

Lara BILLION, Frankfurt a. M.

## **Mathematisches Handeln am Material semiotisch gedeutet**

### **1. Das Projekt MatheMat – Mathematisches Lernen mit Materialien**

Im Fokus der Studie MatheMat steht das mathematische Handeln von Lernenden an digital und analog gestalteten Materialien. Um das mathematische Handeln von Lernenden bei der Untersuchung von mathematischen Herausforderungen vergleichen zu können, wurden Lernsituationen mit dem gleichen mathematischen Gehalt und dem gleichen strukturellen Aufbau durch digitale und analoge Materialien realisiert (Billion & Vogel, 2019). In den Lernsituationen bearbeiten die Lernenden Fragestellungen zu den Inhaltsbereichen „Daten und Zufall“ und „Raum und Form“ (Kultusministerkonferenz, 2005). Die gestalteten Lernsituationen werden mit insgesamt 32 Dritt- und Viertklässler\*innen erprobt, wobei jede Lernsituation von zwei Kindertandems bearbeitet wird. In den Lernsituationen zum Inhaltsbereich „Daten und Zufall“ sortieren vier Drittklässler\*innen nominale und ordinale Daten. Weitere vier Drittklässler\*innen untersuchen Beziehungen zwischen nominalen und ordinalen Daten. Die Viertklässler\*innen bearbeiten die gleichen mathematischen Fragestellungen aber mit metrischen Daten. Die digitale Materialisierung dieser Lernsituationen erfolgt im Kontext des für schulische Anwendungen entwickelten Programms TinkerPlots (Konold & Miller, 2011), für die analoge Materialisierung wird auf Holzwürfel zurückgegriffen (Billion & Vogel, 2019). In den Lernsituationen, die sich dem Inhaltsbereich „Raum und Form“ zuordnen lassen, wird das Verhältnis von Flächeninhalt und Umfang ähnlicher ebener Figuren und die Veränderung des Umfangs bei gleichbleibendem Flächeninhalt von den Lernenden der dritten Klasse untersucht. Die Viertklässler\*innen führen eine vergleichbare Untersuchung (Zusammenhang zwischen Oberfläche und Volumen) bei räumlichen Figuren durch. Die digitale Materialisierung dieser Lernsituationen wird mit der dynamischen Geometriesoftware (DGS) GeoGebra (Hohenwarter, 2001) realisiert, die analoge Materialisierung erfolgte mit dem Material OrbiMath. Durch das Handeln der Lernenden an den unterschiedlichen Materialien soll die sich im Lernprozess zeigende Deutung des Diagramms der Lernenden rekonstruiert werden (Vogel, 2017).

In diesem Beitrag liegt der Fokus auf dem digitalen und analogen Materialarrangement, das bei der Lernsituation „Verhältnis von Umfang und Flächeninhalt ähnlicher Quadrate“ den Drittklässler\*innen zur Verfügung steht. Es soll gezeigt werden, dass das Materialarrangement von den Lernenden als

Diagramm gedeutet werden kann und damit regelgeleitete Handlungen am Diagramm möglich sind.

## **2. Semiotische Perspektive auf Mathematiklernen**

Dörfler (vgl. 2006; 2014) ist der Ansicht, dass nicht durch die Darstellungen die Objekte der Mathematik vermittelt werden, sondern, dass im Sinne von Peirce mathematische Darstellungen diagrammatischen Charakter haben und durch deren Verwendung Mathematiklernen zu einem materiellen Diskurs wird. Damit ist das Manipulieren an den Diagrammen eine mathematische Tätigkeit, anhand derer man zu Erkenntnissen und Verallgemeinerungen kommen kann. Nach Peirce werden „mit einem Diagramm Beziehungen und Relationen ausgedrückt“ (Dörfler, 2006, S. 209). Dieser relationale Charakter des Diagramms wird durch die Struktur der zugrundeliegenden Inskriptionen realisiert (Dörfler, 2006; 2014). Inskriptionen sind das, was aufgeschrieben wird, was auf dem Bildschirm erscheint oder das Material, das auf dem Tisch liegt (Gravemeijer, 2002; Dörfler, 2006; 2014). Für Diagramme gibt es bestimmte Regeln, nach denen Umformungen, Transformationen und Zerlegungen des Diagramms möglich sind. Das regelgeleitete, einfallreiche Umformen des Diagramms kann als mathematische Tätigkeit gesehen werden, durch welche die Lernenden Konsequenzen beobachten und so zu mathematischen Erkenntnissen gelangen können. Die Erkenntnisse können das Ausrechnen eines Ergebnisses, das Entdecken von zuvor unbekanntem Zusammenhängen oder das Feststellen von Eigenschaften sein (Dörfler, 2014). Aus dieser Perspektive auf mathematisches Lernen ist der Untersuchungsgegenstand nicht ein abstraktes mathematisches Objekt, sondern Diagramme und die sich durch regelgeleitetes Umformen ergebenden Konsequenzen. Inskriptionen sind nicht Darstellungen von abstrakten Objekten, sondern im diagrammatischen Sinne sind sie selbst die mathematischen Objekte (Dörfler, 2014).

## **3. Ein Beispiel aus dem Projekt MatheMat**

In den Lernsituationen der Studie MatheMat arbeiten die Lernenden mit unterschiedlichen Inskriptionen, die als Diagramm gedeutet werden können. Die analogen Materialien, die den Lernenden zu Verfügung stehen, und die digitalen Erscheinungen auf dem Bildschirm können als Inskriptionen betrachtet werden. Die hier betrachtete Lernsituation lässt sich dem Inhaltsbereich „Raum und Form“ zuordnen, in der Lernende der dritten Klasse sich mit dem Verhältnis von Flächeninhalt und Umfang bei ähnlichen Quadraten, die sie selbst erstellt haben, beschäftigen. Vier Lernende arbeiten in Tandems mit dem Material OrbiMath, das es ermöglicht, unterschiedlich lange Plastikstäbchen mit Eckenverbindungen zu einem Seitenmodell eines Quadrats

zusammenzustecken. Ihnen stehen außerdem ein kleines Quadrat zur Verfügung, das als Einheitsquadrat dient, mit dem der Flächeninhalt des Seitenmodells ausgemessen werden kann, und ein in der Größe des Einheitsquadrats kariertes Papier, auf das auch die verschieden großen Seitenmodelle gelegt werden können. Zwei weitere Tandems sehen das Seitenmodell des Quadrats im Programm GeoGebra abgebildet und können mit Schiebereglern die Länge der Seiten des Quadrats unabhängig voneinander verändern. In der linken Ecke des Seitenmodells ist ein Quadrat farblich unterlegt, das auch hier als Einheitsquadrat dient. Im Hintergrund ist auf dem Bildschirm ein Quadratraster hinterlegt, wobei jedes Quadrat dieses Rasters die Größe des Einheitsquadrats hat.

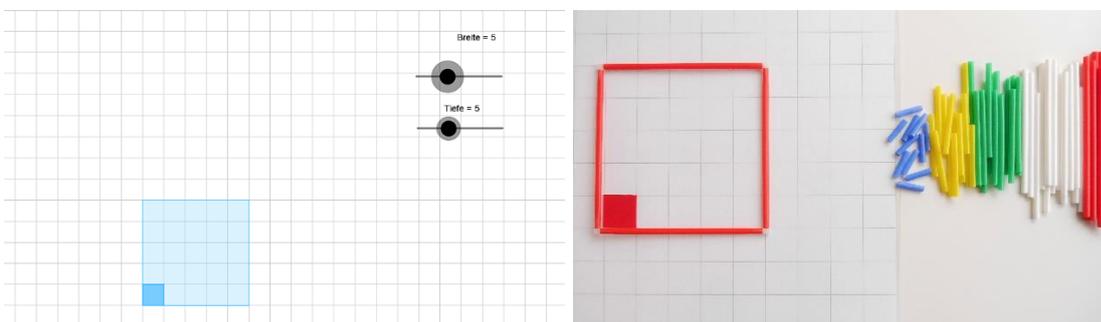


Abb.: Seitenmodell des Quadrats in GeoGebra und mit dem Material OrbiMath

Die den Lernenden zur Verfügung stehende Struktur der Inskriptionen, sowohl durch das digitale als auch durch das analoge Materialarrangement, können als Diagramm verstanden werden, da die Teile des Arrangements relationalen Charakter aufweisen. Die Relation besteht bei beiden Materialarrangements in dem Verhältnis zwischen dem Einheitsquadrat und dem Seitenmodell. Das Quadratraster hilft dieses Verhältnis besser zu erfassen. Die erste Aufgabe der Lernenden besteht darin, das Seitenmodell des Quadrats so zu vergrößern, dass die vergrößerte ebene Figur immer noch ein Quadrat ist. Die Konstruktion des digitalen und analogen Materials ist so gewählt, dass der rechte Winkel schon implizit ist. Auch das darunterliegende Raster impliziert einen rechten Winkel. Um eine Ähnlichkeitsabbildung des Seitenmodells des Quadrats herzustellen, wird für die Manipulation am Diagramm nur die Länge fokussiert, und diese muss bei ähnlichen Quadraten zwar größer, aber in beiden Dimensionen gleich sein. Sind die Seiten von den Lernenden um den gleichen Faktor verlängert worden, können alle Beziehungen zwischen den Teilen des Materialarrangements auch durch die neu entstandene Inskription ausgedrückt werden. Durch das gleiche Verändern der Länge der Plastikstäbchen und das Ziehen an den Schiebereglern auf die gleiche Länge ist das experimentelle Verändern der Konstruktion unter der Beibehaltung der geometrischen Beziehungen möglich (Kadunz, in Vorbereitung). Nach Peirce können die Lernenden durch das Verändern der beiden

Seitendimensionen um den gleichen Faktor Zusammenhänge zwischen den Quadraten feststellen. In einer weiteren Aufgabe können die Lernenden das Diagramm nutzen, um durch weiteres diagrammatisches Arbeiten Erkenntnisse zu gewinnen, wie z.B., dass der Flächeninhalt bei immer größer werdenden Quadraten im Verhältnis zum Umfang schneller zunimmt.

#### 4. Ausblick

In der Studie MatheMat haben sich weitere Lernende der vierten Klasse mit dem gleichen mathematischen Phänomen im Raum beschäftigt und das Verhältnis von Volumen und Oberfläche bei ähnlichen Würfeln untersucht. In weiteren Analysen sollen das mathematische Handeln der Lernenden mit den unterschiedlichen Materialien für die Rekonstruktion ihrer Deutung des Materialarrangements als Diagramm genutzt und die rekonstruierte Deutung in den Lernsituationen in der Ebene und im Raum verglichen werden.

#### Literatur

- Billion, L. & Vogel, R. (in Druck). Rekonstruktion mathematischer Konzepte als Ausgangspunkt für die Identifikation von Potentialen unterschiedlicher medial gestalteter Materialien. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*. Münster: WTM-Verlag.
- Dörfler, W. (2014). Abstrakte Mathematik und Computer. In T. Wassong, D. Frische-meier, P. R. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 1–14). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. In *Journal für Mathematikdidaktik (JMD)*, 27(3/4), 200–219.
- Gravemeijer, K. (2002). Preamble: from models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Hrsg.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht u.a.: Springer.
- Hohenwarter, M. (2001). *GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone*. Austria & USA.
- Kadunz, G. (in Vorbereitung). Semiotik als Orientierung. In M. Beck, L. Billion, M. Fetzer, M. Huth, V. Möller & A. Vogler (Hrsg.), *Multiperspektivische Analysen von Lehr-Lernprozessen. Multimodale, mathematikdidaktische, digitale und konzeptionelle Ansätze in verschiedenen Bildungskontexten*. Münster: Waxmann.
- Konold, C. & Miller, C. (2011). *TinkerPlots 2.0*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.
- Vogel, R. (2017). “wenn man da von oben guckt sieht das aus als ob ...” die “Dimensionslücke” zwischen zweidimensionaler Darstellung dreidimensionaler Objekte im multimodalen Austausch. In M. Beck & R. Vogel (Hrsg.), *Geometrische Aktivitäten und Gespräche von Kindern im Blick qualitativen Forschens. Mehrperspektivische Ergebnisse aus den Projekten erStMaL und MaKreKi* (S. 16–76). Münster: Waxmann.