h$ .

**Bemerkung 5.1.** Die Einträge der Interpolationsmatrix  $I^{(1)}$  und der Prolongationsmatrix  $P_{2h}^{(1)}$  ergeben sich analog zu Abschnitt 5.1.2 durch Auswertung der entsprechenden Basisfunktionen in den jeweiligen Definitionspunkten der Freiheitsgrade.

Für die numerische Auswertung ist erneut eine Darstellung bezüglich einer Basis  $v_i^{(2),h}$ ,  $i = 1, \dots, N_h^{(2)}$  von  $V_h^{(2)}$  vorteilhaft. Dazu seien der

primale und duale Residuumsvektor  $\underline{r}$  und  $\underline{r}^*$  aus  $\mathbb{R}^{N_h^{(2)}}$  gegeben durch

$$[\underline{r}]_i = \rho_h(u_h) \left( v_i^{(2),h} \right) \quad \text{und} \quad [\underline{r}^*]_i = \rho_h^*(u_h, z_h) \left( v_i^{(2),h} \right), \quad i = 1, \dots, N_h^{(2)}.$$

Dann lässt sich der Anteil  $\eta_R$  bestimmen durch

$$\begin{aligned} \eta_R &= \frac{1}{2} \underline{r}^\top (P^{(2)} \underline{z}^\pi - P^{(1)} \underline{z}^\pi) + \frac{1}{2} \underline{r}^{*\top} (P^{(2)} \underline{u}^\pi - P^{(1)} \underline{u}^\pi) \\ &= \frac{1}{2} \left( \underline{R}^{(2)} - \underline{R}^{(1)} \right)^\top \underline{z}^\pi + \frac{1}{2} \left( \underline{R}^{*(2)} - \underline{R}^{*(1)} \right)^\top \underline{u}^\pi \end{aligned}$$

mit den bereits in Abschnitt 5.1.2 eingeführten Prolongationsmatrizen  $P^{(1)}$  und  $P^{(2)}$ . Entscheidend ist hierbei die Darstellung bezüglich der restringierten Residuumsvektoren  $\underline{R}^{(1)}$  und  $\underline{R}^{(2)}$  beziehungsweise  $\underline{R}^{*(1)}$  und  $\underline{R}^{*(2)}$  aus  $\mathbb{R}^{N_h^{(1)}}$ , die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \underline{R}^{(1)} &= (P^{(1)})^\top \underline{r}, & \underline{R}^{*(1)} &= (P^{(1)})^\top \underline{r}^*, \\ \underline{R}^{(2)} &= (P^{(2)})^\top \underline{r}, & \underline{R}^{*(2)} &= (P^{(2)})^\top \underline{r}^*. \end{aligned} \quad \text{beziehungsweise}$$

Diese ermöglichen eine Lokalisierung der ursprünglichen Form

$$\eta_R^i = \frac{1}{2} \left| \left( \underline{R}_i^{(2)} - \underline{R}_i^{(1)} \right) \underline{z}_i^\pi \right| + \frac{1}{2} \left| \left( \underline{R}_i^{*(2)} - \underline{R}_i^{*(1)} \right) \underline{u}_i^\pi \right|, \quad i = 1, \dots, N_h^{(1)}$$

auf die Knoten der Triangulierung. Der Elementfehlerindikator ergibt sich dann als gewichtete Mittelung der zugehörigen Knotenlokalisierungen. Für den Anteil der Zusatzterme wird in Anlehnung an den Mittelungsbeziehungsweise ZZ-Fehlerschätzer die elementweise Auswertung der Terme als Indikator gewählt.

**Bemerkung 5.2.** *Die vorangegangenen Ausführungen beruhen auf der Annahme, dass die Triangulierung keine hängenden Knoten besitzt. Diese Voraussetzung ist im Allgemeinen bereits nach der ersten adaptiven lokalen Verfeinerung unter Beibehaltung der Patchstruktur nicht mehr erfüllt. Trotzdem ist eine Lokalisierung auf die zuvor angegebene Weise möglich, bedarf jedoch einer technisch sehr aufwändigen Beschreibung, sodass an dieser Stelle darauf verzichtet wurde. Der entscheidende Unterschied ist, dass beim Vorhandensein von hängenden Knoten, die lokale Konstruktionsweise sowohl bei der biquadratischen Patchinterpolierenden, als auch*

## 5.2. Diskretisierungsfehlerschätzung mittels gemischter Formulierung

bei der Filterung stärker berücksichtigt werden muss. Dies führt im Wesentlichen dazu, dass für  $\varphi_h \in V_h^{(1)}$  die Patchinterpolierende  $I_{(2),2h}^{(1),h}(\varphi_h)$  nur noch im Raum

$$\tilde{V}_{2h}^{(2)} := \left\{ \psi_h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_2(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_{2h} \right\}$$

enthalten ist, wobei allgemein  $\tilde{V}_{2h}^{(2)} \not\subseteq V$  gilt. Insbesondere kann sie un stetige Übergänge zwischen den Elementen der Patchtriangulierung aufweisen, die sich jedoch auf Kanten mit hängenden Knoten beschränken. Analoges gilt für die gefilterte Funktion. Diese ist ebenfalls nur noch in

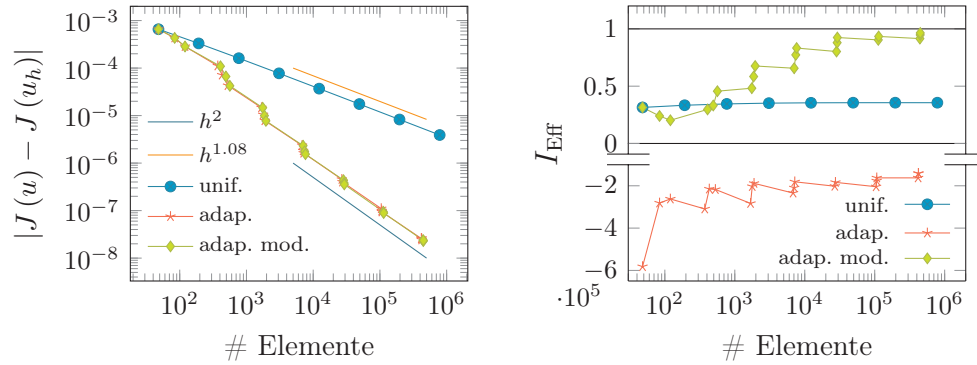
$$\tilde{V}_{2h}^{(1)} := \left\{ \psi_h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_{2h} \right\}$$

mit  $\tilde{V}_{2h}^{(1)} \not\subseteq V$ . Die Unstetigkeit entlang von Kanten mit hängenden Knoten ist jedoch entscheidend. Sie sorgt dafür, dass keine ungewöhnlich großen Fehlerindikatoren auf den feineren Zellen entstehen, die an die entsprechende Kante angrenzen. Weitere Details, Erläuterungen und Illustrationen zu dieser Problematik finden sich in [72, Abschnitt 2.1.2].

Auf Basis der zuvor bestimmten Elementfehlerindikatoren erfolgt eine adaptive Anpassung der Triangulierung. Für die Auswahl der zu verfeinernden Elemente kommt die *Optimal-Mesh*-Strategie nach Richter – vergleiche [76, Abschnitt 4.3] – zum Einsatz. Diese stellt die zu erwartende Fehlerreduktion durch die Verfeinerung eines Elements dem damit einhergehenden höheren numerischen Aufwand gegenüber und schafft so eine Balance zwischen den beiden Kriterien. Zudem bietet die Optimal-Mesh-Strategie den Vorteil gegenüber Raten- oder Anteilsstrategien, dass sie für den Fall einer beinahe homogenen Fehlerverteilung eine globale Verfeinerung bewirkt. Dies ist für die anderen Techniken nicht der Fall.

### 5.2.5. Numerische Ergebnisse

Ergänzend zu der in Abschnitt 5.2.3 angeführten Problemstellung sei der integrale Mittelwert der ersten Komponente der Lösung über das gesamte



- (a) Fehler gemessen im Zielfunktional  $J$  für uniforme, adaptive und adaptive Verfeinerung basierend auf der modifizierten Rekonstruktion.
- (b) Effektivitätsindizes der Fehlerschätzer in der jeweiligen Situation.

Abbildung 5.3.: Konvergenzresultate für Querkontraktion  $\nu = 0.5 - 10^{-7}$ .

Gebiet als Zielgröße vorgegeben, das heißt

$$J(u) = \int_{\Omega} u_1 dx.$$

Abbildung 5.3 zeigt die Ergebnisse der Konvergenzuntersuchung für uniforme und adaptive Netzverfeinerung basierend auf den beschriebenen Fehlerindikatoren. Das Verhalten des absoluten Fehlers gemessen im Zielfunktional  $J$  wird in Abbildung 5.3(a) veranschaulicht. Wie erwartet, liefert die uniforme Verfeinerung nur eine verringerte Konvergenzrate von 1.08, wohingegen sich der Fehler bei adaptiver Verfeinerung wie  $O(h^2)$  verhält. Interessant zu beobachten ist, dass sowohl die Verwendung des ursprünglichen Fehlerschätzers aus Gleichung (5.5) als auch die der modifizierten Version aus Gleichung (5.9) als Indikator für die adaptive Netzverfeinerung zu einem identischen Fehlerverlauf führen. Dies ist insbesondere aufgrund der qualitativ stark von einander abweichenden a posteriori Fehlerschätzungen verwunderlich, vergleiche die zugehörigen Effektivitätsindizes in Abbildung 5.3(b). Der Verlauf des Effektivitätsindex des modifizierten Fehlerschätzers  $\eta_h^{\text{mod}}$  belegt eine qualitativ gute Fehlerschätzung mit Werten die gegen 1 streben. Hingegen wird der Fehler bei

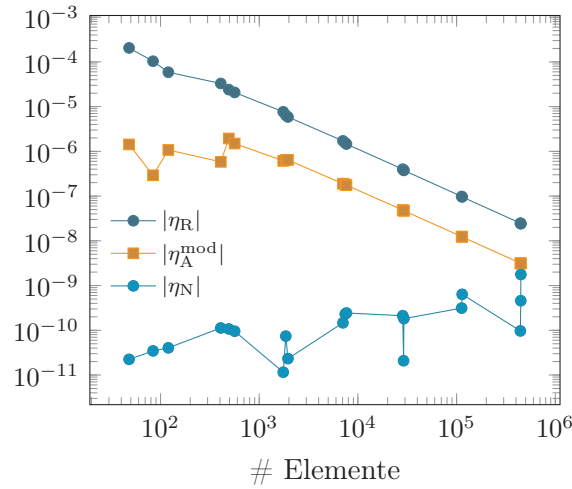


Abbildung 5.4.: Einzelne Anteile des Fehlerschätzers  $\eta_h^{\text{mod}}$ .

Verwendung der ursprünglichen Formulierung durch die schlechte Rekonstruktion der Divergenz betragsmäßig nicht nur deutlich überschätzt – es sind Effektivitätsindizes in der Größenordnung von  $10^5$  zu beobachten – sondern zudem, analog zu den Ergebnissen in Tabelle 5.1, auch das Vorzeichen des Fehlers nicht korrekt wiedergegeben. Dass der ursprüngliche Fehlerschätzer  $\eta_h$  und der modifizierte  $\eta_h^{\text{mod}}$  trotzdem ein sehr ähnliches Verhalten bei der Fehlerreduktion und auch bei der adaptiven Verfeinerung liefern, lässt sich damit erklären, dass zwar der globale Fehler deutlich überschätzt wird, sich die lokale relative Fehlerverteilung jedoch nicht ändert, was zu ähnlichen Fehlerindikatoren für die adaptive Verfeinerung führt.

Bei uniformer Verfeinerung ist aufgrund der reduzierten Regularität keine Annäherung des Effektivitätsindex an der Wert 1 zu erwarten. Der zugehörige Verlauf untermauert diese Aussage und zeigt ein fast konstantes Verhalten im Bereich um den Wert von 0.36.

In Abbildung 5.4 werden die einzelnen Bestandteile  $\eta_R$ ,  $\eta_A^{\text{mod}}$  und  $\eta_N$  von  $\eta_h^{\text{mod}}$  separat dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass bei einer geringen Anzahl von Elementen der Residuumsanteil  $\eta_R$  dominiert, mit fortschreitender Verfeinerung die Zusatzterme aber an Bedeutung gewinnen und sich in einer um den Faktor 10 kleineren Größenordnung gegenüber  $\eta_R$  stabilisieren. Der Anteil bezüglich des numerischen Fehlers ist zunächst vernachlässigbar klein, sodass von einer numerisch exakten Lösung

durch die verwendeten Lösungsverfahren gesprochen werden kann. Mit zunehmender Anzahl an Elementen wächst dieser Anteil an und erreicht schließlich die selbe Größenordnung wie die Zusatzterme. Ein Grund dafür ist neben der aus der Verfeinerung resultierenden Verschlechterung der Kondition des Systems der Einfluss des Kompressionsmodul  $K$ , der aufgrund der fast inkompressiblen Materialeigenschaften extrem groß ist und sich zusätzlich negativ auf die Kondition auswirkt. Für eine gute Repräsentation des exakten Fehlers bedeutet dies, dass bei der Auswertung des Fehlerschätzers der numerische Anteil nicht vernachlässigt werden darf.

### 5.3. Modellfehlerschätzung

Nachdem sich die Abschnitte 5.1 und 5.2 auf die Behandlung des Diskretisierungsfehlers und die adaptive Netzverfeinerung konzentriert haben, liegt der Fokus in diesem Abschnitt auf dem Konzept der Modelladaptivität und insbesondere auf der Schätzung des Modellfehlers basierend auf dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen allgemeinen Ansatz. Hierzu sind in einem ersten Schritt die beiden unterschiedlichen Modelle zu identifizieren. Das Referenzmodell sei durch die Beschreibung mittels der Semilinearform  $\mathcal{A}_h$  basierend auf der SRI gegeben. Als zweites Modell dient die kontinuierliche Semilinearform  $\mathcal{A}$ , das heißt

$$\overline{\mathcal{A}}_h(\overline{\psi}_h)(\overline{\varphi}_h) = \mathcal{A}(\overline{\psi}_h)(\overline{\varphi}_h) = a(\overline{\psi}_h, \overline{\varphi}_h) - l(\overline{\varphi}_h).$$

Die endlich dimensionalen Teilräume sind in beiden Modellen identisch, das heißt  $\overline{V}_h = V_h$ . Zudem wird vorausgesetzt, dass die diskreten Probleme hinreichend exakt durch die verwendeten Lösungsverfahren gelöst werden. Basierend auf der vereinfachten Darstellung in Gleichung (4.27) ergibt sich für die Modellfehleridentität

$$\begin{aligned} J(u_h) - J(u_{hm}) &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)} \\ &= \delta\mathbf{L}_h(x_{hm}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.3.1. Numerische Approximation

Für die Herleitung des Modellfehlerschätzers auf Basis der Fehleridentität in Gleichung (5.12) ist die Identifizierung von Termen höherer Ordnung, die bei der Approximation vernachlässigt werden können, die entscheidende Voraussetzung. Gemäß den Resultaten aus Abschnitt 4.4 ist dies möglich, wenn für die aktuelle Problemstellung zum einen eine Abschätzung der Operatornormen von  $\delta L_h$  und  $\delta L'_h(\bullet)$  und zum anderen die Stabilitätseigenschaft des Operators  $L'_h$  vorliegen. Dabei ist die zweite Voraussetzung gegeben durch die Ungleichung (4.33), das heißt  $L'_h$  erfülle

$$\|y_1 - y_2\|_{\mathbf{X}} \leq C_s \|\|L'_h(y_1) - L'_h(y_2)\|\|$$

für alle  $y_1, y_2 \in \mathbf{X}_h := V_h \times V_h \subset \mathbf{X} := V \times V$  mit

$$\|y_1\|_{\mathbf{X}} = \|(\psi_1, \varphi_1)\|_{\mathbf{X}} := (\|\psi_1\|_V^2 + \|\varphi_1\|_V^2)^{1/2}$$

und der entsprechenden Operatornorm  $\|\|\bullet\|\|$  gemäß Gleichung (4.31).

Für den Nachweis der Stabilitätsbedingung wird zunächst das Argument der Operatornorm genauer betrachtet. Unter Berücksichtigung der Definition von  $\mathcal{A}_h$  sowie der Bilinearität von  $a_h$  ergibt sich für  $y_1, y_2 \in \mathbf{X}_h$  und  $y \in \mathbf{X}$  beliebig

$$\begin{aligned} L'_h(y_1)(y) - L'_h(y_2)(y) &= \mathcal{L}'_h(\psi_1, \varphi_1)(\psi, \varphi) - \mathcal{L}'_h(\psi_2, \varphi_2)(\psi, \varphi) \\ &= J'(\psi_1)(\psi) - \mathcal{A}'_h(\psi_1)(\psi, \varphi_1) - \mathcal{A}_h(\psi_1)(\varphi) \\ &\quad - J'(\psi_2)(\psi) + \mathcal{A}'_h(\psi_2)(\psi, \varphi_2) + \mathcal{A}_h(\psi_2)(\varphi) \\ &= (J'(\psi_1) - J'(\psi_2))(\psi) + a_h(\psi, \varphi_2 - \varphi_1) \\ &\quad + a_h(\psi_2 - \psi_1, \varphi). \end{aligned}$$

Ist  $J$  ein lineares Zielfunktional, so gilt aufgrund der Elliptizität von  $a_h$  mit der zugehörigen Elliptizitätskonstanten  $C > 0$

$$\begin{aligned} \|\|L'_h(y_1) - L'_h(y_2)\|\| &= \sup_{0 \neq y \in \mathbf{X}} \frac{|L'_h(y_1)(y) - L'_h(y_2)(y)|}{\|y\|_{\mathbf{X}}} \\ &= \sup_{0 \neq y \in \mathbf{X}} \frac{|a_h(\psi, \varphi_2 - \varphi_1) + a_h(\psi_2 - \psi_1, \varphi)|}{\|y\|_{\mathbf{X}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \frac{|a_h(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) + a_h(\psi_2 - \psi_1, \psi_2 - \psi_1)|}{\|(\varphi_2 - \varphi_1, \psi_2 - \psi_1)\|_X} \\
 &\geq \frac{C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_V^2 + C\|\psi_1 - \psi_2\|_V^2}{(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_V^2 + \|\psi_1 - \psi_2\|_V^2)^{1/2}} \\
 &= C\|y_1 - y_2\|_X
 \end{aligned}$$

und die Stabilitätseigenschaft von  $L'_h$  ist mit  $C_S = C$  gezeigt.

**Bemerkung 5.3.** Auch für nichtlineare Zielfunktionale  $J$  lässt sich Ungleichung (4.33) zeigen, jedoch müssen zusätzliche Eigenschaften vorausgesetzt werden. Ist beispielsweise die erste Variation  $J'$  von  $J$  Lipschitzstetig in einer hinreichend großen Umgebung der Lösung  $u$  und erfüllt die entsprechende Lipschitzkonstante  $0 < L_{J'} < 2C$  mit der Elliptizitätskonstanten  $C$  von  $a_h$ , so gilt die Stabilitätseigenschaft mit  $C_S = C - \frac{L_{J'}}{2}$ .

Die Anwendung der Operatoren  $\delta L_h$  und  $\delta L'_h(\bullet)$  auf ein beliebiges Element dient als Ausgangspunkt für die Abschätzung der jeweiligen Operatornorm. Einfaches Umformen basierend auf den Definitionen von  $\mathcal{A}_h$  und  $\overline{\mathcal{A}}_h$  liefert

$$\begin{aligned}
 \delta L_h(x_{hm}) &= \overline{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(z_{hm}) - \mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) \\
 &= (\mathbb{P}(u_{hm}), \mathbb{P}(z_{hm}))_{K^{-1}} - (\mathbb{P}_h(u_{hm}), \mathbb{P}_h(z_{hm}))_{K^{-1}} \\
 &= (\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm}), \mathbb{P}(z_{hm}))_{K^{-1}}
 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 \delta L'_h(x_{hm})(y_h) &= \overline{\mathcal{A}}'_h(u_{hm})(\psi_h, z_{hm}) - \mathcal{A}'_h(u_{hm})(\psi_h, z_{hm}) \\
 &\quad + \overline{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(\varphi_h) - \overline{\mathcal{A}}_h(u_{hm})(\varphi_h) \\
 &= (\mathbb{P}(\psi_h), \mathbb{P}(z_{hm}) - \mathbb{P}_h(z_{hm}))_{K^{-1}} \\
 &\quad + (\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm}), \mathbb{P}(\varphi_h))_{K^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Die Beträge lassen sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen

$$\begin{aligned}
 |\delta L_h(x_{hm})| &\leq \|\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \|\mathbb{P}(z_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\leq \|\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \|K\|_{L^\infty}^{1/2} \|\operatorname{div}(z_{hm})\|_{L^2} \\
 &\leq \|\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \|K\|_{L^\infty}^{1/2} \|z_{hm}\|_{H^1}
 \end{aligned}$$



beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 |\delta \mathbf{L}'_h(x_{hm})(y_h)| &\leq \|P(\psi_h)\|_{L^2_{K^{-1}}} \|P(z_{hm}) - P_h(z_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\quad + \|P(u_{hm}) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \|P(\varphi_h)\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\leq (\|P(z_{hm}) - P_h(z_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\quad + \|P(u_{hm}) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}}) \|K\|_{L^\infty}^{1/2} \|y_h\|_{\mathcal{X}}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist die gewichtete  $L^2$ -Norm gegeben durch  $\|\bullet\|_{L^2_{K^{-1}}} := (\bullet, \bullet)_{K^{-1}}^{1/2}$ . Die vorangegangenen Überlegungen führen die ursprüngliche Betrachtung im Wesentlichen auf die Abschätzung der Differenz der Operatoren  $P$  und  $P_h$  bezüglich der gewichteten Norm  $\|\bullet\|_{L^2_{K^{-1}}}$  zurück. Das Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt zunächst

$$\begin{aligned}
 \|P(u_{hm}) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} &\leq \|P(u) - P(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\quad + \|P(u) - P_h(u)\|_{L^2_{K^{-1}}} \\
 &\quad + \|P_h(u) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}}.
 \end{aligned}$$

Für die nachfolgende Argumentation sei vorausgesetzt, dass sowohl die primale als auch die duale Lösung eine zusätzliche Regularität besitzt. Weiter sei  $\vartheta > 0$  so gewählt, dass  $u, z \in V \cap H^{1+\vartheta}(\Omega, \mathbb{R}^2)$  gilt. In diesem Fall liefert die a priori Abschätzungen  $\|u - u_{hm}\|_{H^1} \leq C_A h^\vartheta \|u\|_{H^{1+\vartheta}}$  für den ersten Term

$$\|P(u) - P(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \leq \|K\|_{L^\infty}^{1/2} \|u - u_{hm}\|_{H^1} \leq \|K\|_{L^\infty}^{1/2} C_A h^\vartheta \|u\|_{H^{1+\vartheta}}.$$

Der dritte Term lässt sich auf Basis des vorherigen Ergebnisses und der Definition des Operators  $P_h$  abschätzen durch

$$\begin{aligned}
 &\|P_h(u) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}}^2 \\
 &= (P_h(u) - P_h(u_{hm}), P_h(u) - P_h(u_{hm}))_{K^{-1}} \\
 &= (P_h(u) - P_h(u_{hm}), P(u) - P(u_{hm}))_{K^{-1}} \\
 &\leq \|P_h(u) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \|P(u) - P(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}}
 \end{aligned}$$

und

$$\|P_h(u) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \leq \|P(u) - P(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \leq \|K\|_{L^\infty}^{1/2} C_A h^\vartheta \|u\|_{H^{1+\vartheta}}.$$

Der noch zu behandelnde zweite Term gibt Auskunft über die Qualität der stückweise konstanten Approximation des mechanischen Drucks  $P(u)$  beziehungsweise  $P(z)$ . Unter Zuhilfenahme des Bramble-Hilbert-Lemmas folgt

$$\begin{aligned} \|P(u) - P_h(u)\|_{L^2_{K^{-1}}} &\leq \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|P(u) - I_h^{(0)}(P(u))\|_{L^2} \\ &\leq \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} C_I h^\vartheta \|P(u)\|_{H^\vartheta} \\ &\leq \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|K\|_{L^\infty} C_I h^\vartheta \|u\|_{H^{1+\vartheta}} \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} &\|P(u_{hm}) - P_h(u_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\ &\leq \left(2C_A + C_I \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|K\|_{L^\infty}^{1/2}\right) \|K\|_{L^\infty}^{1/2} h^\vartheta \|u\|_{H^{1+\vartheta}}. \end{aligned}$$

Mit analoger Vorgehensweise ergibt sich für die dualen Größen

$$\begin{aligned} &\|P(z_{hm}) - P_h(z_{hm})\|_{L^2_{K^{-1}}} \\ &\leq \left(2C_A + C_I \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|K\|_{L^\infty}^{1/2}\right) \|K\|_{L^\infty}^{1/2} h^\vartheta \|z\|_{H^{1+\vartheta}} \end{aligned}$$

und damit als obere Abschätzung für  $\delta L_h$  und  $\delta L'_h$

$$\begin{aligned} |\delta L_h(x_{hm})| &\leq C' \|x_{hm}\|_{\mathbf{X}}, \\ |\delta L'_h(x_{hm})(y_h)| &\leq C'' \|y_h\|_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C' &= \left(2C_A + C_I \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|K\|_{L^\infty}^{1/2}\right) \|K\|_{L^\infty} \|u\|_{H^{1+\vartheta}} h^\vartheta, \\ C'' &= \left(2C_A + C_I \|K^{-1/2}\|_{L^\infty} \|K\|_{L^\infty}^{1/2}\right) (\|u\|_{H^{1+\vartheta}} + \|z\|_{H^{1+\vartheta}}) \|K\|_{L^\infty} h^\vartheta. \end{aligned}$$

Für die hergeleiteten Konstanten  $C'$  und  $C''$  ist entscheidend, dass sich diese wie  $O(h^\vartheta)$  verhalten. Bei hinreichend kleiner Netzweite  $h$  lässt sich so die Bedingung  $\tilde{C} \ll 1$  mit  $\tilde{C} = \max\{C', C''\}$  realisieren.

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 4.4.1 werden alle Terme höherer Ordnung bezüglich der Konstanten  $\tilde{C}$  vernachlässigt. Aus der vereinfachten Modellfehleridentität in Gleichung (4.27) lässt sich schließlich ein numerisch auswertbarer Fehlerschätzer der Form

$$\begin{aligned}\eta_m &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) \\ &= (\mathbb{P}(u_{hm}) - \mathbb{P}_h(u_{hm}), \mathbb{P}(z_{hm}))_{K^{-1}} \\ &= (K \operatorname{div}(u_{hm}) + \mathbb{P}_h(u_{hm}), \operatorname{div}(z_{hm}))_0\end{aligned}$$

ableiten.

### 5.3.2. Fehlerlokalisierung und adaptive Modellwahl

**Fehlerlokalisierung** Die Fehlerlokalisierung des Modellfehlers erfolgt in Anlehnung an die in Abschnitt 5.2.4 beschriebene Vorgehensweise für den Diskretisierungsfehler. Mittels des dort definierten restringierten Residuumvektor  $\underline{R}^{(1)}$  lässt sich der Modellfehler ebenfalls auf die Knoten der Triangulierung lokalisieren, das heißt

$$\eta_m^i = \left| \underline{R}_i^{(1)} z_i \right|, \quad i = 0, \dots, N_h^{(1)}.$$

Der Elementfehlerindikator ergibt sich dann erneut durch die anteilmäßige Verteilung auf die angrenzenden Elemente.

**Adaptive Modellwahl** Basierend auf den zuvor definierten Fehlerindikatoren erfolgt die adaptive Anpassung des Modells mittels einer Fehlerreduktionsstrategie nach Dörfler, siehe [35]. Dabei wird jedoch der Wechsel des Modells nur in eine Richtung zugelassen, das heißt, wurde einmal das Referenzmodell ausgewählt, ist eine Rückkehr zum Ausgangsmodell nicht mehr möglich.

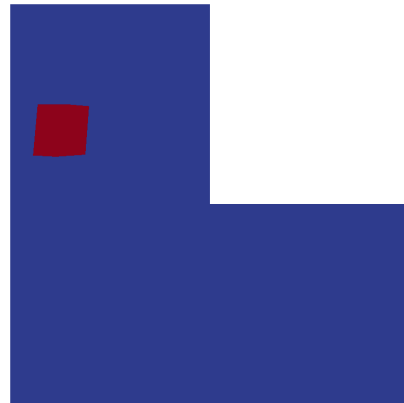
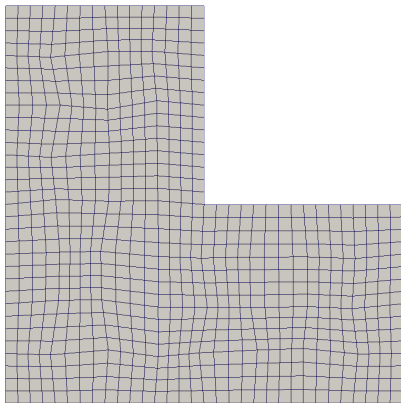
**Modell- und netzadaptiver Algorithmus** Der modell- und netzadaptive Algorithmus kombiniert die lokal adaptive Modellwahl und Netzver-

feinerung, wobei eine gewichtete Äquilibration beider Fehleranteile angestrebt wird. Als Ausgangspunkt dient die *einfachere* Modellbeschreibung des Problems, hier die Semilinearform  $\overline{\mathcal{A}}_h$ , für alle Elemente der ausreichend feinen Startdiskretisierung. Auf Basis der bestimmten Lösungen für die primale und duale diskrete Problemstellung erfolgt die Schätzung des Diskretisierungs- und des Modellfehlers. Die Äquilibration beider Fehleranteile erfolgt anschließend entweder anhand der globalen Schätzungen oder elementweise mittels der lokalisierten Fehleranteile. Beim globalen Vergleich resultiert ein größerer Modellfehler in einer reinen Anpassung der Modellverteilung, wohingegen in der umgekehrten Situation nur eine adaptive Netzverfeinerung durchgeführt wird. Auch beim Vergleich auf Elementebene bleibt das Kriterium dasselbe, jedoch erfolgt die Anpassung lediglich lokal für das aktuell betrachtete Element. Daher ist eine Kombination aus Modellanpassung und Netzverfeinerung innerhalb einer Iteration möglich. Für die modifizierte Problemstellung beginnt dann der Iterationszyklus erneut mit der Bestimmung der diskreten Lösungen. Dies wird solange wiederholt, bis ein vordefiniertes Abbruchkriterium erfüllt ist, beispielsweise durch das Unterschreiten einer gewissen Toleranz bezüglich des Fehlers gemessen im Zielfunktional.

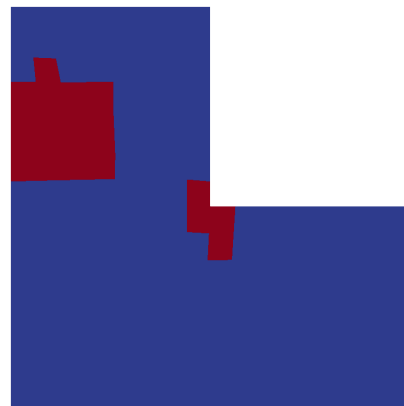
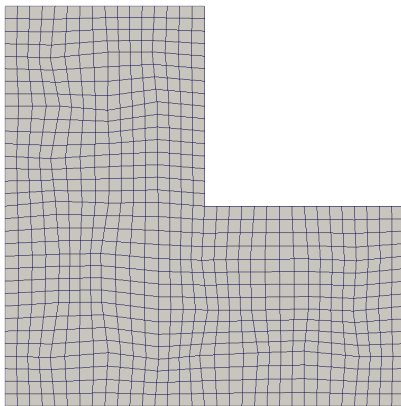
Der für das in Abschnitt 5.3.3 folgende Beispiel verwendete Algorithmus nutzt den globalen Vergleich von geschätztem Modell- und Diskretisierungsfehler. Gilt für die aktuelle Iteration  $|\eta_m| \geq 0.3|\eta_h|$ , so wird nur die Modellverteilung angepasst und dies nur bei den Elementen, deren Fehleranteile aufsummiert 62% des geschätzten globalen Modellfehlers ausmachen. Ist andererseits  $|\eta_m| < 0.3|\eta_h|$ , so wird eine adaptive Netzverfeinerung auf Basis der Optimal-Mesh-Strategie mit Ordnungsparameter 2 durchgeführt. Der Algorithmus terminiert, wenn der geschätzte Fehler die Toleranz  $TOL = 5 \cdot 10^{-7}$  unterschreitet.

### 5.3.3. Beispiel

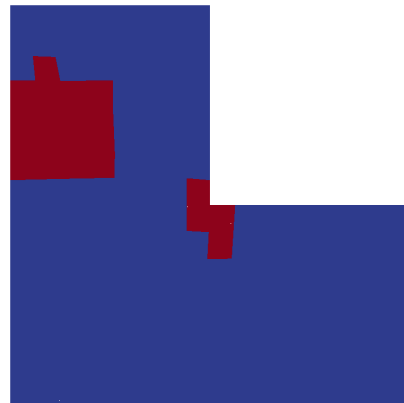
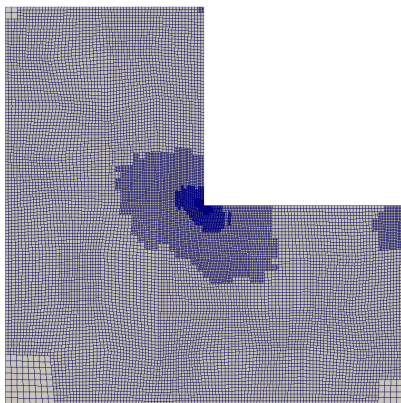
Für die Anwendung des zuvor beschriebenen modell- und netzadaptiven Algorithmus auf eine konkrete Problemstellung erfolgt eine Modifikation des Beispiels mit reduzierter Regularität aus Abschnitt 5.2.3 dahingehend, dass der Bereich mit fast inkompressiblem Materialverhalten auf eine Teilmenge  $B$  mit Radius  $R = 0.1$  und Mittelpunkt  $M = (-0.37, 0.19)$



(a) Iteration: 1.



(b) Iteration: 3.



(c) Iteration: 12.

Abbildung 5.5.: Unterschiedliche Iterationen des modell- und netzadaptiven Algorithmus mit Modellverteilung (rot:  $\mathcal{A}_h$ , blau:  $\overline{\mathcal{A}_h}$ ) rechts und dem zugehörigen Netz links.

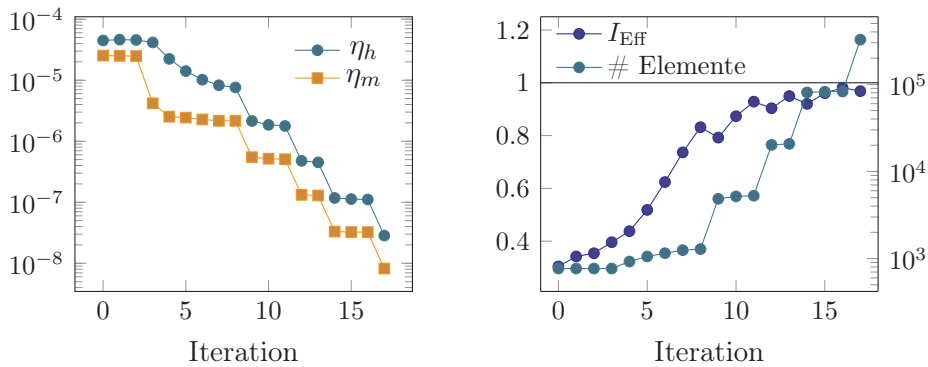
eingeschränkt wird. Die bis dato konstante Querkontraktion wird somit durch eine ortsabhängige Funktion der Form

$$\nu(x, y) := \begin{cases} 0.25, & \sqrt{(x + 0.37)^2 + (y - 0.19)^2} \geq R \\ c_\nu, & \sqrt{(x + 0.37)^2 + (y - 0.19)^2} < R \end{cases}$$

mit  $c_\nu = 0.5 - 10^{-7}$  ersetzt. Analog zur Vorgehensweise bei der charakteristischen Funktion  $\chi_B$  in Abschnitt 5.2.3 wird die unstetige Funktion  $\nu(x, y)$  durch eine stetig differenzierbare Näherung  $\nu_\alpha(x, y)$  approximiert. Die Konstruktion basiert hierbei auf Polarkoordinaten und der Übergang im Bereich  $[R - \alpha, R + \alpha]$ ,  $\alpha = 0.02$  wird durch ein kubisches Polynoms bezüglich des Radius  $r$  realisiert.

Abbildung 5.5 zeigt die Modellverteilung und die zugehörige adaptive Triangulierung an verschiedenen Iterationspunkten des modell- und netzadaptiven Algorithmus. Es ist zu beobachten, dass in den ersten drei Iterationen nur eine Anpassung der Modellverteilung stattfindet. Dabei lokalisiert der adaptive Algorithmus den Bereich mit beinahe inkompressiblem Materialverhalten und ändert lokal das Modell von voll integrierter Bilinearform  $a$  hin zur Verwendung der SRI mittels  $a_h$ . Fälschlicherweise suggeriert der Modellfehlerschätzer ebenfalls einen Wechsel im Bereich der einspringenden Ecke, der auch vollzogen wird. Diese fehlerhafte Identifizierung lässt sich auf die starke Singularität der Lösung an dieser Stelle zurückführen. Da der Modellfehlerschätzer im Wesentlichen auf Gradienteninformationen basiert, führt die reduzierte Regularität zu sehr großen Modellfehlerindikatoren, die einen entsprechenden Modellwechsel zur Folge haben.

Mit der vierten Iteration ist die finale Modellverteilung gefunden, sodass im Folgenden eine reine netzadaptive Rechnung stattfindet, wie Abbildung 5.6 belegt. Nachdem in den ersten vier Iterationen die Elementanzahl konstant bleibt, steigt diese in den nächsten sechs Iterationen moderat an, bis die einspringende Ecke hinreichend genau aufgelöst ist, und eine beinahe uniforme Verfeinerung erfolgt. Dieses Muster, das heißt zwei bis drei adaptive Verfeinerungen an der einspringenden Ecke gefolgt von einer fast uniformen Verfeinerung, wiederholt sich dann fortlaufend und entspricht dem typischen adaptiven Verhalten, dass auch



(a) Entwicklung des Modell- und Diskretisierungsfehlers während des adaptiven Algorithmus. (b) Effektivitätsindex für Diskretisierungsfehlerschätzung und Anzahl der verwendeten Zellen pro Iteration.

Abbildung 5.6.: Ergebnisse der Konvergenzanalyse bei Verwendung des modell- und netzadaptiven Algorithmus.

beim Laplace–Problem auf dem L-Gebiet zu beobachtet ist. Die in Abbildung 5.5(c) dargestellte Triangulierung weist die erwartete Elementverteilung mit Konzentrationen in der einspringenden Ecke, sowie an den Übergängen von Dirichlet- zu Neumannrandbedingungen auf. Entscheidend ist, dass im Bereich des fast inkompressiblen Materialverhaltens keine zusätzliche Verfeinerung stattfindet.

Die Entwicklungen des Modell- und Diskretisierungsfehlerschätzers im Verlauf des adaptiven Algorithmus werden in Abbildung 5.6(a) veranschaulicht. Es ist zu beobachten, dass zu Beginn die Werte beider Fehlerschätzer in derselben Größenordnung sind. Die Anpassung der Modellverteilung führt dazu, dass sich der Modellfehler zunächst stark verringert. Im Anschluss daran wird durch die adaptive Netzverfeinerung ebenfalls ein Reduktion des Diskretisierungsfehlers erreicht bis die gewünschte Äquilibration beider Fehleranteile vorliegt. Im Laufe der Rechnung bleibt dieser äquilibrierte Zustand bestehen, sodass keine erneute Anpassung der Modellverteilung notwendig ist. Es ist zudem anzumerken, dass trotz der konstanten Modellverteilung nach der vierten Iteration eine Reduktion des Modellfehlers stattfindet. Der Grund hierfür ist die  $h$ -Abhängigkeit des Modellfehlers, die die Definition mittels der Differenz der Diskretisierungsfehler der verschiedenen Modelle impliziert. Da

sich die einzelnen Diskretisierungsfehler jeweils wie  $O(h^2)$  verhalten, gilt dies ebenso für die Differenz und ist somit auch für den Modellfehler zu erwarten.

Der Effektivitätsindex des Diskretisierungsfehlerschätzers ist in Abbildung 5.6(b) dargestellt. Wie angestrebt, nähert sich dieser mit zunehmender Iterationszahl dem Wert 1 an und belegt die gute Fehlerrepräsentation der Fehlerschätzung. Interessant zu beobachten ist zudem, dass bereits in der ersten Iterationen durch die Anpassung der Modellverteilung eine merkliche Verbesserung der Diskretisierungsfehlerschätzung erreicht wird.



## Kapitel 6.

# Anwendungsbeispiel II: Volumenartige Schalenelemente

Die in Kapitel 5 betrachtete Anpassung der diskreten Bilinearform basierend auf der selektiv reduzierten Integration entspricht einer vergleichsweise einfachen Modifikation. In diesem Kapitel soll daher die wesentlich komplexere Situation, resultierend aus der Verwendung der in Kapitel 3.3 vorgestellten volumenartigen Schalenelemente, untersucht werden. Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 5 erfolgt auch hier die Betrachtung von Diskretisierungs- und Modellfehlerschätzung separat.

In Abschnitt 6.1 liegt der Fokus auf der Schätzung des Diskretisierungsfehlers. Dazu wird in einem ersten Schritt die in Abschnitt 4.2 hergeleitete Fehleridentität auf die konkrete Problemstellung unter Berücksichtigung der Formulierung für volumenartige Schalenelemente übertragen (Abschnitt 6.1.1) und anschließend der daraus resultierende Fehlerschätzer angegeben (Abschnitt 6.1.2). Der Nachweis der Funktionalität und die Bewertung der Qualität der Fehlerschätzung erfolgt anhand der in den Abschnitten 6.1.3 und 6.1.5 präsentierten numerischen Beispielen.

Die Schätzung des Modellfehlers ist Gegenstand von Abschnitt 6.2. Neben der Herleitung der Fehleridentität und der Angabe des zugehörigen Fehlerschätzers werden zudem konzeptionelle Aspekte hinsichtlich der Umsetzung eines modelladaptiven Algorithmus definiert.

## 6.1. Diskretisierungsfehlerschätzung

Der Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen ist die Problemstellung der vollständigen dreidimensionalen linearen Elastizität in Form der reinen Verschiebungsmethode – vergleiche Problemstellung 2.6. Unter Berücksichtigung der verwendeten Notation in Kapitel 4 ist demnach ein  $u \in V$  gesucht, sodass die Gleichung  $\mathcal{A}(u)(\varphi) = l(\varphi)$  für alle  $\varphi \in W$  erfüllt ist. Die zugehörigen Funktionenräume sind bei der Annahme von homogenen Dirichletrandbedingungen identisch, das heißt es ist  $V = W$  mit  $V = \{\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \gamma(\varphi) = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$ , wobei das beschränkte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  so gewählt ist, dass eine zulässige und quasiuniforme Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  bestehend aus Hexaedern gemäß Abschnitt 3.1 realisierbar ist. Für die Semilinearform  $\mathcal{A} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und die Linearform  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\mathcal{A}(\psi)(\varphi) := a(\psi, \varphi) - l(\varphi), \quad (6.1)$$

$$a(\psi, \varphi) := (\mathbb{C} : D\psi, D\varphi)_0, \quad (6.2)$$

$$l(\varphi) := (f, \varphi)_0 + (f_N, \gamma(\varphi))_{\Gamma_N} \quad (6.3)$$

mit dem vierstufigen Materialtensor  $\mathbb{C}$ .

### 6.1.1. Fehleridentität

Die diskrete Problemstellung beruht auf den in Abschnitt 3.3 vorgestellten volumenartigen Schalenelementen. Da die Herleitung dieses Finite Elemente Typs auf einer Approximation der Verschiebungsfunktion  $u \in V$  mittels stückweise trilinearere Funktionen beruht, ergibt sich für die zugehörigen diskreten Funktionenräume

$$V_h = W_h := \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^3), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Darüber hinaus ist aufgrund der Stabilisierungstechniken sowie den Anpassungen zur Vermeidung von Lockingeffekten die diskrete Problemstellung hinsichtlich der Semilinearform anzupassen. Anstelle der durch die Gleichungen (6.1) – (6.3) definierten Semilinearform  $\mathcal{A}$  wird die in

Problemstellung 3.2 eingeführte Semilinearform

$$\mathcal{A}_h^{\text{VS}}(\psi_h)(\varphi_h) := \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[ a_{\mathcal{K}}(\psi_h)(\varphi_h) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(\psi_h)(\varphi_h) - \int_{\mathcal{K}} f \varphi_h dx \right. \\ \left. - \int_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega} f_N \gamma(\varphi_h) dx, \right]$$

verwendet. Die diskrete Formulierung lautet somit:

Finde  $u_h \in V_h$ , sodass gilt:

$$\mathcal{A}_h(u_h)(\varphi_h) := \mathcal{A}_h^{\text{VS}}(u_h)(\varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Der Diskretisierungsfehler bezüglich eines benutzerdefinierten Zielfunktionals lässt sich mittels der in Satz 4.1 hergeleiteten Fehleridentität beschreiben durch

$$J(u) - J(u_h) \\ = \frac{1}{2} [\rho_h(u_h)(e_z) + \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \Delta \rho(u_h)(e_z) + \Delta \rho^*(u_h, z_h)(e_u)] \\ + \rho_h(u_h)(z_h) + \Delta \rho(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}.$$

Das Restglied  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  ist aufgrund der vorliegenden linearen Problemstellung nur abhängig vom Zielfunktional  $J$  und verschwindet für lineare und quadratische Abhängigkeiten von  $u$  beziehungsweise  $u_h$  vollständig. Die einzelnen Bestandteile der Fehleridentität sind gegeben durch

$$\rho_h(u_h)(\bullet) = - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[ a_{\mathcal{K}}(u_h)(\bullet) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(u_h)(\bullet) - \int_{\mathcal{K}} f \bullet dx \right. \\ \left. - \int_{\partial \mathcal{K} \cap \partial \Omega} f_N \gamma(\bullet) dx, \right], \\ \rho_h^*(u_h, z_h)(\bullet) = J'(u_h)(\bullet) - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} [a_{\mathcal{K}}(\bullet)(z_h) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(\bullet)(z_h)], \\ \Delta \rho(u_h)(\bullet) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} [a_{\mathcal{K}}(u_h)(\bullet) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(u_h)(\bullet)] - a(u_h, \bullet), \\ \Delta \rho^*(u_h, z_h)(\bullet) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} [a_{\mathcal{K}}(\bullet)(z_h) + a_{\mathcal{K}}^{\text{stab}}(\bullet)(z_h)] - a(\bullet, z_h).$$

Unter Berücksichtigung der sich durch einfaches Nachrechnen ergebenden Gleichung

$$\Delta\rho(u_h)(z_h) = \frac{1}{2}\Delta\rho(u_h)(z_h) + \frac{1}{2}\Delta\rho^*(u_h, z_h)(z_h)$$

gilt für die Fehleridentität die weitere Darstellung

$$\begin{aligned} & J(u) - J(u_h) \\ &= \frac{1}{2}[\rho_h(u_h)(e_z) + \rho_h^*(u_h, z_h)(e_u) + \Delta\rho(u_h)(z) + \Delta\rho^*(u_h, z_h)(u)] \\ &\quad + \rho_h(u_h)(z_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

### 6.1.2. Numerische Approximation

Die numerische Approximation der Fehleridentität in Gleichung (6.4) basiert auf den bereits in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Techniken, wobei für die hier betrachtete Situation zusätzliche Gegebenheiten zu berücksichtigen sind.

Aufgrund der Tatsache, dass das Restglied  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  nur vom Zielfunktional  $J$  abhängt lässt sich dieses als Term von höherer Ordnung bezüglich des Fehlers  $e_u = u - u_h$  vernachlässigen. Der zweite Schritt ist die Approximation der primalen und dualen Gewichte, genauer gesagt der in diesen Termen vorhandenen analytischen Größen  $u$  beziehungsweise  $z$ . Obwohl das in Abschnitt 5.1.2 beschriebene Konzept der Patchinterpolation ohne größeren Aufwand auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden kann, steht die dafür vorausgesetzte dreidimensionale Patchstruktur der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  im Widerspruch zur grundlegenden Idee der volumenartigen Schalenelemente. Der entscheidende Vorteil dieses Elementtyps ist die Verwendung von lediglich einem Element bezüglich der ausgezeichneten Dickenrichtung des betrachteten Gebiets. Die Realisierung einer dreidimensionalen Patchstruktur würde jedoch dazu führen, dass bereits die Ausgangstriangulierung zwei Elemente in Dickenrichtung besitzen muss, was die Anzahl der von Beginn an verwendeten Elemente verdoppelt. Darüber hinaus sind bei einer Verfeinerung für den Erhalt der Patchstruktur ebenfalls Verfeinerungen in Dickenrichtung notwendig, wodurch weitere nicht benötigte Elemente hinzukommen. Daher wird an-

stelle der dreidimensionalen Patchinterpolation eine auf den dreidimensionalen Fall angepasste zweidimensionale Version genutzt. Der Operator  $\Pi$  ist demnach gegeben durch

$$\Pi(\varphi) := (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{\varphi}), [\varphi]_3) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi} := ([\varphi]_1, [\varphi]_2)$$

und der  $i$ -ten Vektorkomponenten  $[\varphi]_i$  von  $\varphi$ . Für die Komponenten, die die Verschiebung in der Ebene mit Normalenvektor in der ausgezeichneten Dickenrichtung beschreiben, wird also die bereits in Abschnitt 5.1.2 eingeführte biquadratische Patchinterpolation, für die Komponente in Dickenrichtung die Identität verwendet. Mit Hilfe dieser Konstruktion ist somit nur noch eine Patchstruktur in der Ebene notwendig und auf Verfeinerungen in Dickenrichtung wird gänzlich verzichtet. Der auswertbare Fehlerschätzer ergibt sich letztlich durch die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung und der Anwendung des zuvor spezifizierten Operators  $\Pi$  zu

$$\begin{aligned} \eta_h = & \frac{1}{2} \left\{ \rho_h(u_h) (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{z}_h) - \tilde{z}_h, [0]_3) + \rho_h^*(u_h, z_h) (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{u}_h) - \tilde{u}_h, [0]_3) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \Delta\rho(u_h) (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{z}_h), [z_h]_3) + \Delta\rho^*(u_h, z_h) (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{u}_h), [u_h]_3) \right\} \\ & + \rho_h(u_h)(z_h). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dabei gilt für das duale Gewichte im Residuenanteil

$$\Pi(z_h) - z_h = (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{z}_h), [z_h]_3) - (\tilde{z}_h, [z_h]_3) = (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{z}_h) - \tilde{z}_h, [0]_3)$$

und im Zusatzterm  $\Pi(z_h) = (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{z}_h), [z_h]_3)$  beziehungsweise entsprechend für das primale Gewicht  $\Pi(u_h) - u_h = (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{u}_h) - \tilde{u}_h, [0]_3)$  und  $\Pi(u_h) = (\mathbf{I}_{(2),2h}^{(1),h}(\tilde{u}_h), [u_h]_3)$ .

**Bemerkung 6.1.** *Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die spezielle Konstruktion des Operators  $\Pi$  dazu führt, dass sowohl im primalen Residuum  $\rho_h$  als auch im dualen Residuum  $\rho_h^*$  mögliche Fehleranteile bezüglich der Dickenrichtung unberücksichtigt bleiben. Dies lässt sich jedoch dahingehend als sinnvoll begründen, da entsprechend der Voraussetzungen aus Abschnitt 3.3 die Geometrie und die Verschiebung in Dickenrichtung*

*mittels linearer Interpolation der Kopf- und Bodenknoten beziehungsweise der entsprechenden Knotenverschiebungen hinreichend genau wiedergegeben werden und somit mögliche auftretende Fehleranteile vernachlässigbar klein sind.*

**Bemerkung 6.2.** *Die numerische Auswertung des Fehlerschätzers in Gleichung 6.5 lässt sich nicht ohne Weiteres mit Hilfe der vorhandenen Implementierung des verwendeten volumenartigen Schalenelements umsetzen. Der Grund dafür liegt in der auf hohe Effizienz und minimalen numerischen Aufwand getrimmten Umsetzung. Diese nutzt exzessiv die Tatsache, dass der grundlegende Ausgangspunkt dieses Elementtyps trilineare Verschiebungselemente sind. Das heißt, auf Elementebene werden die einzelnen Basisfunktion, die Jakobimatrix, usw. bezüglich der Knotenverschiebungen so geschickt zerlegt, dass nur wenige Anteile bei der numerischen Quadratur berücksichtigt werden müssen. Diese Zerlegung lässt sich jedoch nicht ohne weiteres auf triquadratische Basisfunktionen, die zur Beschreibung der Patchinterpolierenden benötigt werden, übertragen. Um dennoch eine Auswertung zu ermöglichen wird die Patchinterpolierende stattdessen durch eine stückweise trilineare Funktion angenähert, die auf Elementebene der Interpolierenden der Knotenverschiebungen in den jeweiligen Elementeckpunkten entspricht. Somit ist es möglich die Residuen durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation von Elementsteifigkeitsmatrix und den zugehörigen reduzierten Vektoren der Knotenverschiebungen auszuwerten.*

### 6.1.3. Beispiel mit $C^\infty$ -Lösung

Für die erste Anwendung des in Gleichung (6.5) angegebenen Diskretisierungsfehlerschätzers wird ein Beispiel mit einer vorgegebenen Lösung  $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$  betrachtet. Bei der Herleitung einer solchen Lösung sind die besonderen Voraussetzungen der volumenartigen Schalenelemente zu berücksichtigen, das heißt es muss sichergestellt sein, dass die Abhängigkeit der einzelnen Verschiebungskomponenten maximal linear bezüglich der ausgezeichneten Dickenrichtung ist. Eine Möglichkeit diesen Voraus-

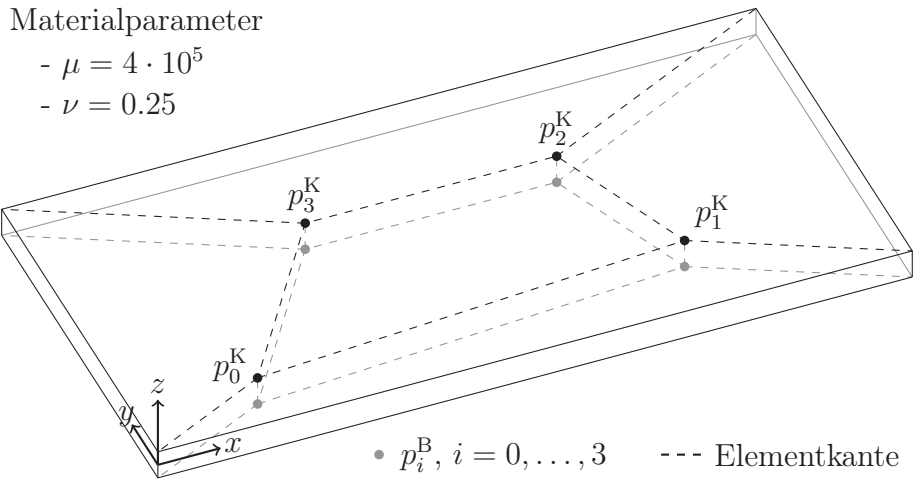


Abbildung 6.1.: Skizze des Gebiete  $\Omega$  mit initialer Diskretisierung.

setzung nachzukommen ist die Lösung  $u$  ausgehend von der Form

$$u(x, y, z) := \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \theta_0(x) \theta_1(y) \tau_2(z) \quad (6.6)$$

zu konstruieren. Dabei sind die  $\theta_i \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  für  $i = 0, 1$  beliebig und  $\tau_2$  maximal eine lineare Funktion. Als Gebiet wird zunächst eine einfache quaderförmige Geometrie mit den Abmessungen

$$\Omega := (0, 0.24) \times (0, 0.12) \times (-5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3})$$

betrachtet – vergleiche Abbildung 6.1. Die Kopf- und Bodenfläche des Quaders bilden den Neumannrand

$$\begin{aligned} \Gamma_N &:= (0, 0.24) \times (0, 0.12) \times \{-5 \cdot 10^{-3}\} \\ &\cup (0, 0.24) \times (0, 0.12) \times \{5 \cdot 10^{-3}\} \end{aligned}$$

und die Seitenflächen, auf denen Nullrandbedingungen gefordert werden, den Dirichletrand  $\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_N}$ . Aufgrund der Konstruktionsweise von  $u$  genügt es dafür zu sorgen, dass die Funktionen  $\theta_0$  und  $\theta_1$  auf  $\Gamma_D$  Null

sind. Eine zulässige Wahl ist hierbei

$$\theta_0(x) := \cos(\pi\tau_0(x)) + 1, \quad \text{und} \quad \theta_1(y) := \cos(\pi\tau_1(y)) + 1,$$

wobei sowohl die Funktion  $\tau_0: [0, 0.24] \mapsto [-1, 1]$  als auch die Funktion  $\tau_1: [0, 0.12] \mapsto [-1, 1]$  durch eine lineare Transformationen beschrieben wird. Die Konstanten  $c_0$ ,  $c_1$  und  $c_2$  werden so gewählt, dass Verschiebungen entsprechend eines linear elastischen Materialverhaltens vorliegen, das heißt  $c_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_1 = 7 \cdot 10^{-4}$  und  $c_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ . Die Volumenkraft lässt sich aufgrund der Glattheit der Lösung mittels der zugrundeliegenden Differentialgleichung zu  $f := -\operatorname{div}(\sigma(u))$  bestimmen. Für die Neumannrandbedingungen gilt  $f_N^K := \sigma(u) n^K$  beziehungsweise  $f_N^B := \sigma(u) n^B$  mit  $n^K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$  und  $n^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ .

Das vorliegende Gebiet  $\Omega$  wird mit zwei unterschiedlichen Ausgangstriangulierung vernetzt. Im ersten Fall besteht diese aus insgesamt 16 achsenparallelen Elementen mit jeweils 4 Elementen in  $x$ - beziehungsweise  $y$ - und einem Element in  $z$ -Richtung. Für den zweiten Fall wird eine Ausgangstriangulierung mit verzerrten Elementen basierend auf dem Beispiel in [31, Abschnitt 6.1 & 6.2] gewählt. Die zugehörige Patchtriangulierung, aus der die verwendete Starttriangulierung mittels uniformer Verfeinerung bezüglich der  $x$ - und  $y$ -Richtung entsteht, ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die inneren Punkte  $p_i^K \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, \dots, 3$  der Kopffläche sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_0^K &= 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}^\top, & p_1^K &= 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}^\top, \\ p_2^K &= 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0.5 \end{bmatrix}^\top, & p_3^K &= 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0.5 \end{bmatrix}^\top, \end{aligned}$$

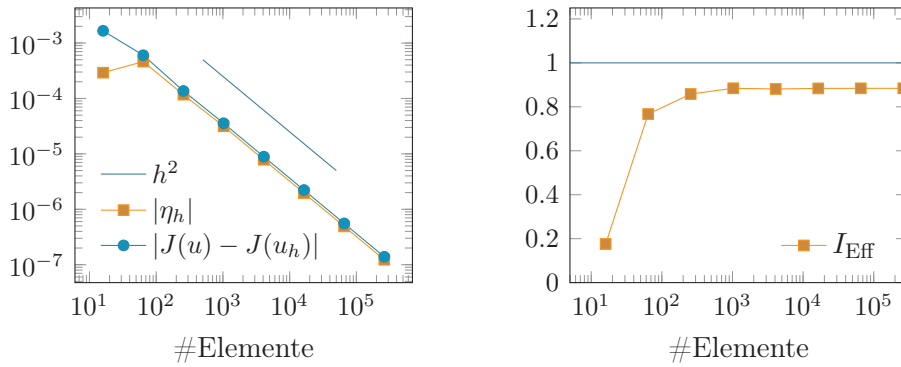
sowie die entsprechenden Punkte  $p_i^B \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, \dots, 3$  der Bodenfläche durch

$$p_i^B := \begin{bmatrix} p_{i,x}^K & p_{i,y}^K & -p_{i,z}^K \end{bmatrix}^\top.$$

In beiden Beispielrechnungen wird die Funktion  $\tau_2 \equiv -1.0$  und als Zielfunktional  $J$  der integrale Mittelwert der  $z$ -Komponente über ein Teilgebiet  $B := (0.14, 0.01) \times (0.2, 0.1) \times \{5 \cdot 10^{-3}\} \subset \Gamma_N$  gewählt.

Die zugehörigen Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.2 und 6.3 dargestellt. Abbildung 6.2(a) zeigt das Konvergenzverhalten für den Feh-





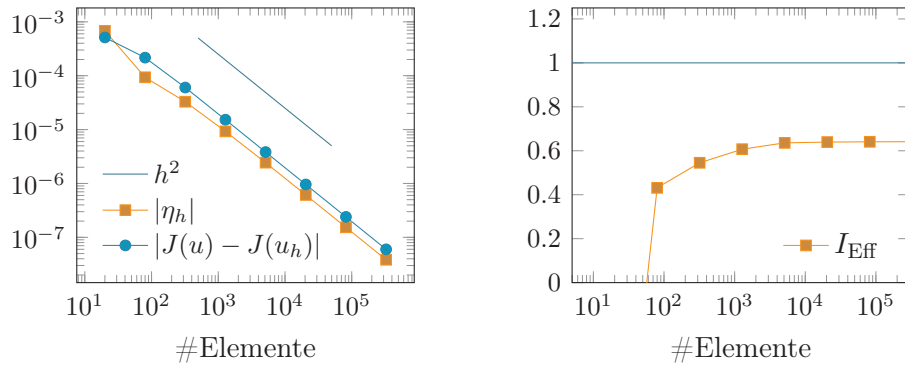
(a) Vergleich tatsächlicher und geschätzter Fehler.

(b) Effektivitätsindex für  $\eta_h$ .

Abbildung 6.2.: Ergebnisse der Konvergenzanalyse bei achsenparalleler Ausgangstriangulierung und uniformer Verfeinerung in  $x$ - $y$ -Richtung.

ler  $J(u) - J(u_h)$  so wie für den Fehlerschätzer  $\eta_h$ . Wie aufgrund der  $C^\infty$ -Eigenschaft der Lösung und der Konstruktion der volumenartigen Schalenelemente basierend auf trilinearen Elementen zu erwarten, konvergieren sowohl der exakte Fehlerwert als auch der Wert des geschätzten Fehlers mit der Ordnung  $O(h^2)$  gegen Null. Interessant zu beobachten ist, dass bereits mit 64 Elementen die Fehlerschätzung den tatsächlichen Fehler gut wieder gibt und sich dies im weiteren Verlauf nur minimal verbessert. Der in Abbildung 6.2(b) visualisierte Effektivitätsindex verdeutlicht diese Tatsache. Im Zuge der ersten Verfeinerung springt dieser von ca. 0.18 auf 0.77 und stabilisiert sich mit zunehmender Verfeinerung um den Wert 0.88. Anders als in den Beispielen in Kapitel 5 strebt der Effektivitätsindex in der hier betrachteten Situation nicht gegen Eins. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da aufgrund der in Bemerkung 6.2 erläuterten problematischen Auswertung von  $\mathcal{A}_h$  für die Approximation höherer Ordnung eine Vielzahl von Fehlerinformationen verloren gehen. Eine Annäherung des Effektivitätsindex an Eins ist daher unter diesen Voraussetzungen nicht zu erwarten.

Die Besonderheit am zweiten Beispiel ist die stark verzerrte Ausgangstriangulierung, die im Zusammenhang mit der vergleichsweise kleinen Ausdehnung in der ausgezeichneten Dickenrichtung häufig zu weiteren Lockingeffekten führt. Die in Abbildung 6.3 dargestellten Verläufe zeigen



(a) Vergleich tatsächlicher und geschätzter Fehler.

(b) Effektivitätsindex für  $\eta_h$ .

Abbildung 6.3.: Ergebnisse der Konvergenzanalyse mit verzerrter Ausgangstriangulierung und uniformer Verfeinerung in  $x$ - $y$ -Richtung.

jedoch, dass auch unter diesen Voraussetzungen mit Hilfe der volumenartigen Schalenelemente gute Ergebnisse erzielt werden. Sowohl der exakte Fehler  $J(u) - J(u_h)$  als auch der geschätzte Fehler  $\eta_h$  konvergieren erneut mit optimaler Ordnung  $O(h^2)$  gegen Null – vergleiche Abbildung 6.3(a). Im Gegensatz zur achsenparallelen Ausgangstriangulierung stellt sich in der betrachteten Situation das asymptotische Verhalten erst mit der dritten Verfeinerung ein. Die zunächst schlechte Ausgangsfehlerschätzung verbessert sich durch die erste Verfeinerung deutlich. Dieses Verhalten spiegelt sich auch im Verhalten des Effektivitätsindex – vergleiche Abbildung 6.3(b) – wieder, der nach der ersten Verfeinerung bereits bei 0.43 ist und sich im weiteren Verlauf der Rechnung um den Wert 0.64 stabilisiert. Auch in diesem Fall ist eine Annäherung des Effektivitätsindex an den Wert Eins nicht zu erwarten. Es ist eher erstaunlich, dass trotz der starken Netzverzerrung und der technisch nicht optimalen Auswertung des Fehlerschätzers dieser entsprechend gute Werte liefert.

### 6.1.4. Beispiel mit $C^\infty$ -Lösung und adaptiven Techniken

Die zuvor präsentierten Ergebnisse haben gezeigt, dass der hergeleitete Diskretisierungsfehlerschätzer unter den gegebenen Bedingungen gu-

te Ergebnisse liefert. In einem nächsten Schritt soll die generelle Funktionalität der adaptiven Techniken für volumenartige Schalenelemente überprüft werden. Hierzu erfolgt die erneute Betrachtung der vorherigen Beispiele jedoch mit adaptiver statt uniformer Verfeinerung.

Aufgrund der  $C^\infty$ -Eigenschaft der Lösung wird bereits bei uniformer Verfeinerung in  $x$ - $y$ -Richtung die maximale Konvergenzordnung erzielt, sodass in dieser Hinsicht keine Verbesserung durch eine adaptive Verfeinerung erzielt werden kann. Andererseits sollte sich diese auch nicht verschlechtern. Im Optimalfall ist trotzdem eine Reduktion des Aufwandes möglich und zwar in dem Sinne, dass mit der gleichen Anzahl an Elementen ein geringerer Fehler erzielt wird. Der Fehler bei der Verwendung der adaptiven Verfeinerung ist also um einen konstanten Faktor kleiner als im Zuge der uniformen Verfeinerung.

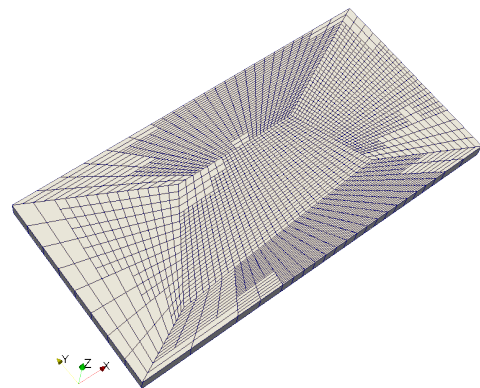
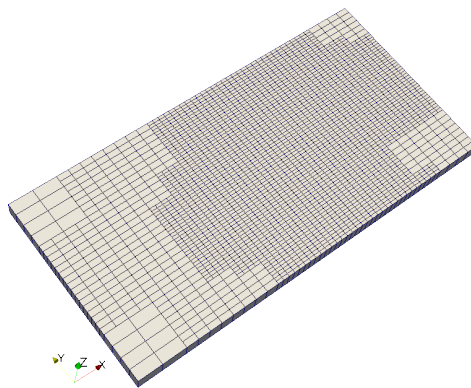
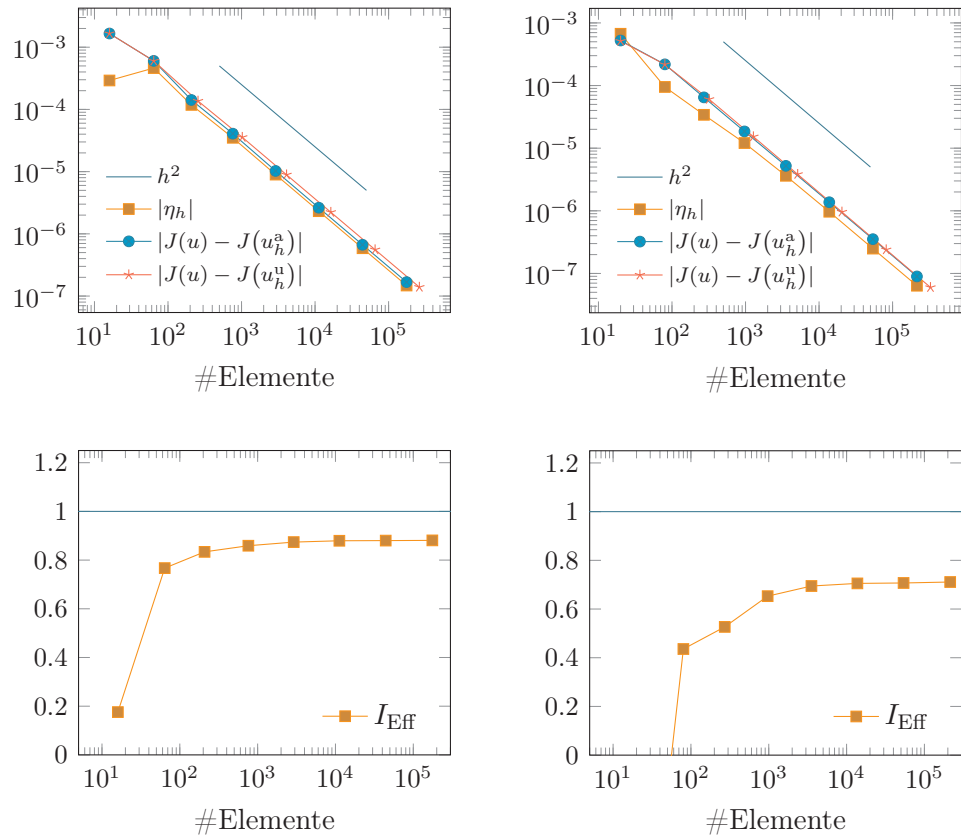
Für die benötigte Lokalisierung des global geschätzten Diskretisierungsfehlers wird erneut auf die Filterungstechnik zurückgegriffen. Die entsprechenden Prolongations-, Interpolations- und Filterungsoperatoren ergeben sich analog zur Konstruktion des Operators  $\Pi$  durch Kombination aus den bereits in Abschnitt 5.1.2 eingeführten Operatoren für die ersten beiden Komponenten und der zugehörigen Identität für die dritte. Die Auswertung erfolgt hier bezüglich des diskreten Funktionenraums

$$V_h^{(2)} := \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_2(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^2) \times Q_1(\widehat{\mathcal{K}}), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h \right\},$$

sodass mit Hilfe der entsprechenden restringierten Residuumsvektoren  $\underline{R}^{(1)}$ ,  $\underline{R}^{(2)}$ ,  $\underline{R}^{*(1)}$  und  $\underline{R}^{*(2)}$  – vergleiche Abschnitt 5.2.4 – eine Lokalisierung auf die Elementknoten gemäß

$$\begin{aligned} \eta_h^i &= \frac{1}{2} \left| \left( \underline{R}_i^{(2)} - \underline{R}_i^{(1)} \right) \underline{z}_i^\pi \right| + \frac{1}{2} \left| \left( \underline{R}_i^{*(2)} - \underline{R}_i^{*(1)} \right) \underline{u}_i^\pi \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \underline{R}_i^{(2)} \underline{z}_i^\pi \right| + \frac{1}{2} \left| \underline{R}_i^{*(2)} \underline{u}_i^\pi \right|, \quad i = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

möglich ist. Dabei beschreibt  $N_h$  die globale Anzahl der Freiheitsgrade von  $V_h$ . Aufgrund der besonderen Konstruktion der verwendeten Operatoren reduziert sich die Darstellung für den Fall das  $i$  einen Freiheitsgrad



(a) Unverzerrte Starttriangulierung.

(b) Verzerrte Starttriangulierung.

Abbildung 6.4.: Ergebnisse der Konvergenzanalyse bei adaptiver Verfeinerung in  $x$ - $y$ -Richtung (Triangulierungen jeweils im 5. Iterationsschritt).

bezüglich der dritten Komponente beschreibt auf

$$\eta_h^i = \frac{1}{2} \left| \underline{R}_i^{(2)} \underline{z}_i^\pi \right| + \frac{1}{2} \left| \underline{R}_i^{*(2)} \underline{u}_i^\pi \right|.$$

Die Resultate der adaptiven Rechnungen sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Dabei zeigt der linke Teil 6.4(a) den Fall der achsenparallelen, der rechte Teil 6.4(b) den der verzerrten Ausgangstriangulierung. Neben dem Verlauf des Fehlerschätzer  $\eta_h$  ist zu Vergleichszwecken der exakte Fehler bezüglich der adaptiv bestimmten Lösung  $u_h^a$  und der mittels uniformer Verfeinerungen bestimmten Lösung  $u_h^u$  angegeben. Dieser Vergleich zeigt, dass die optimale Konvergenzrate von  $O(h^2)$  auch im Rahmen der adaptiven Verfeinerung erreicht wird. Während im Falle der verzerrten Ausgangstriangulierung die Fehlerverläufe nahezu übereinstimmen ist im nicht verzerrten Fall sogar eine Reduktion des Fehlers um einen sehr kleinen konstanten Faktor gegenüber der uniformen Verfeinerung zu beobachten. Die Qualität der Fehlerschätzung ist im Vergleich zum uniformen Fall identisch beziehungsweise leicht verbessert, was anhand der Effektivitätsindizes, die sich um den Wert 0.88 beziehungsweise 0.71 stabilisieren, nachzuvollziehen ist. Auch die aus dem adaptiven Algorithmus resultierenden Triangulierungen zeigen die erwartete Konzentration von Elementen im Einflussbereich des Zielfunktional.

### 6.1.5. Beispiel mit reduzierter Regularität

Im Anschluss an die zuvor betrachteten Beispiele mit einer glatten  $C^\infty$ -Lösung wird nachfolgend eine analytische Lösung mit reduzierter Regularität vorgegeben. Diese basiert auf der in Abschnitt 5.2.3 bereits indirekt verwendeten Singularitätenfunktion für die Kirchhoffsche Platte – vergleiche [64]. Als zugrundeliegende Geometrie wird erneut ein in der  $x$ - $y$ -Ebene L-förmiges Gebiet betrachtet, dass jedoch in diesem Fall eine konstante Ausdehnung in  $z$ -Richtung hat, das heißt es ist

$$\Omega := (-0.5, 0.5)^2 \setminus [0, 0.5]^2 \times (0, 1 \cdot 10^{-2}).$$

Der Dirichletrand mit homogenen Randbedingungen ist gegeben durch  $\Gamma_D = \Gamma_{D,1} \cup \Gamma_{D,2}$  mit

$$\begin{aligned}\Gamma_{D,1} &:= (0, 0.5) \times \{0\} \times (0, 1 \cdot 10^{-2}), \\ \Gamma_{D,2} &:= \{0\} \times (0, 0.5) \times (0, 1 \cdot 10^{-2})\end{aligned}$$

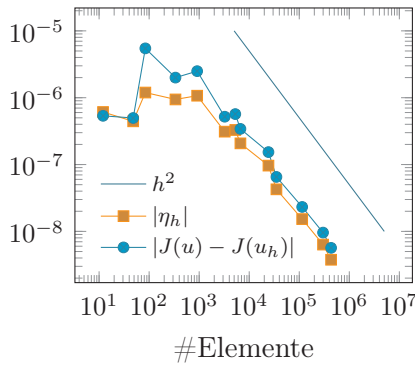
und der Neumannrand durch  $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_D}$ . Für die einzelnen Komponenten der Lösung  $u$ , angegeben in Zylinderkoordinaten, gilt gemäß der Plattentheorie von Kirchhoff

$$u(r, t, z) := \begin{bmatrix} -\tau_3(z) \left( \cos(t) \partial_r s(r, t) - \frac{\sin(t)}{r} \partial_t s(r, t) \right) \\ -\tau_3(z) \left( \sin(t) \partial_r s(r, t) + \frac{\cos(t)}{r} \partial_t s(r, t) \right) \\ s(r, t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi,$$

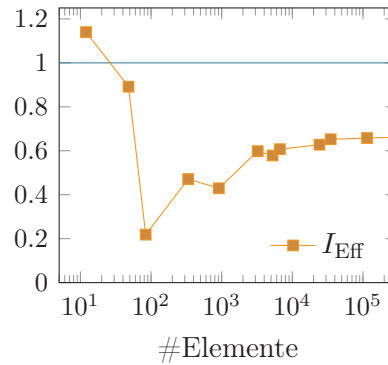
wobei  $\tau_3: [0, 1 \cdot 10^{-2}] \mapsto [-5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}]$  eine bijektive, lineare Abbildung ist. Die Funktion  $s$  entspricht der Lösung der skalaren biharmonischen Plattengleichung mit Singularität in der einspringenden Ecke des L-Gebietes ( $r = 0$ ) und ist gegeben durch  $s(r, t) := r^{c_0+1}\theta(t)$  mit  $\theta$  gemäß der Gleichungen (5.10) und (5.11) in Abschnitt 5.2.3. Analog zu den Beispielen im vorherigen Abschnitt 6.1.3 lassen sich die Neumannrandbedingungen mittels  $f_N := \sigma(u) n$  und die Volumenkraft anhand der Differentialgleichung  $f := -\operatorname{div}(\sigma(u))$  bestimmen, wobei in diesem Fall für die Materialparameter  $\mu = 5 \cdot 10^5$  und  $\nu = 0.0$  angenommen wird. Als Zielfunktional  $J$  wird der integrale Mittelwert der  $z$ -Komponente von  $u$  auf der gesamten Bodenfläche  $(-0.5, 0.5)^2 \setminus [0, 0.5]^2 \times \{0\}$  betrachtet.

Abbildung 6.5 zeigt die Ergebnisse der adaptiven Rechnung. Neben dem tatsächlichen und dem geschätzten Fehlerverlauf sowie der Entwicklung des zugehörigen Effektivitätsindex (Abbildungen 6.5(a) und 6.5(b)) sind in den Abbildungen 6.5(c) und 6.5(d) die Triangulierungen nach der 3. beziehungsweise 7. adaptiven Verfeinerung dargestellt.

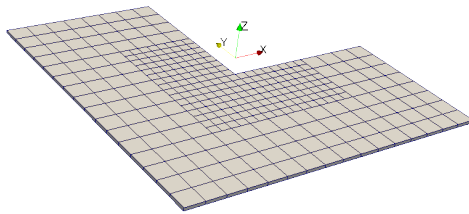
Zu Beginn der Rechnung ist sowohl beim geschätzten als auch beim tatsächlichen Fehlerwert ein Einschwingverhalten zu beobachten. Ist von der ersten zur zweiten Iteration noch eine Reduktion beider Größen zu erkennen, so erfolgt in Rahmen der nächsten Iteration ein Anstieg des geschätzten Fehler ungefähr um den Faktor 3. Der tatsächliche Fehler vergrößert sich sogar um einen Faktor 10. Dieser Zyklus wiederholt sich,



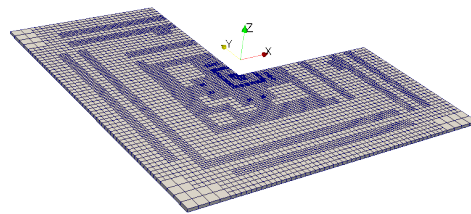
(a) Vergleich von tatsächlichem und geschätztem Fehler.



(b) Effektivitätsindex für  $\eta_h$ .



(c) Triangulierung nach der 3. adaptiven Verfeinerung.



(d) Triangulierung nach der 7. adaptiven Verfeinerung.

Abbildung 6.5.: Ergebnisse der Konvergenzanalyse für das L-Gebiet mit adaptiver Verfeinerung.

wenn auch nicht in dieser deutlichen Ausprägung, zwei weitere Male in den Iterationen 3, 4, 5 und 5, 6, 7 bevor sowohl geschätzter als auch tatsächlicher Fehler mit der erwarteten Ordnung  $O(h^2)$  stetig kleiner werden. Der Effektivitätsindex in Abbildung 6.5(b) belegt auch für dieses Beispiel, unter Berücksichtigung der vorliegenden Gegebenheiten, eine gute Repräsentation des tatsächlichen Fehlers.

Die dargestellten Vernetzungen nach 3 beziehungsweise 7 adaptiven Verfeinerungen führen zu zwei unterschiedlichen Bewertungen. Ist die Elementverteilung in Abbildung 6.5(c) mit einer Konzentration um die einspringende Ecke noch wie erwartet, zeigt Abbildung 6.5(d) einen eher unüblichen Verfeinerungsverlauf. Zwar wird die einspringende Ecke weiterhin feiner aufgelöst, jedoch ist zusätzlich eine wellenartige Ausbreitung von verfeinerten Region zu beobachten. Eine erneute Betrachtung des Einschwingverhaltens der Verläufe in Abbildung 6.5(a) zeigt, dass eine

Vergrößerung stets im Zusammenhang mit einer adaptiven Verfeinerung auftritt, während bei der nachfolgend (fast) uniformen Verfeinerung stets eine Reduktion des Fehlers stattfindet. Dies lässt darauf schließen, dass hinsichtlich der Fehlerlokalisierung, wie auch schon im Abschnitt 5.2.2 für SRI beobachtet, weitere Untersuchungen notwendig sind.

**Bemerkung 6.3** (Gültigkeit der Fehleridentität). *Das in dieser Arbeit entwickelte allgemeine Konzept beruht auf der Annahme, dass die modifizierte diskrete Semilinearform  $\mathcal{A}_h$  auf dem Produktraum  $V \times W$  beziehungsweise in der hier vorliegenden Situation auf  $V \times V$  operiert. Diese Voraussetzung kann jedoch dahingehend abgeschwächt werden, dass  $\mathcal{A}_h$  neben allen diskreten Funktionen lediglich für die beiden analytischen Lösungen  $u$  und  $z$  auswertbar sein muss. Auf diese Art und Weise ist die Gültigkeit der Fehleridentität aus Gleichung (6.4) zumindest für  $u, z \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbb{N} \ni m \geq 3$  nachweisbar. Darüber hinaus zeigt das Beispiel in Abschnitt 6.1.5, dass die aus der Fehleridentität abgeleitete numerisch auswertbare Approximation gemäß Gleichung (6.5) auch für Lösungen mit weniger Regularität eine gute Repräsentation des tatsächlichen Fehlers liefert. Dies wird insbesondere durch den zugehörigen Effektivitätsindex entsprechend belegt – vergleiche Abbildung 6.5(b).*

## 6.2. Modellfehlerschätzung

Im Anschluss an die Anwendung des Diskretisierungsfehlerschätzers auf verschiedene konkrete Problemstellungen im vorherigen Abschnitt 6.1, liegt der Fokus in diesem Abschnitt auf der Betrachtung des Modellfehlers. Hierzu wird als erstes die Modellhierarchie festgelegt. Als Referenzmodell dient in diesem Fall die diskrete Problemstellung basierend auf einer trilinearen Standarddiskretisierung – vergleiche Abschnitt 3.1 – und der über die Gleichungen (6.1) – (6.3) definierten kontinuierlichen Semilinearform  $\mathcal{A}$ . Die zu vergleichende Modellierung wird anhand der Semilinearform  $\mathcal{A}_h^{\text{VS}}$  für die volumenartigen Schalenelemente realisiert. Im Gegensatz zum Anwendungsbeispiel der selektiv reduzierten Integration in Abschnitt 5.3 beschränkt sich der Unterschied in der hier betrachteten Situation nicht nur auf die Semilinearformen, sondern auch auf die verwendeten diskreten Funktionenräume. Obwohl der Polynomgrad der



Ansatzfunktionen der gleiche ist, sind die zugrundeliegenden Triangulierungen verschieden. Wie bereits in Abschnitt 6.1.2 erwähnt sind die volumenartigen Schalenelemente dafür ausgelegt mit lediglich einem Element in der ausgezeichneten Dickenrichtung  $z$  und einer vergleichsweise geringen Anzahl bezüglich der  $x$ - und  $y$ -Richtungen zu arbeiten. Wird hingegen die Standarddiskretisierung auf dieser Triangulierung aufgebaut, so impliziert dies unweigerlich das Auftreten von jeglichen, bei den volumenartigen Schalenelementen kompensierten, Lockingeffekten. Zudem resultiert aus dem extremen Seitenverhältnis der einzelnen Elemente eine große Konstante in der Quasiuniformitätsabschätzung, die zusätzlich die Kondition der Steifigkeitsmatrix negativ beeinflusst und somit die Qualität der berechneten numerischen Lösung verschlechtert. Daher ist für einen sinnvollen Vergleich der beiden Modelle in Bezug auf die Standarddiskretisierung eine deutlich feinere Triangulierung in der  $x$ - und  $y$ -Richtung, eventuell auch in  $z$ -Richtung, notwendig. Für die Semilinearformen und die Funktionenräume ergibt sich – unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abschnitt 4.3 – demnach

$$\mathcal{A}_h(\psi_h, \varphi_h) = \mathcal{A}_h^{\text{VE}}(\psi_h, \varphi_h) := \mathcal{A}(\psi_h, \varphi_h) \quad \forall (\psi_h, \varphi_h) \in V_h \times V_h$$

mit

$$V_h = V_h^{\text{VE}} := \left\{ \psi_h \in V \mid \psi_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^3), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h^{\text{VE}} \right\}$$

und

$$\overline{\mathcal{A}}_h(\overline{\psi}_h, \overline{\varphi}_h) = \mathcal{A}_h^{\text{VS}}(\overline{\psi}_h, \overline{\varphi}_h) \quad \forall (\overline{\psi}_h, \overline{\varphi}_h) \in \overline{V}_h \times \overline{V}_h$$

mit

$$\overline{V}_h = V_h^{\text{VS}} := \left\{ \overline{\psi}_h \in V \mid \overline{\psi}_h|_{\mathcal{K}} = \widehat{\psi}_h \circ F_{\mathcal{K}}^{-1}, \widehat{\psi}_h \in Q_1(\widehat{\mathcal{K}}, \mathbb{R}^3), \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h^{\text{VS}} \right\}.$$

Wird zusätzlich vorausgesetzt, dass die Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{\text{VE}}$  für die trilinearen Volumenelemente durch eine entsprechende Verfeinerung der Ausgangstriangulierung  $\mathcal{T}_h^{\text{VS}}$  der volumenartigen Schalenelemente erzeugt wird, so gilt für die diskreten Funktionenräume die Teilraumbeziehung  $\overline{V}_h \subset V_h$ . In diesem Fall ergibt sich die Identität für den Modellfehler

gemäß Korollar 4.7 zu

$$\begin{aligned} J(u_h) - J(u_{hm}) &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(3)}. \end{aligned}$$

Die Verwendung der Rechteck- anstelle der Trapezregel liefert mit dem Restglied zweiter Ordnung bezüglich  $e_m$  die Darstellung

$$J(u_h) - J(u_{hm}) = -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) + \delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m) + \mathcal{R}_m^{(2)}.$$

### Numerische Auswertung, Lokalisierung und lokal adaptive Anpassung des Modells

Durch die Vernachlässigung des Restgliedes  $\mathcal{R}_m^{(2)}$  beziehungsweise  $\mathcal{R}_m^{(3)}$  und der Terme  $\delta\mathbf{L}'_h(x_{hm})(e_m)$  und  $\bar{\mathbf{L}}'_h(x_{hm})(e_m)$  ergibt sich der Modellfehlerschätzer zu

$$\eta_m := -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}).$$

Für die numerische Auswertung müssen die primale und duale Lösung  $u_{hm}, z_{hm} \in \bar{V}_h$  als Elemente von  $V_h$  interpretiert werden. Seien dazu  $\bar{v}_i, i = 1, \dots, \bar{N}$  eine Basis von  $\bar{V}_h$  und  $v_i, i = 1, \dots, N$  eine Basis von  $V_h$ . Aufgrund der vorliegenden Teilraumbeziehung sowie der Bedingung an die Triangulierungen lässt sich der Prolongationsoperator  $P: \bar{V}_h \rightarrow V_h$  definieren durch

$$P(\bar{\varphi}_h) = P\left(\sum_{i=1}^{\bar{N}} \varphi_i \bar{v}_i\right) = \sum_{j=1}^N [P\varphi]_j v_j$$

mit der Prolongationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{N \times \bar{N}}$ . Dabei sind die Koeffizienten der Matrix  $P$  gegeben durch die Auswertung der Basisfunktionen  $\bar{v}_i$  in den Definitionspunkten der Freiheitsgrade zur Basis  $v_j$ . Insbesondere ist der Operator  $P$  für Elemente aus  $\bar{V}_h$  die Identität, sodass sich folgende

Darstellung für den geschätzten Modellfehler ergibt

$$\begin{aligned}\eta_m &= -\mathcal{A}_h(u_{hm})(z_{hm}) = -\mathcal{A}_h(\mathbb{P}(u_{hm}))(\mathbb{P}(z_{hm})) \\ &= -\sum_{j=1}^N \mathcal{A}_h(\mathbb{P}(u_{hm}))(v_j) [P\underline{z}]_j \\ &= \underline{R}^\top \underline{z}.\end{aligned}$$

Dabei ist  $\underline{R}_i = -\sum_{k=1}^N P_{ki} \mathcal{A}_h(\mathbb{P}(u_{hm}))(v_k)$  für  $i = 1, \dots, \overline{N}$ . Mit Hilfe des Vektors  $\underline{R} \in \mathbb{R}^{\overline{N}}$  lässt sich zudem der Modellfehler auf die Knoten der Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{\text{VS}}$  lokalisieren. Es gilt

$$\eta_m^i = |\underline{R}_i \underline{z}_i|, \quad i = 1, \dots, \overline{N}.$$

Die für eine lokal adaptive Modellwahl benötigten Elementfehlerindikatoren resultieren schließlich aus der anteilmäßigen Verteilung auf die angrenzenden Element. Diese können verwendet werden, um beispielsweise anhand einer festen Ratenstrategie die Elemente zu identifizieren, die maßgeblich für den geschätzten Modellfehler verantwortlich sind und bei deren ein Modellwechsel den Modellfehler signifikant reduziert.

### Technische Voraussetzungen für die praktische Umsetzung

Für die praktische Umsetzung der bis dato rein theoretischen Überlegungen sind zusätzliche technische Rahmenbedingungen zu erfüllen. Zunächst muss für die schlichte Auswertung des Fehlerschätzers die Prolongation von  $\overline{V}_h$  nach  $V_h$  realisiert werden. Dies setzt voraus, dass entweder eine entsprechend Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{\text{VE}}$  bereits vorliegt, oder für jedes Element der Triangulierung  $\mathcal{T}_h^{\text{VS}}$  erzeugt werden kann. Diese Umwandlung eines volumenartigen Schalenelements in ein oder mehrere Volumenelemente ist auch für die Umsetzung eines modelladaptiven Algorithmus entscheidend. Dabei stellt sich die Frage, wie und in wie viele Volumenelemente ein volumenartiges Schalenelement zerlegt wird und wie die vorhandenen Daten transferiert werden können.

Der zweite Punkt, den es zu berücksichtigen gilt, ist, dass im Laufe einer modelladaptiven Rechnung in der vorliegenden Triangulierung sowohl volumenartige Schalenelemente als auch reine Volumenelemente auftre-

ten. Es liegt demnach eine hybride Vernetzung, wie sie in Abschnitt 3.4 beschrieben wird, vor, wodurch sich die zu betrachtende Problemstellung dahingehend ändert, dass neben den Größen auf den Teilgebieten  $\Omega_{\text{VE}}$  und  $\Omega_{\text{VS}}$  auch die Lagrangemultiplikatoren auf den Übergangskanten hinzukommen. Diese sind ebenfalls in die Fehlerschätzung mit einzubeziehen, wobei die Art und Weise entscheidend von dem jeweils konkret verwendeten Ansatz abhängt – vergleiche zum Beispiel [91].

# Kapitel 7.

## Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Konzept adaptiver Finite Elemente Methoden an Problemstellungen mit einer modifizierten diskreten Formulierung angepasst. Die Hauptaufgabe bestand darin, die zugrundeliegenden a posteriori Fehlerschätzer hinsichtlich der geänderten Ausgangssituation zu adaptieren. Im Zuge dessen wurden Fehleridentitäten bezüglich einer benutzerdefinierten Zielgröße sowohl für den Diskretisierungs- als auch für den Modellfehler hergeleitet. Die verwendete Technik der dual gewichteten Residuen (DWR) erlaubte es einen allgemeinen Ansatz zu entwickeln, der auch nichtlineare Problemstellungen und Zielgrößen berücksichtigt. Mittels numerischer Untersuchungen wurde die Qualität der aus den Fehleridentitäten abgeleiteten Fehlerschätzern untersucht und deren gute Repräsentation belegt.

Eine Identität für den Diskretisierungsfehler im Rahmen diskreter Stabilisierungstechniken wurde bereits in [11, Abschnitt 2.3] entwickelt. Das hier präsentierte Resultat verallgemeinert dieses Ergebnis dahingehend, dass ein größeres Spektrum an diskreten Modifikationen zugelassen wird. Zudem bleibt die in [11] geforderte Konsistenzbedingung an die kontinuierliche Lösung des Problems bei der hier entwickelten Fehleridentität unberücksichtigt. Neben den standardmäßig vorhandenen Anteilen der Fehleridentität, wie das primale und duale Residuum, komplettieren ein primaler und ein dualer Zusatzterm die Fehlerdarstellung im Falle einer modifizierten diskreten Formulierung. Die numerischen Resultate belegen, dass die Zusatzterme nicht nur in der Theorie von Bedeutung sind, sondern auch auf die Qualität der Fehlerschätzung Einfluss haben. Nur bei der Berücksichtigung der Zusatzterme ist eine Annäherung des Effektivitätsindex gegen den Wert 1 zu beobachten. Eine Vernachlässigung

dieser Anteile als Terme höherer Ordnung in der Fehleridentität ist demnach weder sinnvoll noch zu empfehlen.

Im Rahmen der praktischen Umsetzung ergaben sich bei der numerischen Auswertung des Fehlerschätzers weitere technisch bedingte Schwierigkeiten, die es zu beheben galt. Insbesondere betraf dies die Approximation höherer Ordnung der kontinuierlichen Größen in der Fehleridentität. Im Modellbeispiel der selektiv reduzierten Integration konnte diese Problematik vornehmlich bei den Zusatztermen im Falle beinahe inkompressibler Materialialeigenschaften beobachtet werden. Die häufig verwendete biquadratische Patchinterpolation führte hier zu sehr großen Beiträgen, die die Fehlerschätzung gänzlich unbrauchbar machten. Erst mit der Betrachtung der äquivalenten gemischten Formulierung und die daran angelehnte Approximation höherer Ordnung der Divergenz der kontinuierlichen Größen lieferte eine qualitativ gute Fehlerschätzung mit Effektivitätsindex nahe 1. Entsprechendes ist bei den Beispielen der volumenartigen Schalenelemente zu beobachten. Die trotz der eingeschränkten Auswertungsmöglichkeiten für die Approximation höherer Ordnung erzielten Effektivitätsindizes von 0.64 und 0.88 erfüllen vor dem Hintergrund einer  $C^\infty$ -Lösung und einem glatten dualen Problem jedoch nicht die Erwartungen. Mögliche Anpassungen, wie die Mittelung von Knotenwerten bei der Konstruktion der Patchinterpolierenden oder eine angepasste Implementierung des volumenartigen Schalenelements, erscheinen vielversprechend, sind in entsprechenden Untersuchungen jedoch noch zu verifizieren.

Im Hinblick auf modelladaptive Verfahren wurde in einem ersten Schritt der Begriff des Modells gemäß der zugrundeliegenden Ausgangssituation definiert. Durch dessen Identifizierung mit einer vorliegenden Diskretisierung, agiert der Modellfehler, anders als beispielsweise in [22] nur auf diskreter Ebene. Die hergeleitete Fehleridentität liefert demnach ein Maß für die Differenz zweier Lösungen zu unterschiedlichen Diskretisierungen gemessen in einer benutzerdefinierten Zielgröße. Des Weiteren besteht eine starke Abhängigkeit der Struktur der Fehleridentität von der betrachteten Problemstellung und der Beziehung der unterschiedlichen Modelle zueinander. Hierbei spielen insbesondere Teilraumbeziehungen eine entscheidende Rolle. Die Funktionalität des entwickelten Modellfehlerschätzers wurde durch die Anwendung in einem modell- und netzadaptiven

---

Algorithmus auf die Problemstellung der selektiv reduzierten Integration nachgewiesen. Der Bereich, in dem beinahe inkompressibles Materialverhalten vorgegeben war, wurde durch den Algorithmus identifiziert und ein Modellwechsel vollzogen. Der geschätzte Gesamtfehler bestehend aus Modell- und Diskretisierungsfehler gibt den exakten Fehler mit zunehmender Anzahl an Elementen immer besser wieder, was durch einen gegen der Wert 1 strebenden Effektivitätsindex untermauert wird. Entscheidend hierfür ist, dass auch der Modellfehler mit zunehmender Elementanzahl immer kleiner wird. Dies verdeutlicht nochmals dessen rein diskreten Charakter.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit stellen die grundlegenden Werkzeuge für die Anwendung von adaptiven Methoden auf Problemstellungen mit modifizierten diskreten Formulierungen bereit und bieten zugleich eine Vielzahl von Ansatzpunkten für weitergehend Aufgabenstellungen. Primär ist hier die Umsetzung der Modellfehlerschätzung für hybride Netze aus Volumen- und volumenartigen Schalenelementen anzuführen. Neben den rein technisch zu schaffenden Voraussetzungen ist insbesondere der Umgang mit den auftretenden Lagrangemultiplikatoren an den Übergangskanten zu untersuchen. Zudem ist für eine bessere Fehlerrepräsentation sowohl die Auswertung als auch die Konstruktionsweise der Approximation höherer Ordnung anzupassen.

Die betrachteten numerischen Beispiele beschränken sich zurzeit auf rein lineare Problemstellungen. Die Anwendung der bereits für nichtlineare Formulierungen hergeleiteten theoretischen Ergebnisse auf entsprechende Beispiele ist naheliegend. Hinsichtlich der Simulation von Blechmassivumformprozessen sind hier insbesondere nichtlineare Materialgesetze und große Deformationen von Interesse. Als sukzessive Erweiterungen ließen sich Problemstellungen, die sowohl Kontakt als auch Reibungseinflüsse berücksichtigen, integrieren.





# Anhang A.

## Ergänzungen zu Kapitel 2

### A.1. Beweis von Satz 2.5

Die Vorgehensweise entspricht der des Beweises von [80, Theorem 6.7]. Ziel ist es, den Riesz'schen Darstellungssatz mit  $H = H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  zu verwenden. Die durch  $L_A$  induzierte Bilinearform  $a$  ist jedoch auf dem kartesischen Produktraum  $H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  definiert, was nicht zur Voraussetzung in Satz 2.3 passt. Aufgrund der Bedingung an  $u_0 \in L^2(\Gamma_D)$  existiert jedoch ein  $\bar{u}_0 \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega)$  mit  $\gamma(\bar{u}_0)|_{\Gamma_D} = u_0$ . Die Zerlegung der potentiellen Lösung  $u \in H_{\Gamma_D, u_0}^1(\Omega)$  in  $u = \bar{u}_0 + v$  mit  $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  liefert aufgrund der Linearität

$$a(u, \varphi) = a(\bar{u}_0, \varphi) + a(v, \varphi) \stackrel{!}{=} l(\varphi)$$

beziehungsweise

$$a(v, \varphi) \stackrel{!}{=} l(\varphi) - a(\bar{u}_0, \varphi) =: \tilde{l}(\varphi).$$

Für die mit Hilfe des linearen Funktionals  $\tilde{l}$  gegebene äquivalente Problemstellung wird nun auch ein  $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  gesucht, sodass die Bilinearform  $a$  auf  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  eingeschränkt werden kann. Dies führt auf die Ausgangssituation von Satz 2.3. Es bleiben die Bedingungen an die Bilinearform  $a$  zu zeigen.

Die Stetigkeit ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und der essentiellen Beschränktheit von  $A$ . Es gilt

$$a(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla \psi(x))^{\top} \nabla \varphi(x) \, dx \leq \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} |(\nabla \psi, \nabla \varphi)_0|$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \\ &\leq C' \|\psi\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Der Nachweis der Elliptizität basiert auf der Gleichung (2.3) und der Poincaré-Ungleichung, wobei die Teilmenge  $V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  die 3. Bedingung in Satz 2.6 erfüllt. Es ist

$$a(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla\psi(x))^\top \nabla\varphi(x) \, dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x)|^2 \, dx \geq C \|\varphi\|_{H^1}^2$$

mit  $C := \alpha C_P$ . Die Anwendung von Satz 2.3 liefert schließlich ein eindeutig bestimmtes  $v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ , das die Gleichung

$$a(v, \varphi) = \tilde{l}(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

erfüllt. □

## A.2. Beweis von Satz 2.11

Es kann angenommen, dass homogene Dirichletrandbedingungen vorliegen. Andernfalls erfolgt eine Zurückführung der Problemstellung auf eine entsprechende Formulierung mit homogenen Randbedingungen analog zum Beweis von Satz 2.5 in Abschnitt A.1.

Da die Gleichung (2.10) für beliebige Tripel  $\{\varphi, \omega, \tau\}$  erfüllt sein soll, muss dies insbesondere für die Tripel  $\{\varphi, \omega, 0\}$  und  $\{0, 0, \tau\}$  gelten. Es ergibt sich somit ein System von Gleichungen analog zu Problemstellung 2.4 mit  $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $M = L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$ . Die zugehörigen Bilinearformen  $a$  und  $b$  sowie die Linearformen  $l$  und  $g$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} a: H \times H &\rightarrow \mathbb{R}, & a((\varepsilon, u), (\omega, \varphi)) &:= \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon : \omega \, dx, \\ b: H \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & b((\omega, \varphi), \sigma) &:= \int_{\Omega} (\varepsilon_\varphi - \omega) : \sigma \, dx, \\ l: H &\rightarrow \mathbb{R}, & l(\omega, \varphi) &:= \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N \varphi \, dx \end{aligned}$$

und  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(\tau) := 0$ .

In einem ersten Schritt erfolgt der Nachweis, dass  $l$  und  $g$  lineare, stetige Funktionale beschreiben. Die Abbildung  $g$  erfüllt die Voraussetzungen offensichtlich und auch für  $l$  lassen sich diese mit Hilfe der Eigenschaften der Funktionen  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $f_N \in L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$  leicht zeigen. Es gilt trivialerweise die Inklusion  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und für die entsprechenden Dualräume folgt die umgekehrte Beziehung. Aufgrund der Reflexivität von  $L^2$  ist  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \subset (H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3))'$  und somit kann  $f$  als Funktional auf  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  aufgefasst werden. Für  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  ist  $\gamma(\varphi) \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$  nach Satz 2.1 und die Einschränkung auf  $\Gamma_N$  in  $L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^3)$ . Die Abbildung  $\varphi \mapsto \int_{\Gamma_N} f_N \gamma_{\Gamma_N}(\varphi) dx$  ist eine lineare und stetige Abbildung von  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  nach  $\mathbb{R}$ . Die Stetigkeit folgt aus der Cauchy-Schwarzchen-Ungleichung und der Stetigkeit der Spurrabbildung. Daher kann auch  $f_N$  als Funktional auf  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  aufgefasst werden.

Schritt 2 befasst sich mit den Bilinearformen. Es ist nachzuweisen, dass  $a$  und  $b$  stetig sind,  $a$  zudem elliptisch ist auf dem Raum

$$V := \{(\omega, \varphi) \in H : b((\omega, \varphi), \tau) = 0, \quad \forall \tau \in M\}$$

und  $b$  die inf-sup-Bedingung erfüllt. Die Stetigkeit folgt im wesentlichen aus der komponentenweise, essentiellen Beschränktheit des Elastizitätstensors. Es gilt unter Berücksichtigung der Cauchy-Schwarzchen-Ungleichung auf dem Raum  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$

$$\begin{aligned} a((\varepsilon, u), (\omega, \varphi)) &= \int_{\Omega} \sigma_{\varepsilon} : \omega dx = \int_{\Omega} (\mathbb{C} : \varepsilon) : \omega dx \\ &\leq \max_{ijkl} \|\mathbb{C}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \varepsilon : \omega dx \\ &\leq \max_{ijkl} \|\mathbb{C}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varepsilon\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\ &\leq C \|(\varepsilon, u)\|_H \|(\omega, \varphi)\|_H \end{aligned}$$

mit  $\|(\omega, \varphi)\|_H := \left( \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 + \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \right)^{1/2}$ . Dabei wurde im letzten Schritt die Äquivalenz der Vektornormen im  $\mathbb{R}^2$  verwendet. Für die

Bilinearform  $b$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 b((\omega, \varphi), \sigma) &= \int_{\Omega} (\varepsilon_{\varphi} - \omega) : \sigma \, dx = \int_{\Omega} (D\varphi - \omega) : \sigma \, dx \\
 &\leq \|D\varphi - \omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \|\sigma\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\
 &\leq (\|D\varphi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} + \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}) \|\sigma\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\
 &\leq (\|\varphi\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}) \|\sigma\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})} \\
 &\leq C \|(\omega, \varphi)\|_H \|\sigma\|_M.
 \end{aligned}$$

Für den Nachweis der Elliptizität von  $a$  auf  $V$  sei zunächst angemerkt, dass für beliebiges  $(\varphi, \omega) \in V$  aufgrund der positiven Definitheit von  $\mathbb{C}$  gilt

$$\int_{\Omega} \sigma_{\omega} : \omega \, dx = \int_{\Omega} (\mathbb{C} : \omega) : \omega \, dx \geq \int_{\Omega} \alpha \|\omega(x)\|_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}^2 \, dx = \alpha \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2.$$

Andererseits liefert die Symmetrie von  $\mathbb{C}$ , die Eigenschaft, dass jedes Element  $(\varphi, \omega) \in V$  die Gleichung

$$\int_{\Omega} \tau : \omega \, dx = \int_{\Omega} \tau : \varepsilon_{\varphi} \, dx \quad \forall \tau \in M$$

erfüllt, und die Tatsache, dass  $\mathbb{C} : \omega \in M$  für beliebiges  $\omega \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ , die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{\omega} : \omega \, dx &= \int_{\Omega} \sigma_{\omega} : \varepsilon_{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} (\mathbb{C} : \omega) : \varepsilon_{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} \omega : (\mathbb{C} : \varepsilon_{\varphi}) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \varepsilon_{\varphi} : (\mathbb{C} : \varepsilon_{\varphi}) \, dx \\
 &\geq \alpha \|\varepsilon_{\varphi}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\
 &\geq \alpha C_K \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\
 &\geq \alpha C_K C_P \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2.
 \end{aligned}$$

Dabei wurde im drittletzten Schritt erneut die Definitheit von  $\mathbb{C}$ , im vorletzten die Korn'sche Ungleichung 2.12 und im letzten die Poincaré-Ungleichung 2.6 verwendet. Die Elliptizität von  $a$  auf  $V$  ergibt sich dann

aus

$$\begin{aligned} a((\omega, \varphi), (\omega, \varphi)) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\omega} : \omega \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\omega} : \omega \, dx \\ &\geq \frac{\alpha C_K C_P}{2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\omega\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})}^2 \\ &\geq C' \|(\omega, \varphi)\|_H^2. \end{aligned}$$

Ausgehend von der Ungleichung

$$\sup_{(\omega, \varphi) \in H} \frac{b((\omega, \varphi), \tau)}{\|(\omega, \varphi)\|_H \|\tau\|_M} \geq \frac{b((-\tau, 0), \tau)}{\|(-\tau, 0)\|_H \|\tau\|_M} = \frac{\|\tau\|_M^2}{\|(-\tau, 0)\|_H \|\tau\|_M} = 1$$

für beliebiges  $\tau \in M$ , liefert das Bilden des Infimums über alle  $\tau \in M$  die Gültigkeit der inf-sup-Bedingung für  $b$ .  $\square$

### A.3. Beweis von Satz 2.14

Ausgangspunkt ist erneut das Überführen der Gleichung (2.11) in die Form eines Sattelpunktproblems. Dazu seien die Räume  $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3})$  und  $M = H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , sowie die Bilinear- und Linearformen

$$\begin{aligned} a: H \times H &\rightarrow \mathbb{R}, & a(\sigma, \tau) &:= \int_{\Omega} \varepsilon_{\sigma} : \tau \, dx = \int_{\Omega} (\mathbb{A} : \sigma) : \tau \, dx, \\ b: H \times M &\rightarrow \mathbb{R}, & b(\tau, \varphi) &:= - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon_{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \tau : D\varphi \, dx, \\ l: H &\rightarrow \mathbb{R}, & l(\tau) &:= 0 \end{aligned}$$

und

$$g: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\varphi) := - \int_{\Omega} f\varphi \, dx - \int_{\Gamma_N} f_N \varphi \, dx$$

gegeben. Die Abbildungen  $l$  und  $g$  definieren, mit der selben Argumentation wie im Beweis von Satz 2.11, lineare stetige Funktionale.

Die Stetigkeit von  $a$  und  $b$  liefert zum einen die Cauchy–Schwarzsche–Ungleichung auf  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$  und zum anderen für  $a$  die komponentenweise essentielle Beschränktheit des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbb{A}$  und für  $b$  die Abschätzung der  $L^2$ –Norm des symmetrischen Gradienten durch die

vollständige  $H^1$ -Norm.

Die Elliptizität von  $a$  ist in diesem Fall deutlich einfacher zu zeigen und beruht nur auf der positiven Definitheit von  $\mathbb{A}$ , das heißt

$$a(\tau, \tau) = \int_{\Omega} (\mathbb{A} : \tau) : \tau \, dx \geq \int_{\Omega} \alpha \|\tau(x)\|_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}^2 \, dx = \alpha \|\tau\|_H^2.$$

Für die inf-sup-Bedingung sei darauf hingewiesen, dass für eine Funktion  $\varphi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  der symmetrische Gradient  $D\varphi$  in  $H$  ist. Daher liefert die Korn'schen Ungleichung aus Satz 2.12 für beliebiges  $\varphi \neq 0$

$$\sup_{\tau \in H} \frac{b(\tau, \varphi)}{\|\tau\|_H} \geq \frac{b(D\varphi, \varphi)}{\|D\varphi\|_H} = \|D\varphi\|_H \geq C_K \|\varphi\|_M.$$

□

## A.4. Beweis von Satz 2.15(i)

Für den Fall  $\Gamma_D = \partial\Omega$  entspricht Problemstellung 2.7 im Wesentlichen dem Stokes-Problem. Entsprechend ist der mechanische Druck  $p \in L^2(\Omega)$  nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt und muss beispielsweise durch die Forderung nach einem verschwindenden integralen Mittelwert bezüglich  $\Omega$  normiert werden. Die Drucklösung ist somit wie angegeben in  $L_0^2(\Omega)$  anstatt in  $L^2(\Omega)$ . Analog zum Teil (ii) werden die Voraussetzungen von Satz 2.9 überprüft. Dabei ändert sich gegenüber den dortigen Ausführungen lediglich der Nachweis der inf-sup-Bedingung für  $b$ . Für diese wird auf ein Standardresultat bezüglich des Stokes-Problems für den Divergenzoperator zurückgegriffen, welches besagt, dass  $\operatorname{div} : V^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$  ein Isomorphismus ist, vergleiche zum Beispiel [26, Satz 6.3]. Dabei ist  $V^\perp$  der Senkrechtraum zum Teilraum  $V \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  für den die Elliptizität von  $a$  zu zeigen ist. Somit existiert zu jedem  $p \in L_0^2(\Omega)$  ein  $\psi \in V^\perp \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  mit  $\operatorname{div}(\psi) = p$  und aufgrund der Stetigkeit von  $\operatorname{div}^{-1}$  die Ungleichung  $\|\psi\|_{H^1} \leq C\|p\|_{L^2}$ . Dies liefert

$$\sup_{\varphi \in H_0^1} \frac{b(\varphi, p)}{\|\varphi\|_{H^1}} \geq \frac{b(\psi, p)}{\|\psi\|_{H^1}} = \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi) (-p) \, dx}{\|\psi\|_{H^1}} = \frac{\|p\|_{L^2}^2}{\|\psi\|_{H^1}} \geq \frac{1}{C} \|p\|_{L^2}.$$

für beliebiges  $p \in L_0^2(\Omega)$ . □

# Literaturverzeichnis

- [1] R. L. ACTIS, B. A. SZABO UND C. SCHWAB: Hierarchic models for laminated plates and shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 172 (1), (1999), 79–107
- [2] R. ADAMS UND J. FOURNIER: *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science (2003)
- [3] M. AINSWORTH UND R. RANKIN: Guaranteed computable bounds on quantities of interest in finite element computations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 89 (13), (2012), 1605–1634
- [4] H. W. ALT: *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1999)
- [5] G. ALZETTA, D. ARNDT, W. BANGERTH, V. BODDU, B. BRANDS, D. DAVYDOV, R. GASSMOELLER, T. HEISTER, L. HELTAI, K. KORMANN, M. KRONBICHLER, M. MAIER, J.-P. PELTERET, B. TURCK SIN UND D. WELLS: The deal.II Library, Version 9.0. In: *Journal of Numerical Mathematics*, Bd. 26 (4), (2018), 173–183
- [6] W. BANGERTH, R. HARTMANN UND G. KANSCHAT: deal.II – a General Purpose Object Oriented Finite Element Library. In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, Bd. 33 (4), (2007), 24/1–24/27
- [7] W. BANGERTH UND R. RANNACHER: *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel (2013)
- [8] S. BARTELS UND C. CARSTENSEN: Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part

- II: Higher order FEM. In: *Mathematics of computation*, Bd. 71 (239), (2002), 971–994
- [9] K.-J. BATHE UND E. N. DVORKIN: A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 21 (2), (1985), 367–383
- [10] R. BECKER, E. ESTECAHANDY UND D. TRUJILLO: Weighted Marking for Goal-oriented Adaptive Finite Element Methods. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 49 (6), (2011), 2451–2469
- [11] R. BECKER UND R. RANNACHER: An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. In: *Acta Numerica*, Bd. 10, (2001), 1–102
- [12] T. BELYTSCHKO, W. K. LIU UND E. ENGELMANN: The gamma-elements and related concepts. In: T. HUGHES UND E. HINTON, Hg., *Finite element methods for plate and shell structures*, Bd. 1 von *Element Technology*, Pineridge Press International, Swansea, UK (1986), 316–347
- [13] T. BELYTSCHKO, J. S.-J. ONG, W. K. LIU UND J. M. KENNEDY: Hourglass control in linear and nonlinear problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 43 (3), (1984), 251–276
- [14] T. BELYTSCHKO UND C.-S. TSAY: A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 19 (3), (1983), 405–419
- [15] N. BILLADE UND K. VEMAGANTI: Hierarchical models of thin elastic structures: Overview and recent advances in error estimation and adaptivity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 196, (2007), 3508–3523
- [16] M. BISCHOFF: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart (1999)



- [17] M. BISCHOFF, K.-U. BLETZINGER, W. A. WALL UND E. RAMM: Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, Ltd (2004), 59–137
- [18] M. BISCHOFF, E. RAMM UND D. BRAESS: A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements. In: *Computational Mechanics*, Bd. 22 (6), (1999), 443–449
- [19] H. BLUM: Numerical Treatment of Corner and Crack Singularities. In: E. STEIN UND W. WENDLAND, Hg., *Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View*, Springer-Verlag Wien, Wien (1988), 171–212
- [20] H. BLUM, H. FROHNE, J. FROHNE UND A. RADEMACHER: Semi-smooth Newton methods for mixed FEM discretizations of higher-order for frictional, elasto-plastic two-body contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 309, (2016), 131–151
- [21] U. BOHINC: *Adaptive modeling of plate structures*. phdthesis, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan (2011)
- [22] M. BRAACK UND A. ERN: A Posteriori Control of Modeling Errors and Discretization Errors. In: *Multiscale Modeling & Simulation*, Bd. 1 (2), (2003), 221–238
- [23] M. BRAACK UND N. TASCHEBERGER: A posteriori control of modelling and discretization errors for quasi periodic solutions. In: *Journal of Numerical Mathematics*, Bd. 22 (2), (2014), 81–108
- [24] D. BRAESS: Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 165 (1-4), (1998), 155–174
- [25] D. BRAESS: Enhanced Assumed Strain Elements and Nearly Incompressible Material. In: *European Conference on Computational Mechanics*, Krakau, 20

- [26] D. BRAESS: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2013)
- [27] D. BRAESS, C. CARSTENSEN UND B. REDDY: Uniform convergence and a posteriori error estimators for the enhanced strain finite element method. In: *Numerische Mathematik*, Bd. 96 (3), (2004), 461–479
- [28] D. BRAESS, P. MING UND Z.-C. SHI: Shear locking in a plane elasticity problem and the enhanced assumed strain method. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 47 (6), (2010), 4473–4491
- [29] S. BRENNER UND R. SCOTT: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York (2007)
- [30] F. BREZZI UND M. FORTIN: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1991)
- [31] R. P. R. CARDOSO, J. W. YOON, M. MAHARDIKA, S. CHOU DHRY, R. J. ALVES DE SOUSA UND R. A. FONTES VALENTE: Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 75 (2), (2008), 156–187
- [32] C. CARSTENSEN UND S. BARTELS: Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part I: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM. In: *Mathematics of Computation*, Bd. 71 (239), (2002), 945–969
- [33] P. G. CIARLET: *Mathematical Elasticity: Three-dimensional Elasticity*, Bd. 1 von *Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier Science Ltd (1988)
- [34] P. G. CIARLET: Basic error estimates for elliptic problems. In: P. G. CIARLET UND J. L. LIONS, Hg., *Finite Element Methods (Part 1)*, Bd. 2 von *Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier (1991), 17–351

- 
- [35] W. DÖRFLER: A Convergent Adaptive Algorithm for Poisson's Equation. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 33 (3), (1996), 1106–1124
- [36] B. ENDTMAYER, U. LANGER UND T. WICK: Two-side a posteriori error estimates for the DWR method. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1811.07586
- [37] L. C. EVANS: *Partial Differential Equations*, Bd. 19 von *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2010)
- [38] M. FEISCHL, D. PRAETORIUS UND K. VAN DER ZEE: An Abstract Analysis of Optimal Goal-Oriented Adaptivity. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 54 (3), (2016), 1423–1448
- [39] D. P. FLANAGAN UND T. BELYTSCHKO: A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 17 (5), (1981), 679–706
- [40] J. GOPALAKRISHNAN UND W. QIU: Partial expansion of a Lipschitz domain and some applications. In: *Frontiers of Mathematics in China*, Bd. 7 (2), (2012), 249–272
- [41] P. GRISVARD: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Nr. 24 in *Monographs and studies in mathematics*, Pitman (1986)
- [42] D. GROSS, W. HAUGER, J. SCHRÖDER UND W. A. WALL: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 9. Aufl. (2007)
- [43] D. GROSS, W. HAUGER, J. SCHRÖDER UND W. A. WALL: *Technische Mechanik 1 – Statik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 10. Aufl. (2009)
- [44] D. GROSS, W. HAUGER UND P. WRIGGERS: *Technische Mechanik 4 - Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 7. Aufl. (2009)

- [45] A. GROSSE-WÖHRMANN: *Eine hierarchische Modellierung der Thermoelastoplastizität und nicht-lokalen Schädigung mit adaptiver Modellwahl*. Dissertation, Technische Universität Dortmund (2015)
- [46] A. GROSSE-WÖHRMANN, H. BLUM UND M. STIEMER: A posteriori control of modelling errors in linear elasticity. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Bd. 10 (1), (2010), 647–648
- [47] C. HAGER: *Robust numerical algorithms for dynamic frictional contact problems with different time and space scales*. Dissertation, Universität Stuttgart (2010)
- [48] R. HAUPTMANN UND K. SCHWEIZERHOF: A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 42 (1), (1998), 49–69
- [49] E. HELLINGER: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. 4 (30), (1914), 602–635
- [50] S. HÜEBER: *Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems*. Dissertation, Universität Stuttgart (2008)
- [51] T. J. R. HUGHES: Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 15 (9), (1980), 1413–1418
- [52] T. J. R. HUGHES: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering, Dover Publications (2000)
- [53] T. J. R. HUGHES UND T. TEZDUYAR: Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element. In: *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 48, (1981), 587–596

- [54] C. JOHNSON: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications (2009)
- [55] N. KIKUCHI UND J. ODEN: *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM studies in applied mathematics, SIAM (1988)
- [56] A. KLAWONN UND O. RHEINBACH: A parallel implementation of dual-primal FETI methods for three-dimensional linear elasticity using a transformation of basis. In: *SIAM Journal on Scientific Computing*, Bd. 28 (5), (2006), 1886–1906
- [57] A. KLAWONN UND O. RHEINBACH: Highly scalable parallel domain decomposition methods with an application to biomechanics. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 90 (1), (2010), 5–32
- [58] P. KNABNER UND L. ANGERMANN: *Numerik partieller Differentialgleichungen: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2000)
- [59] F. KOSCHNICK: *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Dissertation, Technische Universität München, München (2004)
- [60] K. P. LI UND S. CESCOTTO: An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analyses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 141 (1-2), (1997), 157–204
- [61] W. K. LIU, Y.-K. HU UND T. BELYTSCHKO: Multiple quadrature underintegrated finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 37 (19), (1994), 3263–3289
- [62] D. S. MALKUS UND T. J. R. HUGHES: Mixed finite element methods – Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 15 (1), (1978), 63–81

- [63] J. E. MARSDEN UND T. J. R. HUGHES: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Civil and Mechanical Engineering, Dover Publications, Dover (1994)
- [64] H. MELZER UND R. RANNACHER: Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der vertikal belasteten Kirchhoffschen Platte. In: *Bauingenieur*, Bd. 55, (1980), 181–189
- [65] M. MERKLEIN, J. ALLWOOD, B.-A. BEHRENS, A. BROSIUS, H. HAGENAH, K. KUZMAN, K. MORI, A. TEKKAYA UND A. WECKENMANN: Bulk forming of sheet metal. In: *CIRP Annals*, Bd. 61 (2), (2012), 725–745
- [66] C. MILITELLO UND C. A. FELIPPA: A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements – I. Variational principles. In: *Computers & Structures*, Bd. 34 (3), (1990), 431–438
- [67] C. MILITELLO UND C. A. FELIPPA: A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements – II. The  $C^0$  four-node plate element. In: *Computers & Structures*, Bd. 34 (3), (1990), 439–444
- [68] M. S. MOMMER UND R. STEVENSON: A Goal-Oriented Adaptive Finite Element Method with Convergence Rates. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 47 (2), (2009), 861–886
- [69] R. H. NOCHETTO, A. VEESER UND M. VERANI: A safeguarded dual weighted residual method. In: *IMA Journal of Numerical Analysis*, Bd. 29 (1), (2009), 126–140
- [70] M. PARASCHIVOIU, J. PERAIRE UND A. T. PATERA: A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 150, (1997), 289–312
- [71] S. PRUDHOMME UND J. T. ODEN: On goal-oriented error estimation for elliptic problems: Application to the control of pointwise errors. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 176, (1999), 313–331

- 
- [72] A. RADEMACHER: *Adaptive Finite Element Methods for Nonlinear Hyperbolic Problems of Second Order*. Dissertation, Technische Universität Dortmund, Dr. Hut, München (2010)
- [73] A. RADEMACHER: Mesh and model adaptivity for frictional contact problems. In: *Numerische Mathematik*, Bd. 142 (3), (2019), 465–523
- [74] R. RANNACHER UND J. VIHAREV: Adaptive finite element analysis of nonlinear problems: balancing of discretization and iteration errors. In: *Journal of Numerical Mathematics*, Bd. 21 (1), (2013), 23–61
- [75] E. REISSNER: On a variational theorem in elasticity. In: *Studies in Applied Mathematics*, Bd. 29 (1-4), (1950), 90–95
- [76] T. RICHTER: *Parallel Multigrid Method for Adaptive Finite Elements with Application to 3D Flow Problems*. Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg (2005)
- [77] T. RICHTER UND T. WICK: Variational localizations of the dual weighted residual estimator. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Bd. 279 (Supplement C), (2015), 192–208
- [78] W. RUDIN: *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math (1991)
- [79] J. SCHUR: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 147, (1917), 205–232
- [80] B. SCHWEIZER: *Partielle Differentialgleichungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (2013)
- [81] J. C. SIMO UND M. S. RIFAI: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 29 (8), (1990), 1595–1638
- [82] R. J. ALVES DE SOUSA, R. P. CARDOSO, R. A. FONTES VALENTE, J.-W. YOON, J. J. GRÁCIO UND R. M. NATAL JORGE:



- A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I – geometrically linear applications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 62 (7), (2005), 952–977
- [83] R. J. ALVES DE SOUSA, R. P. R. CARDOSO, R. A. FONTES VALENTE, J.-W. YOON, J. J. GRÁCIO UND R. M. NATAL JORGE: A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness – Part II: nonlinear applications. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 67 (2), (2006), 160–188
- [84] R. J. ALVES DE SOUSA, R. M. NATAL JORGE, R. A. FONTES VALENTE UND J. M. A. CÉSAR DE SÁ: A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element. In: *Engineering Computations*, Bd. 20 (7), (2003), 896–925
- [85] R. J. ALVES DE SOUSA, J. W. YOON, R. P. R. CARDOSO, R. A. FONTES VALENTE UND J. J. GRÁCIO: On the use of a reduced enhanced solid-shell (RESS) element for sheet forming simulations. In: *International Journal of Plasticity*, Bd. 23 (3), (2007), 490–515
- [86] E. STEIN UND F.-J. BARTHOLD: *Elastizitätstheorie*. Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie, Ernst & Sohn Verlag, Berlin (1996)
- [87] E. STEIN UND S. OHNIMUS: Anisotropic discretization- and model-error estimation in solid mechanics by local Neumann problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 176 (1), (1999), 363–385
- [88] E. STEIN, M. RÜTER UND S. OHNIMUS: Implicit upper bound error estimates for combined expansive model and discretization adaptivity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 200 (37), (2011), 2626–2638
- [89] R. VERFÜRTH: *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Science Publications, Oxford (2013)



- [90] K. WASHIZU: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. International series of monographs in aeronautics and astronautics, Pergamon Press, Oxford, 2. Aufl. (1975)
- [91] B. I. WOHLMUTH: A residual based error estimator for mortar finite element discretizations. In: *Numerische Mathematik*, Bd. 84 (1), (1999), 143–171
- [92] B. I. WOHLMUTH: *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*, Bd. 17 von *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001)
- [93] B. I. WOHLMUTH: Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. In: *Acta Numerica*, Bd. 20, (2011), 569–734
- [94] O. C. ZIENKIEWICZ UND J. Z. ZHU: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 24 (2), (1987), 337–357

