

Birgit BRANDT, Chemnitz

Rechnen – Beschreiben – Begründen zwischen Arithmetik und Algebra im Lehramtsstudium

„Kinder denken bereits im Mathematikunterricht der Grundschule algebraisch.“ (Akinwunmi, 2017, S. 6)

Algebra in der Primarstufe

Algebraisches Denken wird von Schülerinnen und Schülern, aber auch von Lehrpersonen, meist mit dem Umformen von Termen und dem Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen in Verbindung gebracht (Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2010) und somit zunächst nicht mit dem Mathematikunterricht in der Primarstufe. Zudem wird es häufig nicht als eine grundlegende spezifische Denk- und Arbeitsweise der Mathematik wahrgenommen, sondern eher als ein kalkülhaftes und sinnentleertes Handeln mit Symbolen nach vorgegebenen Regeln – so auch meist von Lehramtsstudierenden für die Primarstufe. In der mathematikdidaktischen Diskussion hingegen wird sowohl national als auch international die Bedeutung grundlegender algebraischer Lernprozesse im Grundschulalter konstatiert (Kieran, et al., 2016) und dabei u.a. Bezug genommen auf Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen bzw. dem Inhaltsbereich Muster und Strukturen in seiner Vernetzung mit den allgemeinen Kompetenzen (Steinweg, 2016). Dabei wird auch hervorgehoben, wie algebraisches Denken arithmetische Lernprozesse unterstützt und vertieft bzw. einen verständnisorientierten Umgang mit (natürlichen) Zahlen und ihren Operationen überhaupt erst ermöglicht (Akinwunmi, 2017; Schwarzkopf, 2017). Entsprechende (substantielle) Aufgabenformate finden sich daher sowohl in den Lehrwerken für die Primarstufe als auch in zahlreichen praxisorientierten Veröffentlichungen (z.B. ebd.).

Das Projekt AriAlLe

Das Projekt AriAlLe (Zwischen **Arithmetik** und **Algebra** im **Lehramtsstudium** für die Grundschule) an der TU Chemnitz beschäftigt sich mit Begründungsprozessen von Lehramtsstudierenden bei der Bearbeitung von arithmetischen Problemaufgaben mit algebraischem Potential. Bei den im Projekt eingesetzten Aufgaben handelt es sich um Aufgaben aus verschiedenen Lehrwerken bzw. typischen Unterrichtsmaterialien für die Klassenstufe drei und vier. Die Aufgaben werden den Studierenden analog zu entsprechenden Formaten für die Primarstufe in der Form *Rechnen und Erkennen – Beschrei-*

ben – Begründen sowohl zur individuellen Bearbeitung als auch zur kollektiven Bearbeitung in Kleingruppen vorgelegt. Die Kleingruppen sollen zudem die Begründungen und die eingebundenen algebraischen Strukturen aufbereiten und präsentieren und dabei Darstellungs- und Sprachmittel für den Einsatz im Mathematikunterricht der Primarstufe auswählen.

Das Potential dieser Aufgaben entfaltet sich nur bei einem entsprechenden Einsatz im Unterricht, der über die eingebundenen Rechenprozesse hinausgeht. Ziel ist es daher auch, mit den Studierenden gemeinsam ihre individuellen Ressourcen zu entdecken und weiterzuentwickeln und im Anschluss an die jeweiligen Bearbeitungsprozesse herauszuarbeiten, wie die ausgewählten Aufgaben dazu beitragen (können), algebraisches Denken im Arithmetikunterricht und damit eine „wesentliche Grundlage für die Entwicklung von flexiblen Rechenfähigkeiten“ (Schwarzkopf, S. 22) zu fördern.

Empirische Datengrundlage

Eine erste Datenerhebung hat im Wintersemester 2018/19 im Rahmen der Veranstaltung *Arithmetik und ihre Didaktik* an der TU Chemnitz stattgefunden; im laufenden Wintersemester 2019/20 wird die Datenerhebung fortgesetzt. Das Modul setzt sich aus einer Vorlesung, einem Seminar und einem optionalen Tutorium zusammen und wird von den Studierenden in der Regel im dritten Semester des Lehramtsstudiums absolviert.

Die individuellen Bearbeitungen werden im Tutorium durchgeführt und die Verschriftlichungen eingesammelt. Im WiSe 2018/19 wurden schriftliche Aufgabebearbeitungen von 47 Lehramtsstudierenden dokumentiert. Entlang des Aufgabenformates *Rechnen und Erkennen – Beschreiben – Begründen* werden diese schriftlichen Produkte im Sinne eines „dualen Lernpfades“ für „das Erklären operativer Muster“ (Götze, 2019; s.a. Pöhler, 2018) ausgewertet. Erste Analysen zeigen, dass mit Blick auf den fachlichen (konzeptuellen) Lernpfad der Schritt vom beispielgebundenen *Erklären wie* zum *Erklären warum* durch allgemeine Beschreibungen und Koordination der Zusammenhänge vielen Studierenden des Grundschullehramtes bei komplexeren Aufgabenmustern (z.B. *PAPA-Zahlen*) nur ansatzweise gelingt.

Die kollektiven Bearbeitungsprozesse mit anschließender Präsentation werden im Rahmen des Seminars angeregt, videografiert und anschließend transkribiert und interaktionistisch-konversationsanalytisch ausgewertet. Dabei ist ein Fokus der Analyse das Zusammenspiel der sprachlichen und gestischen Ausdrucksmittel und der eingesetzten Inskriptionen. Im WiSe 2018/19 wurden sieben Kleingruppen während der Bearbeitung und der anschließenden Präsentation im Seminar videografiert. Im Folgenden wird näher auf diese Videodaten eingegangen.

Erste Einsichten: Kollektive Bearbeitung und Präsentation

Zur Bearbeitung in Kleingruppen wurde eine Aufgabe aus dem Zahlenbuch 3 ausgewählt (Abb. 1) und den Studierenden in leicht modifizierter Form vorgelegt. Insbesondere wurde der Rechenstrich als Begründungshilfe erst in einem Tipp genannt und nicht, wie im Zahlenbuch, vorgegeben. Dies sollte den Studierenden ermöglichen, zunächst selber über geeignete Darstellungsmittel nachzudenken.

Sechs Gruppen setzen den Rechenstrich als Darstellungsmittel ein und argumentieren an diesem beispielgebunden, auch wenn sie dabei das Muster über die fachsprachlichen Begriffe *Minuend*, *Subtrahend*, *Summe*, *Differenz* durchaus allgemein beschreiben. Zwei Gruppen betonten jedoch in der Präsentation, dass sie nicht wissen “warum das so ist“.

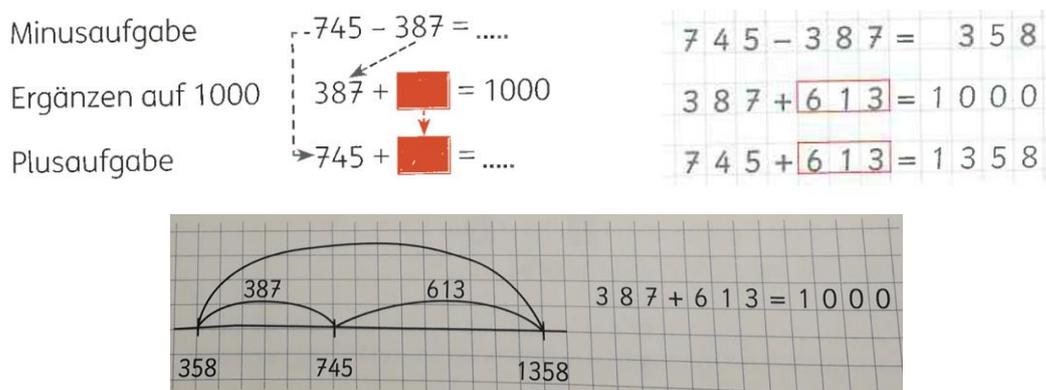


Abb. 1: Aufgabenformat und Begründung am Zahlenstrahl (Zahlenbuch 3, S. 72)

Nur eine Gruppe stellt den Zusammenhang am Rechenstrich ähnlich dar wie im Zahlenbuch und nimmt den Minuenden als Ausgangspunkt für zwei Rechnungen: $745 - 387$ und $745 + 613$ (Abb. 2).

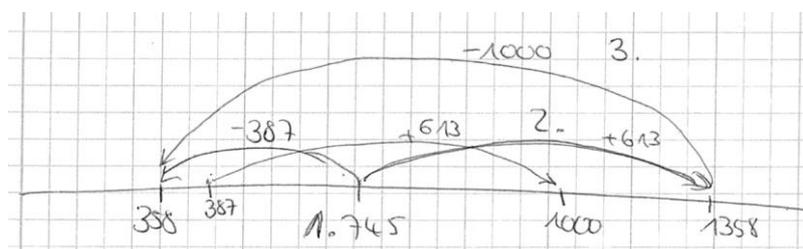


Abb. 2: Minuend als Ausgangszahl für Addition und Subtraktion

Alle anderen Gruppen stützen sich argumentativ auf die Konstanz der Differenz beim gleichsinnigen Verändern von Minuend und Subtrahend (Abb. 3). Augenfällig ist hier, dass *Differenz* dabei von den Studierenden sowohl sprachlich als auch visuell unterschiedlich eher als statischer Abstand zwischen zwei Zahlen (Abb. 3a) bzw. als dynamischer Vorgang des Bewegens auf dem Rechenstrich (Abb. 3b) beschrieben wird.

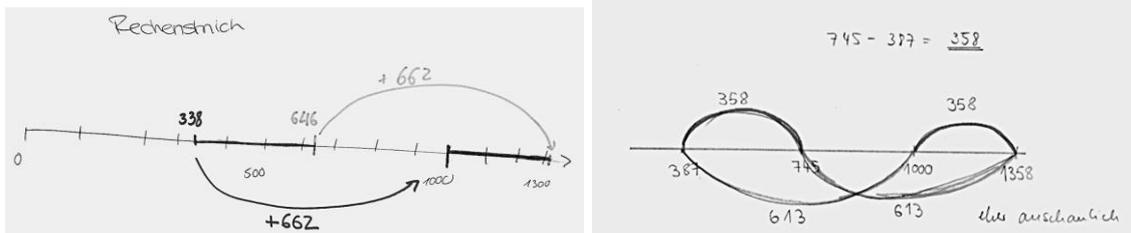


Abb. 3: Differenz am Rechenstrich: statisch (a) und dynamisch (b)

Zwei Gruppen nutzen die Allgemeingültigkeit des Musters, um es für ihre für den Unterricht geplanten Erklärungsprozesse in einen kleineren Zahlenraum zu überführen. Eine Gruppe greift dabei für die Visualisierung nicht auf den Rechenstrich zurück, sondern auf die farbigen Stäbe und präsentiert das Muster visuell als bunte Streifen ikonisch ohne Zahlenwerte (Abb. 4).



Abb. 4: Arithmetisches Muster in bunten Streifen

Hier sind *Arbeitsinskriptionen* der kollektiven Bearbeitungsprozesse abgebildet, die von den im Seminar vorgestellten *Präsentationsinskriptionen* zu unterscheiden sind. In weiteren Analysen sollen Zusammenhänge zwischen diesen verschiedenen Inskriptionsformen sowie zu den jeweils genutzten sprachlichen und gestischen Ausdrucksmitteln herausgearbeitet werden.

Literatur

- Akinwunmi, K. (2017). Algebraisch Denken – Arithmetik erforschen. Lernprozesse langfristig gestalten. *Die Grundschulzeitschrift. Algebraisches Denken*, 306, 6–11.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis Mathematik* (33), 1-7.
- Götze, D. (2019). Schriftliches Erklären operativer Muster fördern. *JMD* 40(1), 95–121.
- Kieran, C., Pang, J. Schifter, D. & Ng, S. (2016). *Early Algebra, Research in its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME-13 Topical Survey. Springer open. DOI 10.1007/978-3-319-32258-2_1
- Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozenten. Eine Entwicklungsforschungsstudie*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal Rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift. Algebraisches Denken*, 306, 18–22.
- Steinweg, S. (2016). Grundideen algebraischen Denkens in der Grundschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 932–934). Münster: WTM-Verlag.