Insa Maria APEL, Darmstadt

Zum Einfluss von Kenntnisqualitäten auf Beweisprozesse am Beispiel der ε-δ-Stetigkeit

Das mathematische Beweisen nimmt am Übergang zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik eine zentrale Stellung bezüglich der Veränderungen der Lehr-, Lern- und Arbeitsmethoden ein (vgl. u.a. Rach, 2014). Auf diese als anspruchsvoll, wissensintensiv und komplex geltende Tätigkeit werden verschiedene Einflussfaktoren (bspw. Problemlösekompetenz) vermutet und beforscht, wobei die mathematischen Kenntnisse sowohl theoretisch begründet als auch empirisch nachgewiesen als starker Einflussfaktor auf den Erfolg einer Beweisfindung identifiziert wurden (bspw. Sommerhoff, 2017). Mit Hilfe einer qualitativen Interviewstudie werden im Rahmen meines Promotionsprojektes exemplarisch Zusammenhänge zwischen der Qualität fachmathematischer Kenntnisse am Beispiel der $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der Bearbeitung einer Beweisaufgabe untersucht.

Beschreibung von Kenntnisqualitäten der ε-δ-Definition

Die Qualität einer Kenntnis wird hinsichtlich verschiedener Vernetzungen in der gesamten Kenntnisstruktur beschrieben, die danach sortiert werden, ob es sich um Vernetzungen direkt am Kern des Gegenstandes oder darüber hinaus handelt. (Apel, in press)

Für die Interviewstudie erfolgt eine Beschränkung auf Vernetzungen direkt am Kern der ε-δ-Definition sowie Nachweisüberlegungen für die ε-δ-Stetigkeit einer Funktion. Vernetzungen direkt am Kern des Gegenstandes betreffen nahezu nur dieses eine Stoffelement und können mit Hilfe der Parameter der *Exaktheit*, der *Verfügbarkeit*, der *Allgemeinheit* und *Anschaulichkeit* beschrieben werden.

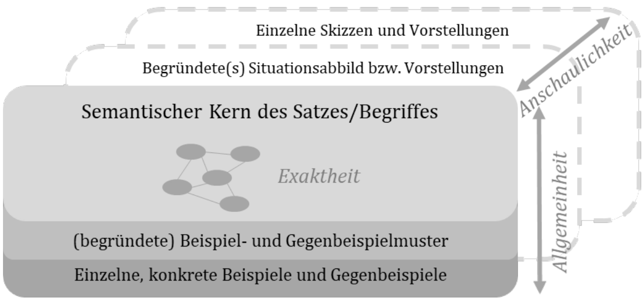

Abb. 1: Grafik zur Beschreibung von Kenntnisqualitäten am Kern des Stoffelements

Die *Exaktheit* beschreibt, ob der Gegenstand in der dargebotenen Weise adäquat abgebildet ist. Im konkreten Fall also, ob die Kenntnis mit der formalen

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Definition der ε-δ-Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ übereinstimmt und alle Aspekte der Definition und keine irrelevanten vorliegen.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Abb. 2: ε-δ-Definition von Stetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Mit der *Verfügbarkeit* wird beschrieben, wie schnell und sicher die ε-δ-Definition abgerufen werden kann und welche Hilfsmittel dafür gegebenenfalls benötigt werden (bspw.: Ist die Definition sofort verfügbar und besteht Sicherheit bezüglich einzelner Aspekte wie $x_0 \in D$ oder ist die Definition zumindest eigenständig rekonstruierbar?).

Die *Allgemeinheit* einer Kenntnis beschreibt auf verschiedenen Niveaus, inwiefern eine Vernetzung zwischen der Definition und Beispielen besteht. Beispielsweise unterscheidet sich die Kenntnis einzelner, spezifischer Beispiele und Gegenbeispiele von der Kenntnis von (begründeten) Beispiel- oder Gegenbeispielmustern (bspw. Sprünge sind Gegenbeispiele), die es erlauben, weitere Beispiele zu generieren. Der Parameter der Allgemeinheit ist nicht immer von der Anschaulichkeit zu trennen, insbesondere dann, wenn die Einordnung von Beispiel und Gegenbeispiel vor allem graphisch begründet wird.

Die *Anschaulichkeit* beschreibt, inwiefern der Gegenstand auf verschiedenen Repräsentationsebenen dargestellt werden kann und inwiefern ein (begründbarer) Wechsel dazwischen möglich ist. Die Kenntnis einer visuellen Skizze zur ε-δ-Definition genügt für eine hohe Anschaulichkeit nicht, die einzelnen Bestandteile müssen auch mit der Definition in Verbindung gebracht werden können.

An dieser Stelle gibt es Bezüge zu eher visuell geprägten (Grund)vorstellungen wie dem „Durchzeichnen ohne den Stift abzusetzen“ oder der Metapher des „Wackelns“. Im Fall einer konkreten Skizze handelt es sich meist um die Betrachtung eines konkreten Beispiels, deshalb wird mit engem Bezug zur *Allgemeinheit* zwischen beispielgebundenen und verallgemeinerbaren Aspekten unterschieden.

Beschreibung der Interview-Studie

Die Interview-Studie wurde im Sommer 2019 mit fortgeschrittenen Studierenden der Fachmathematik und des Lehramts erprobt und im Dezember 2019 mit 13 Studierenden aus der Vorlesung Analysis I (Bsc. Ma, Bsc. Phy, LaG) auf freiwilliger Basis ein bis zwei Wochen nach Einführung des Begriffs der Stetigkeit in der Vorlesung durchgeführt.

Die Diagnose der Kenntnisqualitäten basiert auf der Klassifikation typischer Schülerhandlungen im Mathematikunterricht (vgl. Bruder & Brückner, 1989) sowie Überlegungen von Pippig (1980) und Feldt-Caesar (2017). So sollte die Exaktheit durch Identifikation von spezifisch gewählten Beispielen und Gegenbeispielen geprüft werden können. Bereits in der Pilotierung zeigte sich allerdings, dass Identifikationsaufgaben, in denen bei gegebenen Funktionen entschieden werden muss, ob sie stetig sind, sehr gut gelöst werden können, ohne dass die Definition zur Entscheidung herangezogen wird. Zudem handelt es sich dabei um ein anschauliches Identifizieren auf einer konkreten Beispielebene. Die Exaktheit kann damit alleine folglich nicht valide überprüft werden. Eine Diagnose der Exaktheit erfolgt in der Studie im Zusammenspiel verschiedener Aufgaben, wobei die Angabe der Definition (2) erste Hinweise gibt; der Umgang mit der Definition in anderen Aufgaben (3, 5, 8) zeigt dann auf, ob sprachliche Variationen der Definition für den Lernenden möglich sind. Die Anschaulichkeit und Allgemeinheit werden vor allem durch die Aufgaben zum Erklären (3) und durch anschauliche Begründungen (5) diagnostiziert. Die Verfügbarkeit wird schon im Beweis durch die zur Nutzung erforderliche Reproduktion der Definition und dann noch einmal durch die Angabe der Definition (2) diagnostiziert.

(1) Beweisaufgabe, in der ε-δ-Stetigkeit das zentrale Argument ist

Satz: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) > c$. Dann existiert eine Umgebung U_h um x_0 mit $f(x) > c$ für alle $x \in U_h$.

Abb. 4: Beweisaufgabe im Interview

Diagnose der Kenntnisqualitäten der ε-δ-Definition von Stetigkeit

(2) Angabe einer ε-δ-Definition

(3) Aufforderung, die Definition einem fiktiven Kommilitonen zu erklären (Beschreiben)

(4) Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen mit Begründung sowie Mustern für Beispiele und Gegenbeispiele (Realisieren)

(5) Identifikation von Beispielfunktionen (Identifizieren), teilweise mit anschaulicher Begründung durch Anwenden der Definition (Identifizieren und Begründen)

(6) Formaler Nachweis der Stetigkeit einer Funktion mit Hilfe der ε-δ-Definition (Begründen)

(7) Identifikation symbolischer Definitionen (Identifizieren)

(8) Identifizieren passender und unpassender Visualisierungen (Identifizieren)

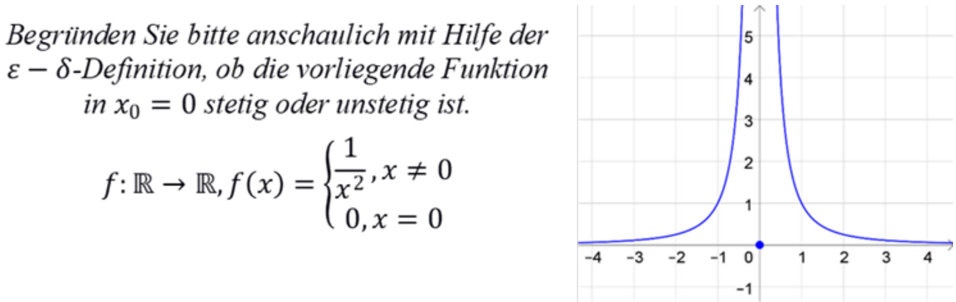

Abb. 5: Beispielaufgabe zum Identifizieren mit anschaulicher Begründung

Abhängig vom gewählten Beweis sollten sich verschiedene Zusammenhänge mit den Qualitäten der Kenntnis der Definition in der Studie zeigen. Für einen semantischen Beweisprozess (Weber, 2004) erscheinen eine hohe Exaktheit und eine hohe Anschaulichkeit notwendig, da die entscheidende Idee, $\varepsilon < |f(x_0) - c|$ zu wählen, nur dann entwickelt werden kann, wenn einerseits bewusst ist, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt (Exaktheit) und andererseits aufgrund einer Visualisierung deutlich wird, dass diese Wahl von ε hilfreich wäre, da sich die Aussage des Satzes anschaulich damit direkt ergibt (Anschaulichkeit). Für einen syntaktischen Beweisprozess hingegen erscheint bezogen auf die Kenntnis der ε-δ-Stetigkeit nur eine hohe Exaktheit nötig, da auch hier bewusst sein muss, dass $\varepsilon > 0$ frei wählbar ist. Die konkrete Wahl von ε ergibt sich dann aber aus Term- und Gleichungsumformungen. Für diesen Fall ist die Notwendigkeit höherer Fertigkeiten im Umgang mit Termen und Ungleichungen zu vermuten.

Literatur

Apel, I. (in press). Tätigkeitstheoretische Betrachtung von Kenntnisqualitäten für mathematische Beweisprozesse. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019.* Münster: WTM-Verlag.

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung,* 30, 72–82.

Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen: eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pippig, G. (1980). Beziehungen zwischen Kenntniserwerb und Entwicklung geistiger Fähigkeiten. *Beiträge zur Psychologie*. Berlin: Volk und Wissen.

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester.* Münster: Waxmann.

Sommerhoff, D. (2017). The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills: from theory to intervention. LMU München. URL: https://edoc.ub.uni-muenchen.de/22687/ (21.12.2018).

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education,* 4, 425–432.