Daniela AßMUS, Halle a. d. S., Torsten FRITZLAR, Halle a. d. S. &
Isabelle GRETZSCHEL, Halle a. d. S.

Wie bearbeiten Sechstklässler Probleme zum Rückwärtsarbeiten mit variierten Anforderungen?

Einführung

Das analytische Vorgehen bzw. Rückwärtsarbeiten gilt als einer der ältesten und für die historische Entwicklung der Mathematik wichtigsten heuristischen Ansätze. Auch heutzutage wird es als allgemeine Strategie beim Problemlösen empfohlen, sofern es keinen speziellen Grund für ein anderes Vorgehen gibt (Pólya, 1967, S. 56). Beim Rückwärtsarbeiten i. e. S. werden ausgehend vom Bearbeitungsziel – solange bis man auf etwas Gegebenes stößt und in der Regel in mehreren Teilschritten – jeweils Sachverhalte ermittelt, aus denen sich auf das Ziel schließen lässt (Bruder & Collet, 2011, S. 79). Eine detailliertere Analyse offenbart, dass es sich beim Rückwärtsarbeiten um ein facettenreiches Konzept handelt (Aßmus & Fritzlar, i. V.). Unter anderem hat sich insbesondere für das Grundschulalter in didaktischer Absicht die Sonderform des „Rückwärtsrechnens“ etabliert. In entsprechenden Problemstellungen werden Transformationen beschrieben, die von einer gesuchten Anfangs- zu einer gegebenen Endgröße führen. Beim Rückwärtsrechnen werden dann beginnend bei der Endgröße die Transformationen soweit möglich (in umgekehrter Reihenfolge) umgekehrt, weshalb sich dieses Vorgehen auch als Rückwärtsarbeiten als Umkehren charakterisieren lässt.

Insbesondere für jüngere Schüler*innen gilt das Rückwärtsrechnen als anspruchsvoll. Das Anforderungsniveau steigt weiter, wenn einzelne beschriebene Transformationen nicht unmittelbar umkehrbar sind. Wir interessieren uns dafür, wie Schüler*innen derartige Umkehrhürden bearbeiten.

Untersuchungsdesign

Mit der hier beschriebenen Studie soll untersucht werden, wie Sechstklässler*innen mit mathematischen Problemen umgehen, die sich hinsichtlich der unmittelbaren Umkehrbarkeit im Text beschriebener Transformationen unterscheiden. Dafür wurde eine Serie aus drei Problemen entwickelt (s. Abb. 1), bei denen jeweils aufeinander folgende Transformationen eines unbekannten, zu ermittelnden Anfangswertes sowie der resultierende Endwert beschrieben sind. Das erste Problem (P1) enthält ausschließlich unmittelbar umkehrbare Einzeloperationen, deren Reihenfolge explizit dargestellt ist, sodass erfolgreiches Rückwärtsarbeiten als Umkehren vergleichsweise leicht möglich ist. Im zweiten Problem (P2) ist das Wegnehmen eines Drittels nicht

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

unmittelbar umkehrbar, da dieses – zumindest bei direkter Modellierung der textlichen Vorgaben – mit der Bestimmung des Drittels und dessen Subtraktion die Verkettung zweier Operationen umfasst. Das dritte Problem (P3) unterscheidet sich zusätzlich dadurch von den beiden anderen, dass durch die Abhängigkeit der zweiten von der ersten Transformation ein schrittweises rückwärtiges Rekonstruieren der fehlenden Werte nicht ohne weiteres durchführbar ist.

<table>
<tr>
<td>P1
Vier Piraten haben eine Schatzkiste mit Goldmünzen gestohlen. Die Piraten beschließen, die Münzen am nächsten Tag gerecht zu teilen. Nachts schleicht sich jedoch der erste Pirat heimlich zur Schatzkiste. Er zählt die Münzen und nimmt sich die Hälfte. Später kommt der zweite Pirat an der Schatzkiste vorbei und steckt sich 3 Münzen ein. Danach steht der dritte Pirat auf. Er öffnet die Schatzkiste, zählt die Münzen und nimmt sich davon die Hälfte. Später schleicht sich noch der vierte Pirat zur Schatzkiste und nimmt sich 4 Münzen. Am nächsten Morgen sind noch 5 Münzen in der Schatzkiste.
Wie viele Goldmünzen waren es am Anfang?</td>
<td>P2
Vier Kinder sammeln zu Halloween Bonbons. Sie bewahren alle Bonbons in einer Tüte auf. Die Tüte steht im Wohnzimmer auf dem Tisch. Zuerst geht das erste Kind ins Wohnzimmer und greift sich 5 Bonbons heraus. Danach schleicht sich das zweite Kind zur Tüte. Es zählt die Bonbons und nimmt sich ein Drittel von diesen. Später isst das dritte Kind 4 Bonbons aus der Tüte. Schließlich geht das vierte Kind ins Wohnzimmer. Es schaut in die Tüte und nimmt sich die Hälfte der Bonbons.
Danach sind noch 6 Bonbons in der Tüte.
Wie viele Bonbons haben die Kinder ursprünglich gesammelt?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">P3
Drei Diebe haben einen Sack mit Diamanten erbeutet, die sie am nächsten Tag unter sich aufteilen wollen. In der Nacht schleicht sich der erste Dieb zum Sack und steckt sich ein Drittel der Diamanten ein. Als er wieder schläft, geht der zweite Dieb zum Sack und nimmt sich 2 Diamanten mehr als der erste heraus. Im Morgengrauen nimmt sich der dritte Dieb die Hälfte der übrig gebliebenen Diamanten. Danach sind noch 5 Diamanten im Sack.
Wie viele Diamanten waren zu Beginn im Sack?</td>
</tr>
</table>

Abb. 1: Eingesetzte Probleme der Untersuchung

In der noch laufenden Untersuchung wurden bislang 11 halbstandardisierte Einzelinterviews mit mathematisch leistungsstarken Sechstklässler*innen verschiedener Gymnasien aus Halle (Saale) durchgeführt. Während der Interviews bearbeiten die Proband*innen die jeweiligen Probleme (soweit möglich begleitet von lautem Denken). Die Bearbeitungsprozesse und Aussagen der Kinder werden im ersten Zugriff mit Hilfe qualitativer Inhaltsanalyse ausgewertet.

Erste Ergebnisse

Alle teilnehmenden Schüler*innen lösten das erste Problem, indem sie ihre Bearbeitung unmittelbar beim Endwert begannen und – teilweise unterbrochen von anderen Ansätzen – durch Umkehren der beschriebenen Transformationen und deren Reihenfolge den Anfangswert bestimmten. Auch in P2 und P3 wählten alle Schüler*innen zunächst einen vom Endwert ausgehenden Bearbeitungsansatz, bei dem Rückwärtsarbeiten durch Umkehren erfolgte, bis die in dem jeweiligen Problem konstruierte Umkehrhürde erreicht war. Im Umgang mit diesen Hürden zeigten sich unterschiedliche typische Vorgehensweisen, die im Folgenden beispielbezogen dargestellt werden.

Ein Teil der Schüler*innen zeigte keine sichtbare Reaktion auf die veränderten Anforderungen in P2. Die Bearbeitung erfolgte durch *Übertragung des jeweiligen Lösungsansatzes* aus P1. So rechnete beispielsweise David auch bei diesem Problem durchgängig rückwärts und kehrte dabei das Wegnehmen des Drittels durch Verdreifachen um, wie er es zuvor auch beim Verdoppeln als Umkehrung des Wegnehmens der Hälfte in P1 getan hatte.

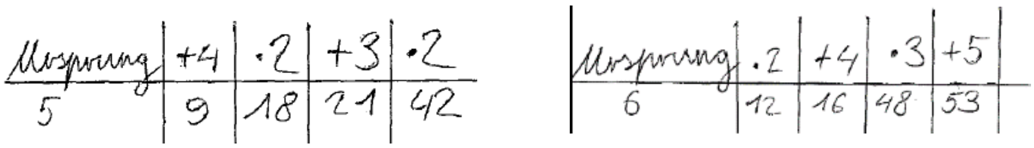

Abb. 2: Bearbeitungen von P1 und P2 durch David

Demgegenüber lassen sich bei vielen Schüler*innen Veränderungen im Arbeitsprozess rekonstruieren, die u. E. als Reaktion auf die jeweilige Umkehrhürde angesehen werden können. Hierzu sind zum einen Anpassungen der Vorgehensweise zu zählen, durch die eine zielführende Fortsetzung des Rückwärtsrechnens möglich bleibt. Zum anderen gehören Wechsel der Vorgehensweisen oder auch Anpassungen des Problems dazu.

Ein *Anpassen der Vorgehensweise* zeigte sich anforderungsbedingt in unterschiedlicher Art und Weise. In P2 nahmen einige Schüler*innen Umdeutungen des Subtrahierens eines Drittels vor. So deutet beispielsweise Tim das Wegnehmen eines Drittels als Übrigbleiben von zwei Dritteln und schlussfolgert, dass der Zwischenwert 16 mit 1,5 multipliziert werden kann, um dieses rückgängig zu machen (Abb. 3). Wir bezeichnen diesen Ansatz als *Rückwärtsrechnen nach Umdeuten*.

Bei P3 hingegen ist eine Anpassung der Vorgehensweise durch *Rückwärtsrechnen nach Strukturbildung* möglich. Bei diesem Vorgehen wird nicht nur eine einzelne Transformation bzw. deren Ergebnis umgedeutet, sondern aus mehreren beschriebenen Transformationen werden neue Relationen konstruiert. So setzt Tim die ersten beiden beschriebenen Transformationen miteinander in Beziehung und schlussfolgert davon ausgehend, wie aus dem zuvor durch unmittelbares Umkehren bestimmten Zwischenwert der Anfangswert berechnet werden kann: „Also nehmen sie sich zwei Drittel plus 2 weg, das stimmt schon. Hm. (..) Ich glaube man könnte die 10 plus 2 und dann noch zwei Drittel dazurechnen […] also eigentlich 12 mal 3.“

Bei einem *Wechsel der Vorgehensweise* wurde der Bearbeitungsprozess nach anfänglichem Rückwärtsrechnen auf einem anderen Weg fortgesetzt, wobei das Ausmaß des Wechsels unterschiedlich war. So wurde beispielsweise bei P3 zunächst soweit möglich rückwärts gerechnet und im Anschluss durch eingeschränktes Probieren (Söhling 2017, S. 41 ff.) der Anfangswert ermittelt, der mit den ersten beiden im Problemtext beschriebenen Transformationen zum bereits bestimmten Zwischenwert führt. Da Rückwärtsrechnen und Probieren kombiniert wurden, lässt sich von einem *lokalen Wechsel* sprechen. *Globale Wechsel* hingegen zeichnen sich durch eine vollständig neue Bearbeitung (z. B. Probieren) aus, die nicht auf die zuvor ermittelten Zwischenwerte zurückgreift. In der bislang betrachteten Versuchsgruppe traten lokale Wechsel häufig, globale jedoch nur vereinzelt auf.

Unter einem *Anpassen des Problems* an die eigene Vorgehensweise werden hier grundlegende Änderungen der Problemstruktur verstanden. Diese treten üblicherweise nach erfolglosem Bearbeiten einer Hürde auf, sodass sie nicht mit einer direkten fehlerhaften Übertragung eines zuvor verwendeten Lösungsansatzes wie in Abb. 2 gleichzusetzen sind. Beispielsweise rechnet Mikka bei P2 zuerst rückwärts bis zur 16, stößt dann auf die Umkehrhürde und konstatiert: „[…] das ist ein bisschen doof. Wobei man könnte jetzt sagen, plus die 5 Bonbons vom Anfang, also 21 und das kann man jetzt im Prinzip gut dritteln und dann kommt man ja auf 7." Die vorgegebene Transformationsreihenfolge wird dabei so verändert, dass sich die ermittelte Anzahl beim Rückwärtsrechnen dritteln lässt (Abb. 4). Durch diese Anpassungen kann die Bearbeitung des Problems zwar fortgesetzt werden, sie führt allerdings nicht zur Lösung.

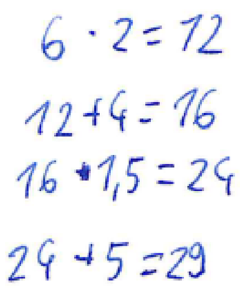

Abb. 3: Tim bearbeitet P2

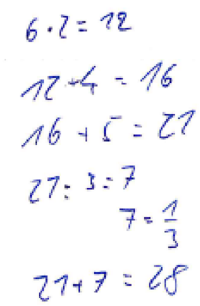

Abb. 4: Mikka bearbeitet P2

Literatur

Aßmus, D. & Fritzlar, T. (i. V.). Working backwards revisited. In L. Baumanns et al. *Wat jitt dat, wenn et fädich es? Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Köln 2019.* Münster: WTM.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Frankfurt: Cornelsen-Scriptor.

Pólya, G. (1967). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 2.* Basel: Springer.

Söhling, A.-C. (2017). *Problemlösen und Mathematiklernen – Vom Nutzen des Probierens und des Irrtums.* Wiesbaden: Springer.