

Nele ABELS, Bremen & Christine KNIPPING, Bremen

Argumentationsstrukturen in Beweisprozessen und -produkten

Beweisen ist ein oftmals mühsamer und langwieriger Prozess, bei dem zwischen der Beweisfindung und dem fertigen Beweis unterschieden werden kann (Wittmann, 2014). Die Beweisfindung erfordert Kreativität und Problemlösekompetenz. Sie verläuft selten linear, ist stattdessen häufig verschlungen, beinhaltet plötzliche Erfolge oder Fehlschläge sowie Stellen, an denen man nicht recht vorankommt (Wittmann, 2014). Auch die Rekonstruktion der Argumentation der Beweisfindung zeigt diese Komplexität. Das Beweisprodukt, der fertig aufgeschriebene Beweis, hingegen zeigt im Idealfall die Komplexität und Mühen des Beweisprozesses nicht mehr, ist linear und gut strukturiert (Wittmann, 2014). In der Wirklichkeit sieht dies etwa bei Studierenden des Grundschullehramtes in der Regel anders aus. In diesem Beitrag wird dargestellt, wie solche Prozesse rekonstruiert und anhand von Transkripten und Argumentationsrekonstruktionen herausgearbeitet werden können, welche und wie viele Aussagen ihnen beim Aufschreiben eines Beweises verloren gehen.

Auch die Bedeutung von Metakognition in diesen Prozessen wird betrachtet, denn Einfluss auf Beweisprozesse haben nicht nur Fachwissen oder methodisches Wissen, sondern auch Metakognition (Heinze & Reiss, 2003). Metakognition ist vereinfacht dargestellt das Denken über das eigene Denken (Schoenfeld, 1987) und kann in zwei Bereiche geteilt werden, das Wissen über Kognition und die Regulierung von Kognition (Nowińska, 2016). Diese Regulation von Kognition fasst Aktivitäten zusammen, die dabei helfen, eigenes Lernen und Arbeiten zu steuern. Sie beinhaltet Aktivitäten der Planung, des Monitorings (die Kontrolle und Überprüfung von Verständnis und Vorgehen im Prozess) und der Reflexion. Während Metakognition in der Beweisfindung bereits erforscht ist (u.a. mit Schwerpunkt auf Problemlösen durch Schoenfeld, 1987), ist der Einfluss von Metakognition auf das Aufschreiben von Beweisen bisher in der Forschungsliteratur kein Schwerpunkt.

Methode

Im Rahmen einer Interviewstudie wurden Studierende des Grundschullehramts im letzten Studienjahr des Masters dazu aufgefordert, in Zweiergruppen verschiedene geometrische Aussagen zu beweisen. Dazu sollte der Beweis nicht nur mündlich gefunden und diskutiert, sondern auch aufgeschrieben werden. Die Studierenden hatten zuvor an einer Vorlesung zur Elemen-

targeometrie teilgenommen, die gegebenen Aussagen waren mit Wissen der Vorlesung beweisbar. In diesem Beitrag fokussieren wir auf den Beweis zweier Studierenden zu folgender Aussage: „Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.“

Um Aussagen zu finden, die im Verlauf des Aufschreibens des Beweises verloren gingen, wurden zunächst der Beweistext näher betrachtet und seine Argumentation rekonstruiert, um eine Vergleichsgrundlage zu haben. Im Anschluss wurden die angefertigten Transkripte des mündlichen Diskurses herangezogen, damit Aussagen, die nur gesagt wurden, identifiziert werden konnten, sowie zusätzliche Argumentationen, die von den Studierenden nicht in den Beweistext aufgenommen wurden. Die Argumentationen wurden mithilfe des Toulminschemas (Toulmin, 1958) rekonstruiert (Abb. 1). Kreise stehen hier für Daten bzw. für als Daten weiterverwendete Konklusionen, Rauten stehen für Garanten und Stützungen und Rechtecke für die Zielkonklusion (siehe Knipping & Reid, 2019).

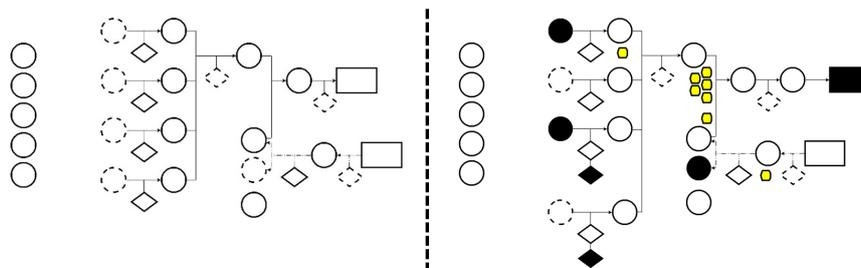


Abb. 1: Toulminschema des Beweistextes (links) und des Beweistextes mit mündlichen Kommentierungen (rechts)

An Stellen, an denen Aussagen verloren gingen, wurden anschließend die metakognitiven Aktivitäten der Studierenden untersucht, um mögliche Erklärungen für die verlorengegangenen Gründe finden zu können. Für diese Analyse wurde das Kategoriensystems *traKat* genutzt (Nowińska, 2016), das es ermöglicht, metakognitive Aktivitäten feiner zu differenzieren.

Ergebnisse

Die Rekonstruktion der Argumentation zeigt, dass der Beweis löchrig und auch mathematisch nicht immer richtig ist. Viele Daten sind implizit, auch einige Garanten sind nicht genannt (Abb. 1, links, gestrichelte Symbole). Andere Daten werden genannt, aber nicht mit der Argumentation verknüpft (in Abb. 1 links dargestellte Kreise). Berücksichtigt man zusätzlich den Prozess des Aufschreibens, fällt anhand des Transkriptes auf, dass einige der fehlenden impliziten Annahmen sehr wohl mündlich genannt werden (Abb. 1, rechts, schwarze Symbole). Das betrifft drei der fünf impliziten Daten sowie die Stützung eines Garanten. Zudem wird mündlich noch eine weitere Konklusion genannt. So wissen die Studierenden beispielsweise sehr wohl,

dass β' und α Nebenwinkel sind (Abb. 2, links), auch wenn sie es nicht aufschreiben. Bei genauerer Betrachtung der Stellen mit nicht genannten Gründen fällt auf, dass die fehlenden Aussagen häufig in einer anderen Funktion auftreten, nicht als bewusst genannte Daten bzw. Stützungen, sondern als Begründung oder Erklärung für oder gegen die Nutzung eines Garantens. So werden etwa die Nebenwinkel β' und α herangezogen, um die Nutzung des Stufenwinkelsatzes zu erklären, da die betroffenen Winkel α und α' keine Nebenwinkel sind. Doch auch bewusst genannte Gründe werden teils nicht aufgeschrieben. Zieht man die Metakognitionsanalyse hinzu, ist erkennbar, dass die metakognitiven Aktivitäten der Studierenden zu oberflächlich, lokal und unbegründet ablaufen, um die „Löcher“ im Beweistext zu bemerken. Auch ein Wille zur Kontrolle des Beweistextes scheint zu fehlen.

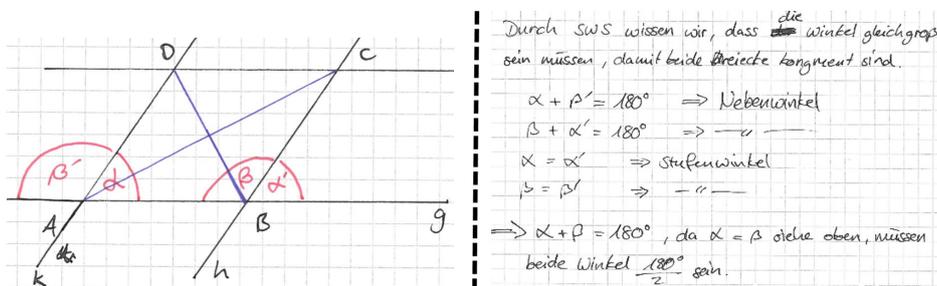


Abb. 2: Beweisskizze der Studierenden (links), Ausschnitt des Beweistextes (rechts)

Die Rekonstruktion des kommentierten Beweistextes zeigt, dass den Studierenden nicht bewusst ist, wie ein Beweis aufgebaut sein sollte. Viele der fehlenden Daten werden zwar genannt, aber nicht aufgeschrieben; die durch die Aussage gegebenen Voraussetzungen hingegen nicht genutzt. Die Studierenden scheinen nicht zu wissen, dass Daten der Startpunkt einer jeden Argumentation sind, ohne die deduktive Schlussfolgerungen nicht möglich sind. Die mündlich genannte, zusätzliche Konklusion am Ende des Beweises ist zudem ein Hinweis darauf, dass die Studierenden nicht so recht wissen, was sie eigentlich zeigen wollen. Neben der niedergeschriebenen Argumentation des Beweistextes gibt es zudem weitere Argumentationen, die im Prozess des Aufschreibens mündlich besprochen aber nicht aufgeschrieben werden (Abb. 1, rechts, graue Kästchen). Auf diese Zusatzargumentationen und die durch sie genannten Aussagen wird hier nicht weiter eingegangen.

Fazit

Die Ergebnisse zeigen, dass im Verlauf des Aufschreibens eines Beweises viele wichtige Aussagen verloren gehen können. Ein Grund ist, dass die Studierenden häufig metakognitive Aktivitäten nicht hinreichend nutzen, die ihnen das Fehlen wichtiger Aussagen im Beweistext bewusst machen könnten. Eine umfassende oder global angelegte Planung des Vorgehens gibt es

nicht, es wird in der Regel nur sehr lokal und bezogen auf den nächsten Schritt geplant. Dadurch fehlt ihnen eine Übersicht über die wichtigen Teile und notwendigen Voraussetzungen des Beweises. Während des Aufschreibens zeigen die Studierenden kaum Monitoring in Bezug auf die Güte ihres Beweistextes und selbst bei Diskussionen über den Text reden sie häufig aneinander vorbei, ohne dies wirklich zu bemerken. Das Transkript zeigt zudem, dass mit dem Aufschreiben des Antwortsatzes der Beweis für die Studierenden abgeschlossen ist. Hilfreiche metakognitive Aktivitäten der Reflexion wie die Überprüfung der Struktur der Argumentation oder eine reflektierende Einschätzung des Beweistextes finden nicht statt. Die Studierenden merken auch nach dem Aufschreiben häufig nicht, dass der Beweis unvollständig ist. Zusätzlich erschwert ihr mangelndes Wissen über die Struktur und den Aufbau von Beweisen den Studierenden überhaupt zu erkennen, welche Aussagen von Bedeutung sind.

Der Zusammenhang zwischen den beim Aufschreiben des Beweises verlorenen Aussagen und den metakognitiven Aktivitäten wird in unserer Studie über dieses Fallbeispiel hinaus untersucht. Weitere Beweisaufgaben und andere Studierende werden in den Blick genommen, auch um eventuelle Hilfen erstellen zu können, damit Studierenden beim Aufschreiben ihres Beweises weniger Aussagen verloren gehen.

Literatur

- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1–10). Abgerufen von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG4/TG4_Heinze_cerme3.pdf
- Knipping C. & Reid D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Hg.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (S. 3–31). ICME-13 Monographs. Cham: Springer International.
- Nowińska, E. (2016). *Leitfragen zur Analyse und Beurteilung metakognitiv-diskursiver Unterrichtsqualität*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik eV.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Hrsg.), *Cognitive science and mathematics education* (S. 189–216). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sommerhoff, D. (2017). *The Individual Cognitive Resources Underlying Students' Mathematical Argumentation and Proof Skills*. Ludwig-Maximilians-Universität München, München.
- Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wittmann, G. (2014). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 35–54). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.