Sabrina BERSCH, Augsburg

Entwicklung von differenzierenden Aufgaben zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen

In einer Interviewstudie wurde unter anderem untersucht, welchen Problemen und Schwierigkeiten Lehrkräfte in Bezug auf das Argumentieren im Analysisunterricht begegnen. Dabei wurde ein breiter Argumentationsbegriff zugrunde gelegt, der alle Formen des mathematischen Argumentierens, Begründens und Beweisens umfasst. Dieses Begriffsverständnis wird auch im vorliegenden Beitrag verwendet. Es konnte gezeigt werden, dass Lehrkräfte insbesondere Probleme haben, beim Argumentieren der Heterogenität der Schüler gerecht zu werden, und dass Lehrkräfte Schülerschwierigkeiten im Bereich der Sprache wahrnehmen (Scheffler, 2018; Bersch, 2019a, b). Bisherige konstruktiv ausgerichtete Arbeiten zum Argumentieren im Bereich der Analysis der Sekundarstufe II konzentrieren sich vorrangig auf die Argumentationsprozesse an sich und zugehörige Vorstellungen (z. B. Grundey, 2015), nicht aber auf Aspekte wie Differenzierung und Sprachförderung.

Aufbauend auf die Erkenntnisse der Interviewstudie wurde deshalb eine differenzierende Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen entwickelt, die das mathematische Argumentieren fördert. In den verschiedenen Varianten dieser Lernumgebung steht je eine differenzierende Aufgabe im Zentrum. Dieser Beitrag zeigt die Ideen, die der Entwicklung dieser Aufgaben zugrunde liegen, auf und stellt kurz auf die Aufgaben bezogene Evaluationsergebnisse einer Studie zum Einsatz der Lernumgebung vor. Für den Bereich der Sprachförderung innerhalb der Lernumgebung siehe Bersch (2019b).

Begründungsaufgaben zur Ableitung ganzrationaler Funktionen

Da der Fokus der Lernumgebung auf dem mathematischen Argumentieren liegt, wurde aus dem Bereich der Sekundarstufe II die Ableitung ganzrationaler Funktionen als inhaltlicher Themenbereich ausgewählt. Dieser spielt zum einen eine zentrale Rolle im Analysisunterricht am Gymnasium und der beruflichen Oberschule in Bayern, zum anderen verursacht er durch die Einschränkung auf ganzrationale Funktionen einen vergleichsweise geringen *cognitive load* im Sinne der Cognitive Load Theorie (Sweller et al., 1998), sodass mehr Kapazität des Arbeitsgedächtnisses für das mathematische Argumentieren zur Verfügung steht.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Für die eigentliche Konstruktion der Aufgaben für die Lernumgebung wurde vorab eine Schulbuchanalyse von Begründungsaufgaben aus dem Themenbereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen durchgeführt. Dafür wurden die beiden in Bayern stark verbreiteten gymnasialen Schulbücher *Lambacher Schweizer 11* und *Fokus 11* und nachträglich das zum LehrplanPLUS erschienene Schulbuch *Mathematik Band 1* für die berufliche Oberschule in Bayern herangezogen. Die analysierten Aufgaben wurden in induktiv gebildete Kategorien klassifiziert. Dabei fiel auf, dass zwei Kategorien meist getrennt voneinander auftreten, obwohl diese sinnvoll kombiniert werden können:

- Begründungen an ganzrationalen Funktionen allgemein (z. B. Eigenschaften begründen, die alle Funktionen eines Typs betreffen),
- Begründungen an konkreten Funktionen (z. B. Aussagen über eine durch einen Term/Graph gegebene Funktion treffen und diese begründen).

Innerhalb einer Aufgabe werden Begründungen entweder an konkret vorgegebenen Funktionen eingefordert, sodass die Begründung oft durch Anwenden eines gelernten Schemas erfolgen kann, oder aber es werden Begründungen von Eigenschaften einer ganzen Klasse von Funktionen auf abstrakter Ebene gefordert. Für die Konstruktion der Aufgaben für die Lernumgebung wurden diese beiden Kategorien kombiniert, um dadurch ein hohes Differenzierungspotenzial zu ermöglichen. Weitere Analysen und das gesamte Kategoriensystem werden aus Platzgründen nur im Vortrag vorgestellt.

Konstruktion einer differenzierenden Aufgabe für die Lernumgebung

Angelehnt an das Konzept der Blütenaufgaben von Bruder und Kollegen (2015, S. 527ff.) wurden für die Lernumgebung Aufgaben konstruiert, die einen mathematischen Zusammenhang über mehrere Teilaufgaben auf mehreren Ebenen argumentativ beleuchten. Dabei sind in den Teilaufgaben jeweils unterschiedliche Argumentationen möglich. Abbildung 1 zeigt eine der Aufgaben, die durch Weiterentwicklung folgender Aufgabe aus *Lambacher Schweizer 11* entstand: „Begründen Sie für ganzrationale Funktionen: […] Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens $\mathrm{n}-1$ Extremstellen“ (S. 87/4). Die Erarbeitung dieses abstrakten Zusammenhangs erfolgt in der neuen Aufgabe über mehrere, unabhängige Teilaufgaben. Die erste, geschlossene Teilaufgabe bietet einen niedrigschwelligen Einstieg, indem mit Hilfe einer konkreten Funktion am Beispiel argumentiert und somit eine Arbeit am allgemeinen Zusammenhang vorbereitet wird. Die Aussage wird dann verallgemeinert und zu eigenen Hypothesenbildungen und deren Begründung aufgefordert. Die letzte Teilaufgabe bietet Gelegenheit für offenes

Arbeiten an einer verwandten Situation, indem von Funktionen dritten Grades zu Funktionen vierten Grades übergegangen und keine Aussagen über diese Funktionen mehr vorgegeben werden. Diese Teilaufgabe ist im Sinne der Differenzierung für besonders leistungsstarke Schüler gedacht. Die Abstufung des Niveaus wird zur Transparenz mit Hilfe von Sternen markiert. Ein Stern bezeichnet niedrigschwellige Einstiegsaufgaben, zwei Sterne stehen für das Niveau, auf welchem alle Lernenden arbeiten können sollten, und drei Sterne markieren Aufgaben für besonders Leistungsstarke.

Aufgabe:

a) ★ Gegeben sind zwei reellwertige Funktionen f und g mit maximalem Definitionsbereich. Begründen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ zwei lokale Extrema besitzt und die Funktion g mit $g(x) = x^3 + x$ kein lokales Extremum besitzt.

b) ★★ Begründen Sie folgende Aussage:
Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat maximal 2 lokale Extrema.

c) ★★ Gibt es eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit genau einem lokalen Extremum? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) ★★ Finden Sie jeweils eine alternative Begründungsart für die Aussagen in Teilaufgabe a).

e) ★★★ Formulieren Sie ähnliche Aussagen über ganzrationale Funktionen vierten Grades und begründen Sie diese.

Abb.: Eine der entwickelten, differenzierenden Aufgaben

Die Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung wird ergänzt durch Formulierungshilfen (Bersch, 2019b) und durch ein vorangestelltes Lösungsbeispiel. Dieses stellt zum einen eine Unterstützung für leistungsschwächere Lernende dar, da es sehr ähnlich zur ersten Teilaufgabe ist. Zum anderen dient es auch der sprachlichen Orientierung, da typische Merkmale der in mathematischen Argumentationen verwendeten Sprache aufgezeigt werden.

Evaluation der Lernumgebung

Zur Evaluation der Lernumgebung wurde diese von 15 Lehrkräften aus Bayern und Rheinland-Pfalz in der Sekundarstufe II eingesetzt. In einem schriftlichen Interview wurden ihre Erfahrungen hinsichtlich unterschiedlicher Aspekte, beispielsweise Differenzierungspotenzial, Sprachförderung und Inhalt, erfasst. So wurde ein authentischer Einsatz im Unterricht mit der Expertise von Lehrkräften kombiniert, um herauszufinden, inwiefern die in der Lernumgebung umgesetzten Konzepte eine adäquate Möglichkeit bieten, auf die in der Interviewstudie erkannten Probleme beim Argumentieren im Analysisunterricht zu reagieren.

Im Bezug auf die differenzierende Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung wurden von den Lehrkräften der niedrigschwellige Einstieg durch die erste

Teilaufgabe und die verständlichen Aufgabenstellungen positiv hervorgehoben. Außerdem schätzen die Lehrkräfte die Aufgaben als förderlich für Verbesserungen von Kenntnissen und Fähigkeiten der Schüler im Bereich des Argumentierens und im Bezug auf die fachlichen Inhalte ein. Die Lehrkräfte berichteten auch von Schwierigkeiten der Schüler beim Begründen und Formulieren und im Bezug auf die Inhalte, insbesondere im Bereich der abstrakteren Teilaufgaben. Im Bezug auf das Differenzierungspotenzial der Lernumgebung gab es keine negativen Äußerungen. Die meisten Lehrkräfte bewerteten das Differenzierungspotenzial positiv. Einige begründeten ihre Einschätzung durch konkrete Nennung von differenzierenden Eigenschaften der Lernumgebung, beispielsweise die gestuften Schwierigkeiten, unterschiedliche Begründungsmöglichkeiten und die Formulierungshilfen. Insgesamt zeigen sich eine hohe Akzeptanz der vorgeschlagenen Konzepte durch die Lehrkräfte und weitgehend positive Erfahrungen beim Einsatz im Unterricht.

Literatur

Altrichter, V. & Fielk, W. et al. (2017). *Mathematik. Berufliche Oberschule Bayern. Nichttechnik,* Band 1. Berlin: Cornelsen.

Bersch, S. (2019a, im Druck). Teachers perspectives on mathematical argumentation, reasoning and justifying in calculus classrooms. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (S. xxx–yyy). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Bersch, S. (2019b). Sprache beim Argumentieren im (Analysis-)Unterricht – Schwierigkeiten und Förderansätze. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag.

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H. & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513–534). Berlin: Springer Spektrum.

Götz, H., Herbst, M. et al. (2009). *Lambacher Schweizer 11. Mathematik für Gymnasien. Bayern*. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen. Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Jahnke, T. & Scholz, D. (Hrsg.) (2009). *Fokus Mathematik 11. Gymnasium Bayern*. Berlin: Cornelsen.

Scheffler, S. (2018). Mathematisch Argumentieren im Analysisunterricht. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1571–1574). Münster: WTM-Verlag. https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/37634 (28.10.2019)

Sweller, J., van Merrienboer, J. & Paas, F. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review,* 10(3), 251–296.