Tomma CLÜVER, Osnabrück & Alexander SALLE, Osnabrück

Grundvorstellungen – sichere Brücken oder ungewisse Pfade in die Hochschulanalysis?

Im Laufe der letzten Jahre haben sich Grundvorstellungen mathematischer Inhalte (vom Hofe, 1995) als ein geeignetes Konzept zur Planung von *schulischem* Mathematikunterricht und zur Beschreibung individueller Vorstellungen erwiesen. Auf normativer Ebene werden Grundvorstellungen dabei als idealtypische mentale Repräsentationen aufgefasst und als mathematikdidaktische Leitlinien für Lehr-Lern-Prozesse formuliert. Bislang erfolgte diese Formulierung vorrangig mit Fokus auf den Schulunterricht, auch dann, wenn die mathematischen Konzepte ihre Relevanz vor allem in der Hochschule entfalten (vgl. z. B. Grundvorstellungen zum Grenzwert, Greefrath et al., 2016). Dementsprechend diente das Konzept auch auf deskriptiver Ebene bisher vor allem zur Beschreibung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen. In Bezug auf das Mathematiklehren und -lernen an der Hochschule und die Schnittstelle Schule-Hochschule ist die Rolle des Grundvorstellungskonzeptes folglich bislang weitestgehend ungeklärt. Im vorliegenden Beitrag thematisieren wir folgende zwei Kernfragen dieser Thematik zunächst von einem theoretischen Standpunkt aus und beziehen uns dabei exemplarisch auf die an Universitäten gelehrte Analysis, die im Folgenden als Hochschulanalysis bezeichnet wird.

- Inwieweit *beeinflussen* (an der Schule) ausgebildete Grundvorstellungen das Lernen von Analysis an der Hochschule?
- Lässt sich das Grundvorstellungskonzept gewinnbringend auf Inhalte der Hochschulanalysis *übertragen* und wenn ja, wie?

1. Inwieweit beeinflussen (an der Schule) ausgebildete Grundvorstellungen das Mathematiklernen an der Hochschule?

Sowohl stoffdidaktische als auch empirische Arbeiten geben Hinweise darauf, dass das in der Schule erworbene Vorwissen und damit insbesondere die in der Schule ausgebildeten *Vorstellungen* Auswirkungen auf das Lernen an der Hochschule haben. Im Hochschulkontext werden Vorstellungen häufig im Sinne des concept image sehr allgemein als die Gesamtheit der mit einem Begriff assoziierten kognitiven Strukturen aufgefasst (Tall und Vinner, 1981). Als mentale Repräsentationen können Grundvorstellungen auf deskriptiver Ebene ein Teil des concept image sein (Klinger, 2019). Die oben angeführte Popularität des Grundvorstellungskonzeptes für den Schulunterricht legt es nun nahe, dass Grundvorstellungen auch aus einer deskriptiven

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Perspektive tatsächlich ein nicht zu vernachlässigender Bestandteil dieses concept image von Schülerinnen und Schülern und somit auch von Studienanfängerinnen und -anfängern sind. So konnten Ulm et al. (2018) zeigen, dass Studierende über die von Greefrath et al. (2016) formulierten Grundvorstellungen zur Ableitung und zum Integral verfügen, die Bedingungen für eine Aktivierung dieser Grundvorstellungen im Hochschulkontext jedoch weiterer Forschung bedürfen. Ebenso lassen sich in den von Juter (2009) aufgezeigten Vorstellungen von Studierenden zum Funktions-, Ableitungs- und Integralbegriff bereits formulierte Grundvorstellungen (wie zum Beispiel die Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff, die Vorstellung der Änderungsrate zum Ableitungsbegriff und die Flächeninhaltsvorstellung zum Integralbegriff) erkennen.

Vor allem in Studien, in denen dem concept image die sogenannte concept definition gegenübergestellt wird, konnte nachgewiesen werden, dass Studierende zunächst auch auf Vorstellungen im concept image zur Aufgabenbearbeitung zurückgreifen, selbst wenn diese nicht der formalen Begriffsdefinition entsprechen (z. B. Juter, 2005). Schwierigkeiten von Studierenden im Mathematikstudium könnten somit im Allgemeinen durch Fehlvorstellungen und spezieller durch nicht ausgebildete oder nicht aufwärtskompatible Grundvorstellungen erklärt werden. In diesem Zusammenhang konnte Kersten (2015) zeigen, dass auch syntaktische Fehler der Studierenden durch unzulänglich ausgebildete Grundvorstellungen verursacht werden können. Darüber hinaus könnten in der Schule tragfähige (Grund-)Vorstellungen zu Problemen beim Mathematiklernen an der Hochschule führen, wenn diese nicht erweitert oder „umgebrochen" werden. Wird zum Beispiel die Kovariationsvorstellung bei Funktionen nur auf stetige Funktionen bezogen, besteht das Risiko, Fehlvorstellungen zu entwickeln, wenn zwei Variablen auch in nicht stetigen Zusammenhängen miteinander variiert werden (Klinger, 2019).

Zusammenfassend besteht weitestgehend Einigkeit darüber, dass in der Schulzeit aufgebaute Vorstellungen – und damit auch Grundvorstellungen –, die im concept image verankert sind, eine Rolle beim Lernen von Analysis an der Hochschule spielen. Bezüglich der Anwendbarkeit des Grundvorstellungskonzeptes in der Hochschulanalysis sind jedoch zentrale Fragen offen:

2. Lässt sich das Grundvorstellungskonzept gewinnbringend auf Inhalte der Analysis in der Hochschule übertragen und wenn ja, wie?

Das Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase ist gekennzeichnet durch eine Begriffsentwicklung in der formal-axiomatischen Welt (Tall, 2008). Ursprünglicher Kerngedanke des Grundvorstellungkonzeptes ist es jedoch, „Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen“ (vom Hofe 1995, S. 98) zu beschreiben. Durch eine Unterscheidung von primären und sekundären Grundvorstellungen wurden im Laufe der Zeit anstelle der realen Sachzusammenhänge auch innermathematische Zusammenhänge berücksichtigt. Während eine Verknüpfung der mathematischen Objekte mit der unmittelbaren Lebenswelt der Lernenden durch sogenannte primäre Grundvorstellungen aufgegriffen wird, beziehen sich sekundäre Grundvorstellungen auf innermathematische Darstellungsmittel als Anknüpfungspunkte (vom Hofe & Blum, 2016). Das Grundvorstellungskonzept auf konkrete Inhalte der Hochschulanalysis zu übertragen, wäre damit im Sinne sekundärer Grundvorstellungen grundsätzlich denkbar. Denn auch bei sekundären Grundvorstellungen bleiben die drei Kernaspekte der Grundvorstellungsidee (vom Hofe, 1995), wenn auch in veränderter Form, weitestgehend erhalten: Erstens erfolgt eine inhaltliche Deutung der mathematischen Objekte und Sinnkonstituierung durch Anknüpfung an den Lernenden bekannte innermathematische Zusammenhänge. Zweitens ermöglichen diese Vorstellungen den Lernenden, gedanklich flexibel mit den mathematischen Objekten zu operieren und dabei drittens, insbesondere innermathematische Anwendungen, v. a. Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsregistern, zu vollziehen.

Aufgrund des formal-axiomatischen Aufbaus der Hochschulanalysis besteht bei der Frage, ob und wenn ja wie, eine Übertragung der Grundvorstellungsidee auf die Hochschulanalysis gewinnbringend erfolgen kann, dennoch weiterhin Klärungsbedarf. Im Falle einer möglichen Übertragung stellt sich außerdem die Frage, ob sich zu mathematischen Konzepten der höheren Mathematik normative Leitlinien im Sinne des Grundvorstellungskonzeptes formulieren lassen und wenn ja, welche. Exemplarisch kann dies am Integral-Begriff angedeutet werden: Zum in der Hochschule eingeführten Begriff des Lebesgue-Integrals lässt sich (ähnlich wie zum Riemann-Integral die Flächeninhaltsgrundvorstellung) eine Volumengrundvorstellung formulieren.

3. (Zwischen-)Fazit

Ob Grundvorstellungen „sichere Brücken“ oder „ungewisse Pfade“ in die Hochschulanalysis sind, hängt zusammenfassend zunächst davon ab, ob die in der Schule ausgebildeten (Grund-)Vorstellungen anschlussfähig in Hinblick auf die Inhalte der Hochschulanalysis sind. Inwiefern die ausgebildeten Grundvorstellungen dann an der Hochschule konkret genutzt werden, um die neuen Vorlesungsinhalte zu verstehen bzw. mit dem Vorwissen zu verknüpfen oder auch Übungsaufgaben zu bearbeiten, ist größtenteils ungeklärt. Zudem ist unklar, ob und wenn ja welche Grundvorstellungen zu Begriffen, die vorrangig in der Hochschul- und weniger Schulmathematik thematisiert werden, formuliert werden können. Für empirische und stoffdidaktische Arbeiten stellen sich aufbauend auf dem vorliegenden Beitrag insbesondere folgende Fragen: Fördert das Grundvorstellungskonzept ein vorrangig anschauungsgelenktes Lernen und ist deshalb nicht geeignet, mathematisches Arbeiten in der Hochschule in geeigneter Weise zu beschreiben und zu fördern? Oder haben sekundäre Grundvorstellungen durch ihren normativen Aspekt und insbesondere durch ihre inhärente Verknüpfung von Fachinhalten und den Lernenden bekannten innermathematischen Zusammenhängen bspw. Potential, concept definition und concept image bei den Studierenden stärker zu verknüpfen? Im Vortrag werden Ergebnisse einer derzeit durchgeführten Interviewstudie zu den zentralen Fragen dieses Beitrags vorgestellt. Interviewt werden Oberstufenschülerinnen und -schüler, die ein mathematiknahes Studium anstreben. Im Fokus der Auswertung und Ergebnispräsentation stehen die Fragen, welche (Grund-)Vorstellungen ausgebildet und ob diese in Bezug auf Konzepte der Hochschulanalysis tragfähig sind.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin: Springer.

Juter, K. (2005). Limits of functions – How do students handle them? *Pythagoras*, 61, 11–20.

Juter, K. (2009). Learning analysis: Students’ starting point. In C. Winsløw, *Nordic Research in Mathematics Education* (S. 127–134). Rotterdam: Sense Publishers.

Kersten, I. (2015). Kalkülfertigkeiten an der Universität: Mängel erkennen und Konzepte für die Förderung entwickeln. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 33–49). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Klinger, M. (2019). Grundvorstellungen versus Concept Image? In A. Büchter et al. (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 61–75). Wiesbaden: Springer.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

Ulm, V., Oldenburg, R., Drösemeier, A., Greefrath, G., Siller, H.-S. & Weigand, H.-G. (2018). Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen – Eine theoretische Konzeption und empirische Überprüfung. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 225–254.